CAPITULO 3

Desarrollos y aplicaciones del cálculo diferencial

3.1 Funciones implícitas

a. Observaciones generales

Frecuentemente, en la geometría analítica se da la ecuación de una curva no en la forma $y = f(x)$ sino en la forma $F(x, y) = 0$. Una recta puede representarse de esta manera por medio de la ecuación $ax + by + c = 0$, y una elipse, por la ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Para obtener la ecuación de la curva en la forma $y = f(x)$ debe "resolverse" la ecuación $F(x, y) = 0$ para y. En el Volumen I se con sideró el problema especial de encontrar la inversa de una función $y = f(x)$, es decir, el problema de resolver la ecuación $F(x, y) = y$ $f(x) = 0$ para la variable x.

Estos ejemplos sugieren la importancia de los métodos para resol ver una ecuación $F(x, y) = 0$ para x, o bien, para y. Tales métodos se encontrarán incluso para ecuaciones que comprenden funciones de más de dos variables.

En los casos más sencillos, como los de las ecuaciones antes mencionadas para la recta y la elipse, puede hallarse fácilmente la solución en términos de funciones elementales. En otros casos puede hallarse una aproximación de la solución, tan exacta como se desee. No obstante, para muchos fines resulta preferible no trabajar con la forma resuelta de la ecuación o con estas aproximaciones sino, por el contrario, sacar conclusiones acerca de la solución estudiando directamente la función $F(x, y)$, en la cual no se da preferencia a ninguna de las variables x, y sobre la otra.

No toda ecuación $F(x, y) = 0$ es la representación implícita de una función $y = f(x)$, o bien, $x = \phi(y)$. Es fácil dar ejemplos de ecuaciones $F(x, y) = 0$ que no permiten solución alguna en términos de funciones de una variable. Así, la ecuación $x^2 + y^2 = 0$ sólo es satisfecha por la pareja de valores $x = 0, y = 0$, mientras que la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$ no es satisfecha por valores reales en lo absoluto. Por lo tanto, es necesario investigar con mayor cuidado las circunstancias bajo las cuales una ecuación $F(x, y) = 0$ define una función $y = f(x)$ y las propiedades de esta función.

Ejercicios 3.1a

1. Supóngase que para alguna pareja de valores (a, b), $f(a, b) = 0$. Si se conoce a, dar un método iterativo de construcción para encontrar b. ¿Bajo qué condiciones sobre f será aplicable este método?

b. Interpretación geométrica

Con el fin de aclarar la situación, representemos la función $F(x, y)$ por medio de la superficie $z = F(x, y)$ en el espacio tridimensional. Las soluciones de la ecuación $F(x, y) = 0$ son las mismas que las soluciones simultáneas de las dos ecuaciones $z = F(x, y)$ y $z = 0$. Geométricamente, el problema es determinar si la superficie $z = F(x, y)$ se intersecta con el plano x, y en las curvas $y = f(x)$ o $x = \phi(y)$. (Aquí no nos interesa *qué tanto* puede extenderse tal curva de intersección.)

Una primera posibilidad es que la superficie y el plano no tengan puntos en común. Por ejemplo, el paraboloide $z = F(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ se encuentra completamente por encima del plano x, y. Aquí no existe curva de intersección. Obviamente, sólo es necesario considerar los casos en los que exista al menos un punto (x_0, y_0) en el que $F(x_0, y_0) = 0$; el punto (x_0, y_0) constituye un "punto inicial" para la solución.

Conociendo una solución inicial, se tienen dos posibilidades: el plano tangente en el punto (x_0, y_0) es horizontal, o bien, no lo es. Si el plano tangente es horizontal, fácilmente puede ilustrarse por medio de ejemplos que puede ser imposible extender una solución $y = f(x)$ o $x = \phi(y)$ desde (x_0, y_0). Por ejemplo, el paraboloide $z = x^2 + y^2$ tiene la solución inicial $x = 0$, $y = 0$, pero no contiene a otro punto en el plano x, y. Como contraste, la superficie $z = xy$ con la solución inicial $x = 0, y = 0$ se intersecta con el plano x, y a lo largo de las rectas $x = 0$ y $y = 0$; pero en ninguna vecindad del origen

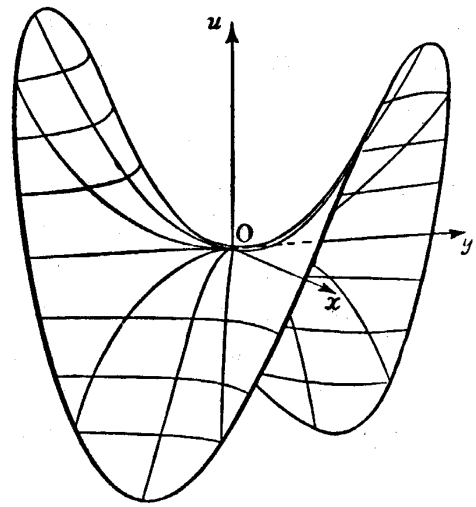

Figura 3.1 La superficie $u = xy$.

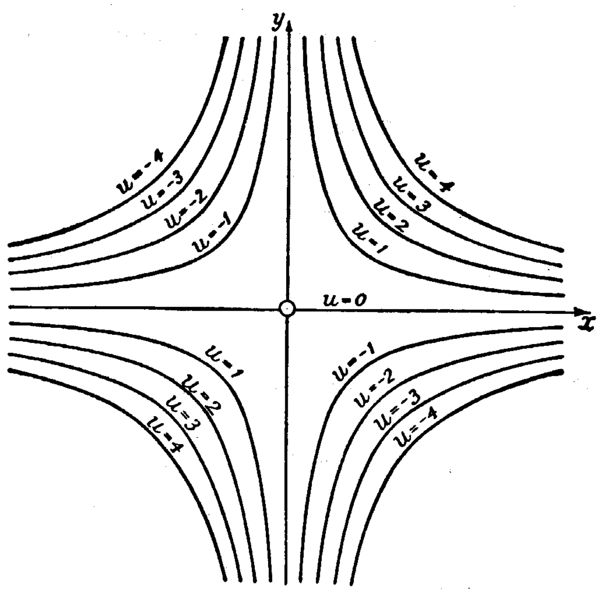

Figura 3.2 Líneas de contorno de $u = xy$.

puede representarse la intersección *completa* por una función $y = f(x)$ o por una función $x = \phi(y)$, (ver las Figs. 3.1 y 3.2). Por otra parte, es perfectamente posible que la ecuación $F(x, y) = 0$ tenga una solución de ese tipo, incluso cuando el plano tangente en el punto dado por la solución inicial sea horizontal, como en el caso $F(x, y) = (y - x)^4 = 0$. Por consiguiente, en el caso excepcional de un plano tangente horizontal no se puede hacer una proposición general definida.

La otra posibilidad es que el plano tangente en el punto dado por la solución inicial no sea horizontal. Entonces, imaginando intuitivamente la superficie $z = F(x, y)$ como aproximada por el plano tangente en una vecindad de la solución inicial, es de esperar que la superficie no pueda combarse lo suficientemente rápido como para evitar cortar el plano x,y cerca de (x_0, y_0) en una sola curva de intersección bien definida, y que una porción de la curva cerca de la solución inicial pueda representarse por la ecuación $y = f(x)$ o $x = \phi(y)$. Analíticamente, la afirmación de que el plano tangente no es horizontal significa que $F_x(x_0, y_0)$ y $F_y(x_0, y_0)$ no son ambas cero (ver la p. 74. Esta es la base para la discusión en la subsección siguiente.

Ejercicios 3.1b

1. Examinando la superficie de $z = f(x, y)$, determinar si la ecuación $f(x, y) = 0$ puede resolverse para y como una función de x en una vecindad del punto indicado (x_0, y_0), para

   (a) $f(x, y) = x^2 - y^2, \quad x_0 = y_0 = 0$

   (b) $f(x, y) = [\log(x + y)]^{1/2}, \quad x_0 = 1.5, \quad y_0 = -.5$

   (c) $f(x, y) = \operatorname{sen}[\pi(x + y)] - 1, \quad x_0 = y_0 = 1/4$

   (d) $f(x, y) = x^2 + y^2 - y, \quad x_0 = y_0 = 0.$

c. El teorema de la función implícita

Ahora se enunciarán las condiciones suficientes para la existencia de las funciones implícitas y, al mismo tiempo, se dará una regla para derivarlas:

Supóngase que $F(x, y)$ tiene derivadas continuas F_x y F_y en una vecindad de un punto (x_0, y_0), donde

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0. \tag{1}$$

Entonces, con centro en el punto (x_0, y_0), existe algún rectángulo

$$x_0 - \alpha \leqq x \leqq x_0 + \alpha, \quad y_0 - \beta \leqq y \leqq y_0 + \beta \tag{2}$$

tal que para cada x en el intervalo I dado por $x_0 - \alpha \leqq x \leqq x_0 + \alpha$, la ecuación $F(x, y) = 0$ tiene exactamente una solución $y = f(x)$ que se encuentra en el intervalo $y_0 - \beta \leqq y \leqq y_0 + \beta$. Esta f satisface la condición inicial $y_0 = f(x_0)$ y, para toda x en I,

$$F(x, f(x)) = 0. \tag{3}$$

$$y_0 - \beta \leqq f(x) \leqq y_0 + \beta \tag{3a}$$

$$F_y(x, f(x)) \neq 0. \tag{3b}$$

Además, f es continua y tiene una derivada continua en I, dada por la ecuación

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}. \tag{4}$$

Este es un teorema de existencia estrictamente *local* para las soluciones de la ecuación $F(x, y) = 0$ en la vecindad de una solución inicial (x_0, y_0). No indica cómo hallar esa solución inicial o cómo decidir si la ecuación $F(x, y) = 0$ es satisfecha por cualquier (x, y) de alguna manera. Estas son cuestiones *globales* y que están más allá del alcance del teorema. Tambien, la *unicidad* y la *regularidad* de la solución $y = f(x)$, sólo pueden garantizarse localmente, es decir, cuando se restringe y al intervalo $y_0 - \beta < y < y_0 + \beta$. La necesidad de tales restricciones es evidente observando el sencillo ejemplo de la ecuación.

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Para toda x tal que $-1 < x < 1$, la ecuación tiene dos soluciones diferentes $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Se obtiene una solución uniforme $y = f(x)$, prescribiendo arbitrariamente uno de los signos en cada x. Es evidente que, de esta manera, se pueden encontrar soluciones que son discontinuas para toda x, eligiendo, por ejemplo, el signo positivo para x racional y el negativo para x irracional. Las soluciones continuas $y = f$ se obtienen si se restringe y a un signo constante. Puede fijarse este signo eligiendo para una x_0 dada en $-1 < x_0 < 1$, uno de los dos valores posibles y_0 para el cual $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Entonces se obtiene una solución continua única $y = f(x)$, con $y_0 = f(x_0)$, para toda x en $-1 < x < 1$, requiriendo que y satisfaga $x^2 + y^2 = 1$ y que tenga el mismo signo que y_0. Geométricamente, la gráfica de f es el semicírculo, superior o inferior, que contenga al punto (x_0, y_0). La función f tiene una derivada continua

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{f(x)}$$

para $-1 < x < 1$. Con y definida como cero para $x = \pm 1$, la solución $y = f(x)$ será continua en el intervalo cerrado $-1 \leqq x \leqq 1$.

Pero entonces, la derivada y' se vuelve infinita en los puntos extremos del intervalo, puesto que allí $F_y = 0$.

En la sección siguiente se probará el teorema general. Aquí sólo se observará que una vez que se ha establecido la existencia y la diferenciabilidad de la función $f(x)$ que satisface (3), puede encontrarse una expresión explícita para $f'(x)$, aplicando la regla de la cadena [ver (18), p. 83] para derivar a $F(x, y)$. Esto da

$$F_x + F_y f'(x) = 0,$$

y conduce a la fórmula (4), siempre que $F_y \neq 0$. De modo equivalente, si la ecuación $F(x, y) = 0$ determina a y como una función de x, se concluye que

$$dF = F_x\, dx + F_y\, dy = 0$$

y, de aquí, que

$$dy = \frac{dy}{dx}\, dx = -\frac{F_x}{F_y}\, dx.$$

Una función implícita $y = f(x)$ puede diferenciarse hasta cualquier orden dado, siempre que la función $F(x, y)$ posea derivadas parciales continuas de ese mismo orden. Por ejemplo, si $F(x, y)$ tiene primeras y segundas derivadas continuas en el rectángulo (2), el segundo miembro de la ecuación (4) es una función compuesta de x:

$$-\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

Dado que, por (3b), el denominador no se anula y supuesto que ya se sabe que $f(x)$ tiene una primera derivada continua, a partir de (4) se concluye que y' tiene una derivada continua; por la regla de la cadena, y'' está dada por

$$y'' = -\frac{F_y F_{xx} + F_y F_{xy} f' - F_x F_{xy} - F_x F_{yy} f'}{F_y{}^2}.$$

Sustituyendo f', por la expresión (4), se encuentra que

$$y'' = -\frac{F_y{}^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x{}^2 F_{yy}}{F_y{}^3}. \tag{5}$$

Las reglas (4) y (5) para encontrar las derivadas de una función implícita $y = f(x)$, pueden usarse siempre que se haya establecido la existencia de f en un intervalo a partir del teorema general sobre las funciones implícitas, incluso en los casos en donde es imposible expresar y explícitamente en términos de funciones elementales (funciones racionales, funciones trigonométricas, etc.). Aún si puede resolverse la ecuación $F(x, y) = 0$ explícitamente para y, comúnmente es más fácil encontrar las derivadas de y a partir de las fórmulas (4) y (5), sin usar representación explícita alguna de $y = f(x)$.

Ejemplos

1. La ecuación de la *lemniscata* (Volumen I, p. 102)

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

no se resuelve fácilmente para y. Para $x = 0$, $y = 0$ se obtiene $F = 0$, $F_x = 0$, $F_y = 0$. Aquí el teorema no es aplicable, como es de esperar en virtud de que por el origen pasan dos ramas diferentes de la lemniscata. No obstante, en todos los puntos de la curva donde $y \neq 0$, la regla se aplica, y la derivada de la función $y = f(x)$ está dada por

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{4x(x^2 + y^2) - 4a^2x}{4y(x^2 + y^2) + 4a^2y}.$$

A partir de esta ecuación puede obtenerse importante información acerca de la curva, sin usar la expresión explícita para y. Por ejemplo, podrían tenerse máximos o mínimos donde $y' = 0$, es decir, para $x = 0$ o para $x^2 + y^2 = a^2$. De la ecuación de la lemniscata, $y = 0$ cuando $x = 0$; pero en el origen no existen valores extremos (ver la Fig. 1.S.3, Volumen I, p. 103). Por lo tanto, las dos ecuaciones dan los cuatro puntos $\left(\pm \frac{a}{2}\sqrt{3}, \pm \frac{a}{2}\right)$ como los máximos y mínimos.

2. *La hoja de Descartes* tiene la ecuación

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

(ver la Fig. 3.3), con difíciles soluciones explícitas. En el origen, donde la curva se intersecta a sí misma, la regla no es aplicable ya que en ese punto $F = F_x = F_y = 0$. Para todos los puntos en los cuales $y^2 \neq ax$ se tiene

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

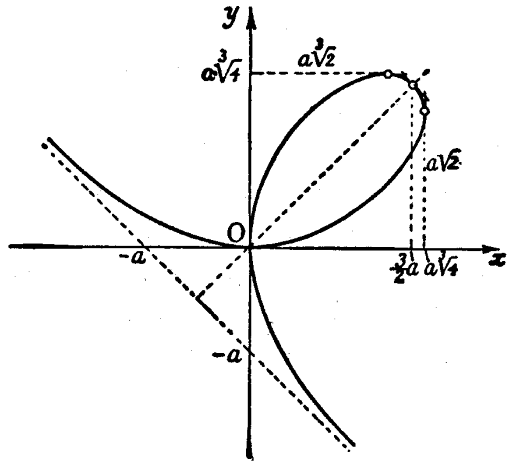

Figura 3.3 Hoja de Descartes.

En consecuencia, existe un cero de la derivada cuando $x^2 - ay = 0$, o bien, si se usa la ecuación de la curva, cuando

$$x = a\sqrt[3]{2}, \quad y = a\sqrt[3]{4}.$$

Ejercicios 3.1c

1. Probar que las ecuaciones siguientes tienen soluciones únicas para y, cerca de los puntos indicados:

   (a) $x^2 + xy + y^2 = 7 \qquad (2, 1)$

   (b) $x \cos xy = 0 \qquad (1, \pi/2)$

   (c) $xy + \log xy = 1 \qquad (1, 1)$

   (d) $x^5 + y^5 + xy = 3 \qquad (1, 1)$.

2. Encontrar las primeras derivadas de las soluciones en el Ejercicio 1 y dar sus valores en los puntos indicados.
3. Encontrar las segundas derivadas de las soluciones en el Ejercicio 1 y dar sus valores en los puntos indicados.
4. ¿Cuáles de las funciones definidas implícitamente del Ejercicio 1 son convexas en los puntos indicados?
5. Encontrar los valores máximo y mínimo de la función y que satisface la ecuación $x^2 + xy + y^2 = 27$.
6. Sea $f_y(x, y)$ continua en una vecindad del punto (x_0, y_0). Demostrar que la ecuación

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y)\,d\xi$$

determina a y como función de x en algún intervalo alrededor de $x = x_0$.

d. Demostración del teorema de la función implícita

La existencia de la función implícita se deduce directamente a partir del teorema del valor intermedio (ver el Volumen I, p. 44). Supóngase que $F(x, y)$ está definida y tiene primeras derivadas continuas en una vecindad del punto (x_0, y_0), y considérese que

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Sin pérdida de generalidad, supóngase que $m = F_y(x_0, y_0) > 0$. De lo contrario, remplácese simplemente la función F por $-F$, lo cual deja invariantes los puntos descritos por la ecuación $F(x, y) = 0$. Supuesto que $F_y(x, y)$ es continua, puede hallarse un rectángulo R con centro en (x_0, y_0) y lo suficientemente pequeño como para que R se encuentre por completo en el dominio de F, y $F_y(x, y) > m/2$ en todo r. Sea R el rectángulo

$$x_0 - a \leqq x \leqq x_0 + a, \quad y_0 - \beta \leqq y \leqq y_0 + \beta$$

(ver la Fig. 3.4). Supuesto que $F_x(x, y)$ también es continua, se concluye que F_x es acotada en R. Así, existen las constantes positivas m, M tales que

$$(6) \qquad F_y(x, y) > \frac{m}{2}, \qquad |F_x(x, y)| \leqq M \quad \text{para} \quad (x, y) \text{ en } R.$$

Para cualquier x fija entre $x_0 - a$ y $x_0 + a$, la expresión $F(x, y)$ es una función continua y monótonamente creciente de y para $y_0 - \beta \leqq y \leqq y_0 + \beta$. Si

$$(7) \qquad F(x, y_0 + \beta) > 0, \qquad F(x, y_0 - \beta) < 0,$$

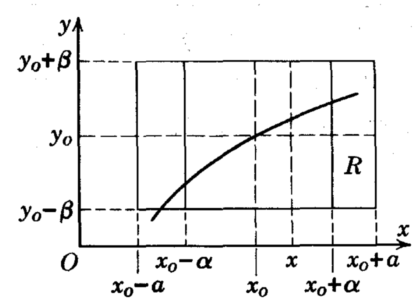

Figura 3.4

puede asegurarse que existe un solo valor y, intermedio entre $y_0 - \beta$ y $y_0 + \beta$, en el cual $F(x, y)$ se anula. Entonces, para la x dada, ecuación $F(x, y)$ tendrá una sola solución $y = f(x)$ para la cual

$$y_0 - \beta < y < y_0 + \beta.$$

Para probar (7) se observa que, por el teorema del valor medio,

$$F(x, y_0) = F(x, y_0) - F(x_0, y_0) = F_x(\xi, y_0)(x - x_0),$$

donde ξ es un valor intermedio entre x_0 y x. De aquí, si α denota un número entre 0 y a, se tiene

$$|F(x, y_0)| \leqq |F_x(\xi, y_0)|\,|x - x_0| \leqq M\alpha \qquad \text{para} \qquad |x - x_0| \leqq \alpha.$$

De modo semejante, de $F_y > m/2$ se deduce que

$$F(x, y_0 + \beta) = [F(x, y_0 + \beta) - F(x, y_0)] + F(x, y_0) > \frac{1}{2} m\beta - M\alpha,$$

$$F(x, y_0 - \beta) = -[F(x, y_0) - F(x, y_0 - \beta)] + F(x, y_0) < -\frac{1}{2} m\beta + M\alpha.$$

De donde las desigualdades (7) se cumplen para cualquier x en el intervalo $x_0 - \alpha \leqq x \leqq x_0 + \alpha$, siempre que se tome α lo suficientemente pequeña como para que $\alpha \leqq a$ y $\alpha < m\beta/2M$.

Para cualquier x tal que $|x - x_0| \leqq \alpha$, ésto prueba la existencia y la unicidad de una solución $y = f(x)$ de la ecuación $F(x, y) = 0$, para la cual $|y - y_0| \leqq \beta$ y $F_y(x, y) > m/2 > 0$. Para $x = x_0$ la ecuación $F(x, y) = 0$ tiene la solución $y = y_0$ correspondiente al punto inicial. Como, evidentemente, y_0 se encuentra entre $y_0 - \beta$ y $y_0 + \beta$, se ve que $f(x_0) = y_0$. Ahora se deducen la continuidad y la diferenciabilidad de $f(x)$ a partir del teorema del valor medio para funciones de varias variables, aplicado a $F(x, y)$ [ver (33), p.95]. Sean x y $x + h$ dos valores entre $x_0 - \alpha$ y $x_0 + \alpha$. Sean $y = f(x)$ y $y + k = f(x + h)$ los valores correspondientes de f, donde y y $y + k$ se encuentran entre $y_0 - \beta$ y $y_0 + \beta$. Entonces $F(x, y) = 0$, $F(x + h, y + k) = 0$. Se concluye que

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + h, y + k) - F(x, y) \\ &= F_x(x + \theta h, y + \theta k)\, h + F_y(x + \theta h, y + \theta k) k, \end{aligned}$$

donde θ es un valor apropiado entre 0 y 1.[1]
Como $F_y \neq 0$, puede dividirse entre F_y y así encontrar que

$$\frac{k}{h} = -\frac{F_x(x+\theta h, y+\theta k)}{F_y(x+\theta h, y+\theta k)}. \tag{8}$$

Puesto que $|F_x| \leqq M$, $|F_y| > m/2$ para todos los puntos del rectángulo considerado, se encuentra que el segundo miembro está acotado por $2M/m$. De donde

$$|k| \leqq \frac{2M}{m}|h|.$$

De aquí que $k = f(x+h) - f(x) \to 0$ cuando $h \to 0$, lo cual demuestra que $y = f(x)$ es una función continua. De (8) se conluye que, para x fija y para $y = f(x)$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{F_x(x+\theta h, y+\theta k)}{F_x(x+\theta h, y+\theta k)} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

Esto establece la diferenciabilidad de f y, al mismo tiempo, proporciona la fórmula (4) para la derivada.

La demostración se sustenta en la hipótesis de que $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, de lo cual pudo concluirse que F_y tiene signo constante en una vecindad lo suficientemente pequeña de (x_0, y_0) y que $F(x, y)$, para x fija, es una función monótona de y.

La demostración nos dice simplemente que la función $y = f(x)$ existe. Es un ejemplo típico de un "teorema de existencia" puro, en el cual no se considera la posibilidad práctica de calcular la solución. Por supuesto, podría aplicarse cualquiera de los métodos numéricos discutidos en el Volumen I (pp. 494 y siguientes) para hallar una aproximación de la solución y de la ecuación $F(x, y) = 0$, para x fija.

Ejercicios 3.1d

1. Dar un ejemplo de una función $f(x, y)$ tal que (a) pueda resolverse (a) $f(x, y) = 0$ para y como una función de x cerca de $x = x_0$, $y = y_0$, y (b) $f_y(x_0, y_0) = 0$.

[1] Obsérvese que aquí se puede aplicar el teorema del valor medio, puesto que el segmento que une a dos puntos cualesquiera del rectángulo $|x - x_0| \leqq \alpha$, $|y - y_0| \leqq \beta$ se encuentra por completo dentro de éste.

2. Dar un ejemplo de una ecuación $F(x, y) = 0$ que pueda resolverse para y como una función $y = f(x)$ cerca de un punto (x_0, y_0), tal que f no sea diferenciable en x_0.
3. Sea $\phi(x)$ definida para todos los valores reales de x. Demostrar que la ecuación $F(x, y) = y^3 - y^2 + (1 + x^2)\, y - \phi(x) = 0$ define un valor único de y para cada valor de x.

e. El teorema de la función implícita para más de dos variables independientes

El teorema de la función implícita puede hacerse extensivo a una función de varias variables independientes, como sigue:

Sea $F(x, y, \ldots, z, u)$ una función continua de las variables independientes $x, y, \ldots z, u$, con derivadas parciales continuas $F_x, F_y, \ldots, F_z, F_u$. Sea $(x_0, y_0, \ldots, z_0, u_0)$ un punto interior del dominio de definición de F, para el cual

$$F(x_0, y_0, \ldots, z_0, u_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad F_u(x_0, y_0, \ldots, z_0, u_0) \neq 0.$$

Entonces puede marcarse un intervalo $u_0 - \beta \leqq u \leqq u_0 + \beta$ alrededor de u_0 y una región rectangular R que contenga a $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ en su interior, tales que para todo $(x, y, \ldots, z)$ en R se satisfaga la ecuación $F(x, y, \ldots, z, u) = 0$ por exactamente un valor de u en el intervalo $u_0 - \beta \leqq u \leqq u_0 + \beta$.[1] Para este valor de u, el cual se denota por $u = f(x, y, \ldots, z)$, la ecuación

$$F(x, y, \ldots, z, f(x, y, \ldots, z)) = 0$$

se cumple idénticamente en R; además,

$$u_0 = f(x_0, y_0, \ldots, z_0),$$

$$u_0 - \beta < f(x, y, \ldots, z) < u_0 + \beta;\ F_u(x, y, \ldots, z,\ f(x, y, \ldots, z)) \neq 0.$$

La función f es una función continua de las variables independientes $x, y, \ldots, z$, y posee derivadas parciales continuas dadas por las ecuaciones.

$$\text{(9a)} \qquad F_x + F_u f_x = 0,\ F_y + F_u f_y = 0,\ \ldots,\ F_z + F_u f_z = 0.$$

[1] El valor β y la región rectangular R no están determinados de modo único. La aseveración del teorema es válida si β es cualquier número positivo lo suficientemente pequeño y si se elige R (que depende de β) lo suficientemente pequeña.

La demostración sigue los mismos lineamientos que se dieron en la sección anterior para la solución de la ecuación $F(x, u) = 0$, y no presenta más dificultades.

Resulta sugerente combinar las fórmulas de derivación (9a) en la ecuación única

$$F_x\,dx + F_y\,dy + \cdots + F_z\,dz + F_u\,du = 0. \tag{9b}$$

O sea, si las variables $x, y, \ldots, z, u$, u no son independientes entre sí sino que están sujetas a la condición $F(x, y, \ldots, z, u) = 0$, entonces las partes lineales de los incrementos de estas variables, de modo semejante, no son independientes sino que están relacionadas por medio de la ecuación lineal

$$dF = F_x\,dx + F_y\,dy + \cdots + F_z\,dz + F_u\,du = 0.$$

Si se remplaza du en (9b) por la expresión $u_x dx + u_y dy + \cdots + u_z dz$ y, a continuación, se iguala a cero el coeficiente de cada una de las diferenciales mutuamente independientes $dx, dy, \ldots, dz$ se obtienen nuevamente las fórmulas de derivación (9a).

Incidentalmente, el concepto de función implícita nos permite dar una definición general de *función algebraica*. Se dice que $u = f(x, y, \ldots)$ es una función *algebraica* de las variables independientes $x, y, \ldots$ si u puede definirse implícitamente por medio de una ecuación $F(x, y, \ldots, u) = 0$, donde F es un polinomio en los argumentos $x, y, \ldots, u$; brevemente, si u "satisface una ecuación algebraica". Una función que no satisface ecuación algebraica alguna se llama *trascendente*.

Como ejemplo, apliquemos las fórmulas de derivación establecidas a la ecuación de la esfera.

$$F(x, y, u) = x^2 + y^2 + u^2 - 1 = 0.$$

Para las derivadas parciales se obtiene

$$u_x = -\frac{x}{u}, \quad u_y = -\frac{y}{u},$$

y derivando aún más

$$u_{xx} = -\frac{1}{u} + \frac{x}{u^2}\,u_x = -\frac{x^2 + u^2}{u^3},$$

$$u_{xy} = \frac{x}{u^2}\,u_y = -\frac{xy}{u^3},$$

$$u_{yy} = -\frac{1}{u} + \frac{y}{u^2}u_y = -\frac{y^2+u^2}{u^3}.$$

Ejercicios 3.1e

1. Demostrar que la ecuación $x + y + z = \text{sen } xyz$ puede resolverse para z cerca de $(0, 0, 0)$. Encontrar las derivadas parciales de la solución.
2. Para cada una de las ecuaciones siguientes, examinar si tiene una solución única para z como una función de las variables restantes cerca del punto indicado:

   (a) $\text{sen } x + \cos y + \tan z = 0 \qquad (x = 0,\ y = \frac{\pi}{2},\ z = \pi)$

   (b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - w = 0 \qquad (x = 1, y = 2, z = -1, w = 8)$

   (c) $1 + x + y = \cosh(x + z) + \text{senh}(y + z) \qquad (x = y = z = 0).$
3. Demostrar que $x + y + z + xyz^3 = 0$ define a z implícitamente como una función de x y x en una vecindad de $(0, 0, 0)$. Desarrollar z hasta el cuarto orden en potencias de x y y.

3.2 Curvas y superficies en forma implícita

a. Curvas planas en forma implícita

La descripción de una curva plana por una ecuación de la forma $y = f(x)$ da preferencia asimétrica a una de las coordenadas. Se encontró (ver el Volúmen I, pp. 344-345) que la *tangente* y la *normal* a la curva están dadas, respectivamente por las ecuaciones

$$(\eta - y) - (\xi - x)f'(x) = 0 \tag{10a}$$

y

$$(\eta - y)f'(x) + (\xi - x) = 0, \tag{10b}$$

donde ξ, η son las "coordenadas corrientes" de un punto arbitrario sobre la tangente o la normal, y x, y son las coordenadas del punto sobre de la curva. La *curvatura* de la curva es

$$k = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}} \tag{10c}$$

(ver el Volumen I, p. 357). Para un punto de inflexión se cumple la condición

$$f''(x) = 0 \tag{10d}$$

Ahora se obtendrán las fórmulas simétricas correspondientes para curvas representadas implícitamente por medio de una ecuación del tipo $F(x, y) = 0$. Se hace ésto bajo la suposición de que en el punto en cuestión F_x y F_y no son ambas 0, de modo que

$$F_x^2 + F_y^2 \neq 0. \tag{11}$$

Si se supone que $F_y \neq 0$, digamos, puede sustituirse en (10*a*, *b*)$f'(x)$ por su valor dado en (4), p. 267, y, de inmediato, obtener la ecuación de la *tangente* en la forma

$$(\xi - x)F_x + (\eta - y)F_y = 0 \tag{12a}$$

y la de la *normal* en la forma

$$(\xi - x)F_y - (\eta - y)F_x = 0. \tag{12b}$$

Para $F_y = 0$, $F_x \neq 0$ se obtienen las mismas ecuaciones, partiendo de la solución de la ecuación implícita $F(x, y) = 0$ en la forma $x = g(y)$.

Los *cosenos directores de la normal* a la curva en el punto (x, y) —es decir, los cosenos directores de la normal a la recta con ecuación (12a) en el plano ξ, η- están dados por

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \tag{12c}$$

(ver (20), p. 169). De modo semejante, los cosenos directores de la tangente a la curva —es decir, de la normal a la recta (12b)— son· (12d).

$$\cos\beta = \frac{-F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}, \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}. \tag{12d}$$

En realidad se tienen dos direcciones normales a la curva en un punto dado, aquélla con los cosenos directores (12c) y la opuesta. La normal dada por (12c) tiene la misma dirección que el vector con componentes F_x, F_y, el *gradiente* de F (ver la p. 248). Se vió, en la p. 249, que la dirección del vector gradiente es aquella en la que F se incrementa más rápido; así, en un punto de la curva $F(x, y) = 0$ el gradiente apunta hacia la región $F > 0$ y lo mismo se cumple para la dirección normal determinada por las fórmulas (12c).

La fórmula (5), p. 268, proporcionó la expresión para la segunda derivada, $y'' = f''(x)$, de una función dada en la forma implícita $F(x, y) = 0$. Se deduce que la condición necesaria, $f'' = 0$, para la ocurrencia de un punto de inflexión, puede escribirse como

$$F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy} = 0 \tag{13}$$

para curvas dadas implícitamente. En esta fórmula no hay preferencia por ninguna de las dos variables x, y. Es completamente simétrica y ya no requiere la hipótesis de que $F_y \neq 0$. Por supuesto, esta característica simétrica refleja el hecho de que la noción de punto de inflexión tiene un significado geométrico bastante independiente de cualquier sistema coordenado.

Si se sustituye la fórmula (5) para $f''(x)$ en la fórmula (10c) para la curvatura k de la curva, nuevamente se obtiene una expresión[1] simétrica en x y y,

$$k = \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}. \tag{14a}$$

Introduciendo el *radio de curvatura*

$$\rho = \frac{1}{k}, \tag{14b}$$

se encuentran las coordenadas ξ, η del *centro de curvatura*, el punto sobre la normal interior que se encuentra a la distancia ρ de (x, y) (ver el Volumen I, p. 358),

$$\xi = x - \rho \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}, \quad \eta = y - \rho \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \tag{14c}$$

Si en lugar de la curva $F(x, y) = 0$, se considera la curva

$$F(x, y) = c,$$

donde c es una constante, todo en las discusiones precedentes permanece igual. Sólo tiene que remplazarse la función $F(x, y)$ por $F(x, y) - c$, la cual tiene las mismas derivadas que la función original. l.Por tanto, para estas curvas, la forma de las ecuaciones de la tangente (normal, etc.) son exactamente las mismas que se dieron.

---

[1]Para el signo de la curvatura, véase el Volumen I, p. 357. La curvatura k, definida por la fórmula (14a), es positiva si F crece sobre el lado "externo" de la curva, es decir, si la tangente a la curva cerca del punto de contacto se encuentra en la región $F \geqq 0$.

La clase de todas las curvas $F(x, y) - c = 0$ que se obtienen cuando se deja que c recorra todos los valores de un intervalo, forma la familia de "líneas de contorno", o "curvas de nivel", de la función $F(x, y)$; (ver la p. 40). Más generalmente, a partir de una ecuación de la forma

$$F(x, y, c) = 0,$$

la cual para cada valor constante del parámetro c proporciona una curva Γ_c en forma implícita, *se obtiene una familia uniparamétrica de curvas.* Para un punto (x, y) que se encuentra sobre la curva Γ_c —es decir, que satisface la ecuación $F(x, y, c) = 0$— se aplican todas las fórmulas antes deducidas. En particular, el vector gradiente $(F_x(x, y, c), F_y(x, y, c))$ es normal a Γ_c en el punto (x, y).

Como ejemplo, considérese la elipse

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{15a}$$

Por (12a), la ecuación de la tangente en el punto (x, y) es

$$(\xi - x)\frac{x}{a^2} + (\eta - y)\frac{y}{b^2} = 0;$$

de aquí que, de (15a),

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1.$$

De (14a) se encuentra que la curvatura es

$$k = \frac{a^4 b^4}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}}. \tag{15b}$$

Si $a > b$, ésta tiene su valor máximo a/b^2 en los vértices $y = 0, x = \pm a$. Su valor mínimo b/a^2 ocurre en los otros vértices $x = 0$, $y = \pm b$.

Si dos curvas $F(x, y) = 0$ y $G(x, y) = 0$ se intersectan en el punto (x, y), el *ángulo entre las curvas* se define como el ángulo ω formado por sus tangentes (o normales) en el punto de intersección. Si se recuerda que los gradientes dan la dirección de la normal y se aplica la fórmula (7), p. 162, para el ángulo entre dos vectores, se encuentra que

(16) $$\cos \omega = \frac{F_xG_x + F_yG_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\,\sqrt{G_x^2 + G_y^2}}.$$

Aquí cos ω queda determinado de modo único si se escoge ω como el ángulo entre las normales de las dos curvas en las direcciones en que se incrementan F y G.

Poniendo $\omega = \pi/2$ en (16), se obtiene la condición para la ortogonalidad, es decir, para que las curvas se intersequen a ángulos rectos en el punto (x, y):

(16a) $$F_xG_x + F_yG_y = 0.$$

Si las curvas *se tocan* —es decir, tienen tangente y normal conmunes en el punto donde se encuentran— sus vectores gradiente (F_x, F_y) y (G_x, G_y) deben ser paralelos. Esto conduce a la condición

(16b) $$F_xG_y - F_yG_x = 0.$$

Como ejemplo, considérese la familia de parábolas

(17a) $$F(x, y, c) = y^2 - 2c\left(x + \frac{c}{2}\right) = 0$$

(ver la Fig. 3.9, p. 292), las cuales tienen todas al origen como foco ("parábolas confocales"). Si $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$, las dos parábolas

$$F(x, y, c_1) = y^2 - 2c_1\left(x + \frac{c_1}{2}\right) = 0$$

y

$$F(x, y, c_2) = y^2 - 2c_2\left(x + \frac{c_2}{2}\right) = 0$$

se cortan perpendicularmente en dos puntos; porque en los puntos de intersección

$$x = -\frac{1}{2}(c_1 + c_2), \quad y^2 = -c_1c_2,$$

y de aquí que

$$\begin{aligned} &F_x(x, y, c_1)\, F_x(x, y, c_2) + F_y(x, y, c_1)\, F_y(x, y, c_2) \\ &\quad = 4(c_1\, c_2 + y^2) = 0. \end{aligned}$$

Por (14a), la curvatura de la parábola (17a) está dada por

$$k = \frac{c^2}{(c^2 + y^2)^{3/2}} .$$

En el *vértice* $x = -c/2$, $y = 0$, ésto se reduce a

$$k = \frac{1}{|c|} .$$

Entonces, el centro de curvatura o centro del *círculo osculador* en el vértice tiene, por (14c), las coordenadas

$$\xi = -\frac{c}{2} + |c| \operatorname{sgn} c = \frac{c}{2}, \qquad \eta = 0 ,$$

de modo que el foco (0, 0) se encuentra a la mitad entre el vértice y el centro de curvatura.

Ejercicios 3.2a

1. Encontrar las ecuaciones de la tangente y de la normal para las curvas dadas implícitamente por medio de las relaciones que siguen:

   (a) $x^2 + 2y^2 - xy = 0$

   (b) $e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x = 1$

   (c) $\cosh (x + 1) - \operatorname{sen} y = 0$

   (d) $x^2 + y^2 = y + \operatorname{sen} x$

   (e) $x^3 + y^4 = \cosh y$

   (f) $x^y + y^x = 1$.

2. Calcular la curvatura de la curva

   $$\operatorname{sen} x + \cos y = 1$$

   en el origen.
3. Encontrar la curvatura de la curva que está dada en coordenadas polares por la ecuación $f(r, \theta) = 0$.
4. Probar que las intersecciones de la curva

   $$(x + y - a)^3 + 27axy = 0$$

   con la recta $x + y = a$ son inflexiones de la curva.
5. Determinar a y b, de modo que las cónicas

   $$4x^2 + 4xy + y^2 - 10x - 10y + 11 = 0$$
   $$(y + bx - 1 - b)^2 - a(by - x + 1 - b) = 0$$

   se corten ortogonalmente en el punto (1, 1) y tengan la misma curvatura en este punto.
6. Sean K' y K'' dos círculos que tienen dos puntos A y B en común. Demostrar que si un círculo K es ortogonal a K' y K'', entonces también es ortogonal a todo círculo que pasa por A y B.

b. Puntos singulares de curvas

En muchas de las fórmulas de la sección anterior aparece en el denominador la expresión $F_x^2 + F_y^2$. En consecuencia, es de esperar que ocurra algo desusado cuando esta cantidad se anula, es decir, cuando $F_x = 0$ y $F_y = 0$ en un punto de la curva $F(x, y) = 0$. En un punto así, la expresión $y' = -F_x/F_y$ para la pendiente de la tangente pierde su significado.

Se dice que un punto P de una curva es *regular*, si en una vecindad de P la variable x, o bien la variable y, puede representarse como una función continuamente diferenciable de la otra. En ese caso la curva tiene una tangente en P y es, con bastante precisión, aproximada por esa tangente en una vecindad de P. Si un punto de la curva no es regular se dice que es *singular* o que es una *singularidad*.

Por el teorema de la función implícita se sabe que si $F(x, y)$ tiene primeras derivadas parciales continuas, entonces un punto de la curva $F(x, y) = 0$ es regular si en ese punto $F_x^2 + F_y^2 \neq 0$, porque si $F_y \neq 0$ en P, puede resolverse la ecuación $F(x, y) = 0$ y obtenerse una solución única continuamente diferenciable, $y = f(x)$. De modo semejante, si $F_x \neq 0$ puede resolverse la ecuación para x.

Un tipo importante de singularidad es un *punto múltiple*, es decir, un punto por el cual pasan dos o más ramas de la curva. Por ejemplo, el origen es un punto múltiple de la lemniscata (Volumen I, p. 102)

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Es evidente que en la vecindad de un punto múltiple no puede expresarse la ecuación de la curva de modo único en la forma $y = f(x)$ o $x = g(y)$.

Un ejemplo de una singularidad que no es un punto múltiple lo proporciona la curva cúbica

$$F(x, y) = y^3 - x^2 = 0;$$

(ver la Fig. 3.5). Aquí, en el origen $F_x = F_y = 0$. Resolviendo para x, y puede ponerse la ecuación de la curva en la forma

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^2},$$

donde f es continua pero no diferenciable en el origen. La curva tiene una *cúspide* en ese punto.

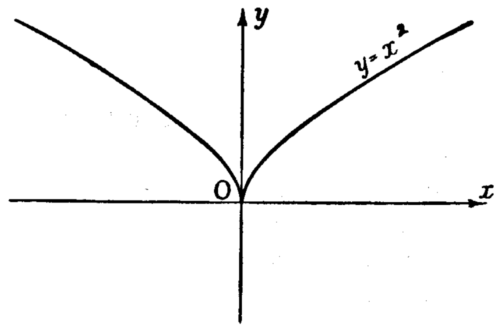

Figura 3.5 La curva $y^3 - x^2 = 0$.

Una curva *puede ser regular* en un punto donde tanto F_x como F_y se anulan. Esto lo ejemplifica

$$F(x, y) = y^3 - x^4 = 0.$$

Nuevamente aquí, $F_x = F_y = 0$ en el origen. Pero resolviendo para y se encuentra

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^4}\,,$$

donde $f(x)$ es continuamente diferenciable para toda x. De donde el origen es un punto regular. Como F es una función par de x, la curva es simétrica con respecto al eje y. Es convexa y toca al eje x en el origen, como la parábola $y = x^2$. Sin embargo, el origen es un punto algo especial para la curva, puesto que allí f'' se vuelve infinita y la curva tiene *curvatura infinita.*

El ejemplo trivial de la ecuación

$$F(x, y) = (y - x)^2 = 0$$

que representa a la recta $y = x$ muestra que no tiene que asociarse comportamiento peculiar alguno con los puntos de una curva $F(x, y) = 0$ para la cual $F_x{}^2 + F_y{}^2 = 0$. En el Apéndice 3 se tratarán los puntos singulares más sistemáticamente.

Ejercicios 3.2b

1. Discutir los puntos singulares de las curvas siguientes en el origen:
   (a) $F(x, y) = ax^3 + by^3 - cxy = 0$
   (b) $F(x, y) = (y^2 - 2x^2)^2 - x^5 = 0$
   (c) $F(x, y) = (1 + e^{1/x})y - x = 0$

(d) $F(x, y) = y^2(2a - x) - x^3 = 0$

(e) $F(x, y) = (y - 2x)^2 - x^5 = 0$.

2. La curva $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ tiene un punto doble en el origen. ¿Cuáles son sus tangentes allí?
3. Trazar una gráfica de la curva $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$, y mostrar que tiene una cúspide en el origen. ¿Cuál es la peculiaridad de esta cúspide al compararla con la cúspide de la curva $x^2 - y^3 = 0$?
4. Demostrar que cada una de las curvas

$$(x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha - b)^3 = c(x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha)^2,$$

donde α es un parámetro y b, c son constantes, tiene una cúspide y que todas las cúspides se encuentran sobre un círculo.

5. Sea (x, y) un punto doble de la curva $F(x, y) = 0$. Calcular el ángulo ϕ entre las dos tangentes en (x, y), suponiendo que no todas las segundas derivadas de F se anulan en (x, y). Encontrar el ángulo entre las tangentes en el punto doble
(a) de la lemniscata,
(b) de la hoja de Descartes (ver la p. 269).
6. Hallar la curvatura en el origen de cada una de las dos ramas de la curva

$$y(ax + by) = cx^3 + ex^2y + fxy^2 + gy^3.$$

c. *Representación implícita de superficies*

Hasta ahora, normalmente hemos representado una superficie en el espacio x, y, z por medio de una función $z = f(x, y)$. Puede resultar inconveniente, para una superficie dada en el espacio, la preferencia por coordenada z implicada en esta representación. Es más natural y más general representar las superficies en el espacio implícitamente por medio de ecuaciones de la forma $F(x, y, z) = 0$ ó $F(x, y, z) =$ constante. Por ejemplo, es mejor representar una esfera alrededor del origen por medio de la ecuación simétrica $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ que por $z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. La representación explícita de la superficie aparece entonces como la representación implícita especial $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$.

Con el fin de deducir la ecuación del plano tangente en un punto P de la superficie $F(x, y, z) = 0$, se hace la suposición de que en ese punto

$$F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2 \neq 0, \tag{18}$$

es decir, que al menos una de las derivadas parciales no es 0.[1] Si,

[1]Precisamente como para las curvas, la anulación del gradiente de F por lo común corresponde a un comportamiento singular de la superficie. No se discutirá la naturaleza de tales singularidades.

digamos, $F_z \neq 0$, puede encontrarse una ecuación explícita $z = f(x, y)$ para la superficie cerca de P. El plano tangente en P tiene la ecuación

$$\zeta - z = (\xi - x)f_x + (\eta - y)f_y \tag{19a}$$

en las coordenadas corrientes ξ, η, ζ (ver la p. 74). Sustituyendo las derivadas de f por sus valores $f_x = -F_x/F_z$, $f_y = -F_y/F_z$, de acuerdo con las fórmulas (9a), p. 274, se obtiene la ecuación del plano tangente en la forma

$$(\xi - x)F_x + (\eta - y)F_y + (\zeta - z)F_z = 0. \tag{19b}$$

La normal al plano tangente (19b) tiene la misma dirección que el vector gradiente (F_x, F_y, F_z) (ver la p. 168). De aquí que los cosenos directores de la normal están dados por las expresiones

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \tag{19c}$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}.$$

Aquí, más precisamente, se ha tomado esa normal del plano que apunta en la dirección de F *creciente* (ver la p. 249).

Si dos superficies $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ se cortan en un punto, el *ángulo* ω *entre las superficies* se define como el ángulo entre sus planos tangentes o, lo que es lo mismo, el ángulo entre sus normales. Este está dado por

$$\cos\omega = \frac{F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\ \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}}. \tag{20a}$$

En particular, la condición de perpendicularidad (ortogonalidad) es

$$F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z = 0. \tag{20b}$$

En lugar de una superficie dada por una ecuación $F(x, y, z) = 0$, puede considerarse, con mayor generalidad, superficies dadas por $F(x, y, z) = c$, donde c es una constante. Valores diferentes de c proporcionan *superficies de nivel* diferentes para la función F (ver la p. 41. En cualquier punto (x, y, z) el vector gradiente (F_x, F_y, F_z) es normal a la superficie de nivel que pasa por ese punto. De modo semejante, la ecuación (19b) da el plano tangente a la superficie de nivel.

Como un ejemplo, considérese la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Por (19b), el plano tangente en el punto (x, y, z) es

$$(\xi - x)2x + (\eta - y)2y + (\zeta - z)2z = 0 ,$$

o bien,

$$\xi x + \eta y + \zeta z = r^2.$$

Los cosenos directores de la normal son proporcionales a x, y, z, es decir, la normal coincide con el radio vector trazado desde el origen al punto (x, y, z).

Para el *elipsoide* más general con los ejes coordenados como ejes principales,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 ,$$

la ecuación del plano tangente es

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} + \frac{\zeta z}{c^2} = 1.$$

Ejercicios 3.2c

1. Encontrar el plano tangente
   (a) de la superficie

   $$x^3 + 2xy^2 - 7z^3 + 3y + 1 = 0$$

   en el punto (1, 1, 1);
   (b) de la superficie

   $$(x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 + 7xy + 3x + z^4 - z = 14$$

   en el punto (1, 1, 1);
   (c) de la superficie

   $$\operatorname{sen}^2 x + \cos (y + z) = \frac{3}{4}$$

   en el punto $(\pi/6, \pi/3, 0)$.
   (d) de la superficie

   $$1 + x \cos \pi z + y \operatorname{sen} \pi z - z^2 = 0$$

   en el punto (0, 0, 1);
   (e) de la superficie

$$\cos x + \cos y + 2 \operatorname{sen} z = 0$$

en el punto $(0, 0, -\pi/2)$;

(f) de la superficie

$$x^2 + y^2 = z^2 + \operatorname{sen} z$$

en el punto $(0, 0, 0)$.

2. Probar que las tres superficies de la familia de superficies

$$\frac{xy}{z} = u, \quad \sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = v, \quad \sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{y^2 + z^2} = w$$

que pasan por un solo punto son ortogonales entre sí.

3. Los puntos A y B se mueven uniformemente con la misma velocidad; A parte del origen y se mueve a lo largo del eje z, B parte del punto $(a, 0, 0)$ y se mueve paralelamente al ejc y. Encontrar la superficie generada por las rectas que los unen.
4. Demostrar que el plano tangente en cualquier punto de la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ intersecta a ésta en dos rectas.
5. Si $F(x, y, z) = 1$ es la ecuación de una superficie, siendo F una función homogénea de grado h, entonces el plano tangente en el punto $(x, y. z)$ está dado por

$$\xi F_x + \eta F_y + \zeta F_z = h.$$

6. Sea z definida como una función de x y y por medio de la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0.$$

Expresar z_x y z_y como funciones de x, y, z.

7. Hallar el ángulo de intersección de las siguientes parejas de superficies, en los puntos indicados:

(a) $2x^4 + 3y^3 - 4z^2 = -4, \quad 1 + x^2 + y^2 = z^2$, en $(0, 0, 1)$

(b) $x^y + y^z = 2, \quad \cosh(x + y - 2) + \operatorname{senh}(x + z - 1) = 1$, en $(1, 1, 0)$

(c) $x^2 + y^2 = e^z, \quad x^2 + z^2 = e^y$, en $(1, 0, 0)$

(d) $1 + \operatorname{senh}(x/\sqrt{z}) = \cosh(y/\sqrt{z}), \quad x^2 + y^2 = z^2 - 1$, en $(0, 0, 1)$

(e) $\cos \pi(x^2 + y) + \operatorname{sen} \pi(x^2 + z) = 1, \quad x^3 + y^3 = z^3$ en $(0, 0, 0)$.

3.3 Sistemas de funciones, transformaciones y aplicaciones

a. Observaciones generales

Los resultados que se han obtenido para las funciones implícitas ahora nos permiten considerar *sistemas* de funciones, es decir, discutir varias funciones simultáneamente. En esta sección se considerará el caso particularmente importante de los sistemas en los cuales el número de funciones es igual al número de variables independientes.

Empecemos por investigar el significado de tales sistemas en el caso de dos variables independientes. Si las dos funciones

$$\xi = \phi(x, y) \qquad \text{y} \qquad \eta = \psi(x, y) \tag{21a}$$

son ambas continuamente diferenciables en un conjunto R del plano x, y, el *dominio* de las funciones, este sistema de funciones puede interpretarse de dos maneras diferentes. La primera interpretación ("activa") es por medio de una *aplicación* o *transformación*. (La segunda, como una transformación de coordenadas, se discutirá en la p. 246.) Al punto P con coordenadas (x, y) en el plano x, y le corresponde el punto imagen Π con coordenadas (ξ, η) en el plano ξ, η

Un ejemplo es la aplicación o transformación *afín*

$$\xi = ax + by, \quad \eta = cx + dy$$

donde a, b, c, d son constantes (ver la p. 183).

Frecuentemente (x, y) y (ξ, η) se interpretan como puntos de uno y el mismo plano. En este caso se habla de *una aplicación o una transformación del plano x,y hacia sí mismo*.

El problema fundamental relacionado con una aplicación es el de su inversión, o sea, la cuestión de cuándo y cómo, en virtud de las ecuaciones $\xi = \phi(x, y)$ y $\eta = \psi(x, y)$, x y y pueden considerarse como funciones de ξ y η, y cómo determinar las propiedades de estas funciones inversas.

Si cuando (x, y) varía sobre el dominio R de la aplicación, las imágenes (ξ, η) varían sobre un conjunto B en el plano ξ, η, se dice que B es el *conjunto imagen* de R o el *recorrido* de la aplicación. Si dos puntos diferentes de R siempre corresponden a *dos puntos diferentes* de B, entonces para cada punto (ξ, η) de B existe un *solo* punto (x, y) de R para el cual (ξ, η) es la imagen. (El punto (x, y) se llama *imagen inversa*, por contraposición a la *imagen*.) Es decir, pueden invertirse la aplicación de modo único, determinando a x y y como las funciones

$$x = g(\xi, \eta), \quad y = h(\xi, \eta), \tag{21b}$$

las cuales están definidas en B. Entonces se dice que la aplicación (21b) tiene una *inversa única* o que es una aplicación uno a uno, y a la transformación (21b) se le da el nombre de *transformación* o *aplicación inversa* de la original.

Si en esta aplicación el punto $P = (x, y)$ describe una curva en el dominio R, normalmente su punto imagen (ξ, η) describirá también una curva en el conjunto B, que se llama *curva imagen* de la primera. Por ejemplo, a la recta $x = c$, que es paralela al eje y, le corresponde en el plano ξ, η la curva dada en forma paramétrica por las ecuaciones

(22a) $$\xi = \phi(c, y), \quad \eta = \psi(c, y),$$

donde y es el parámetro. De la misma manera, a la recta $y = k$ le corresponde la curva

(22b) $$\xi = \phi(x, k), \quad \eta = \psi(x, k).$$

Si a c y k se les asignan sucesiones de valores equidistantes $c_1, c_2, c_3, \ldots$ y $k_1, k_2, k_3, \ldots$, entonces la "red de coordenadas" que consiste de las rectas $x =$ constante y $y =$ constante (por ejemplo, la red de rectas en un papel milimétrico común) da lugar a una red correspondiente de curvas, la red curvilínea, en el plano ξ, η (Figs. 3.6 y 3.7). Las dos familias de curvas pueden escribirse en forma implícita. Si se representa la aplicación inversa por las ecuaciones (21b), las ecuaciones de las curvas son simplemente

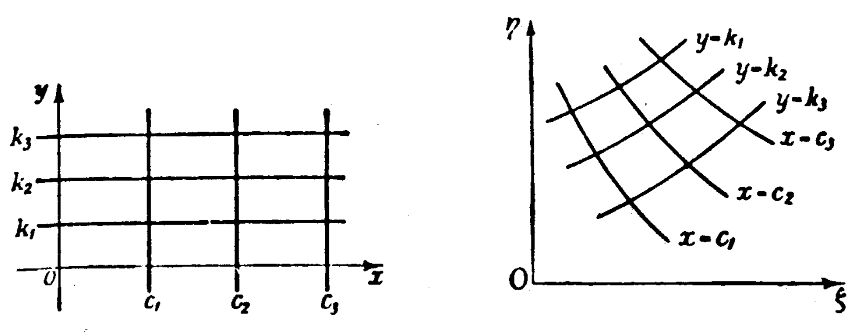

Figura 3.6 y **Figura 3.7** Redes de curvas $x =$ constante y $y =$ constante en el plano x, y y el plano ξ, η.

(22c) $$g(\xi, \eta) = c \qquad \text{y} \qquad h(\xi, \eta) = k,$$

respectivamente. En muchas situaciones la red curvilínea proporciona una *imagen geométrica* útil de la aplicación (21a), preferible a la interpretación de las ecuaciones como una superficie bidimensional en el espacio tetradimensional x, y, ξ, η.

De la misma manera, las dos familas de rectas $\xi = \gamma$ y $\eta = \kappa$ en el plano ξ, corresponden a las dos familias de curvas

$$\phi(x, y) = \gamma \qquad \text{y} \qquad \psi(x, y) = \kappa$$

en el plano x, y.

Como ejemplo, considérese la *inversión* (también llamada *aplicación por radios recíprocos* o *reflexión con respecto al círculo unitario*). Esta transformación está dada por las ecuaciones

$$\text{(23a)} \qquad \xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Al punto $P = (x, y)$ le corresponde el punto $\Pi = (\xi, \eta)$ que se encuentra sobre el mismo rayo y que satisface la ecuación

$$\text{(23b)} \qquad \xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} \qquad \text{o} \qquad O\Pi = \frac{1}{OP};$$

de donde, la longitud del vector de posición $\overrightarrow{OP}$ es el recíproco de la longitud del vector de posición $\overrightarrow{O\Pi}$. Los puntos en el interior del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ se aplican sobre puntos en el exterior del círculo, y viceversa. De (23b), se encuentra que la *transformación inversa* es

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \qquad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

la cual nuevamente es una inversión; es decir, la imagen inversa de un punto coincide con su imagen.

Como dominio R de la aplicación (23a) puede tomarse el plano x, y completo, con excepción del origen, y como recorrido B el plano ξ, η completo pero también excluyendo el origen. Las rectas $\xi = \gamma$ y $\eta = \kappa$ en el plano ξ, η corresponden respectivamente a los círculos

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{\gamma}x = 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 - \frac{1}{\kappa}y = 0$$

en el plano x, y De la misma manera, la red coordenada rectilínea en el plano x, y corresponde a las dos familias de círculos que tocan al eje ξ y al eje η en el origen.

Como un ejemplo más, considérese la aplicación

$$\xi = x^2 - y^2, \quad \eta = 2xy.$$

Las curvas $\xi =$ constante dan lugar en el plano x, y a las hipérbolas rectangulares $x^2 - y^2 =$ constante, cuyas asíntotas son las rectas $x = y$ y $x = -y$. Las rectas $\eta =$ constante también corresponden a una familia de hipérbolas rectangulares que tienen a los ejes coordenados como asíntotas. Las hipérbolas de cada familia cortan a las de la otra familia a ángulos rectos (Fig. 3.8). Las rectas paralelas a los ejes en el plano x, y corresponden a dos familias de parábolas en el plano ξ, η: las parábolas $\eta^2 = 4c^2(c^2 - \xi)$ corresponden a las rectas $x = c$ y las parábolas $\eta^2 = 4k^2(k^2 + \xi)$ corresponden a las rectas $y = k$. Todas estas parábolas tienen al origen como foco y al eje ξ como eje; forman una familia de parábolas confocales y coaxiales (Fig. 3.9).

Las transformaciones uno a uno tienen una importante interpretación y aplicación en la representación de las *deformaciones o movimientos de sustancias distribuídas de modo continuo,* como los fluidos. Si se imagina una sustancia de este tipo como si estuviera dispersa, en un instante dado, sobre una región R y, a continuación fuera deformada por un movimiento, en general la sustancia dispersa originalmente sobre R cubrirá una región B diferente de R. Cada partícula de la sustancia puede distinguirse, al principio del movimiento, por medio de sus coordenadas (x, y) en R, y al final del movimiento, por sus coordenadas (ξ, η) en B. El carácter biunívoco de la transformación obtenida al llevar (x, y) a corresponder con (ξ, η)

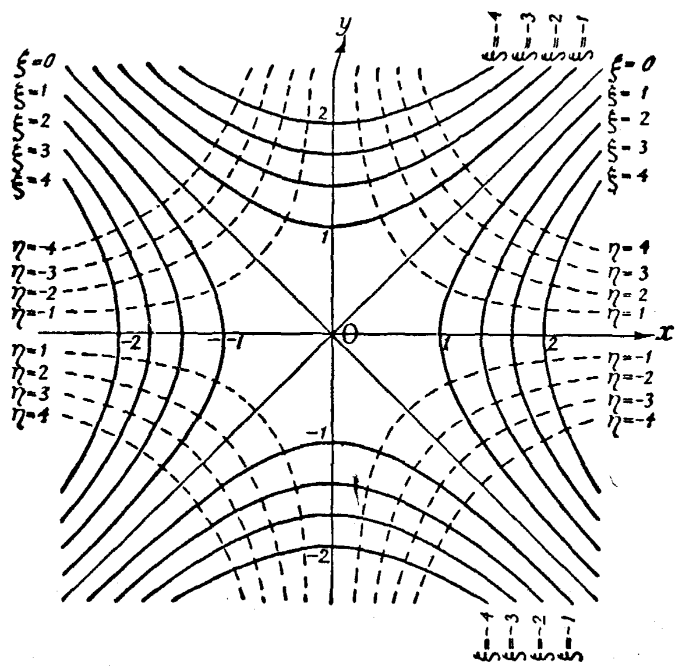

Figura 3.8 Familias ortogonales de hipérbolas rectangulares.

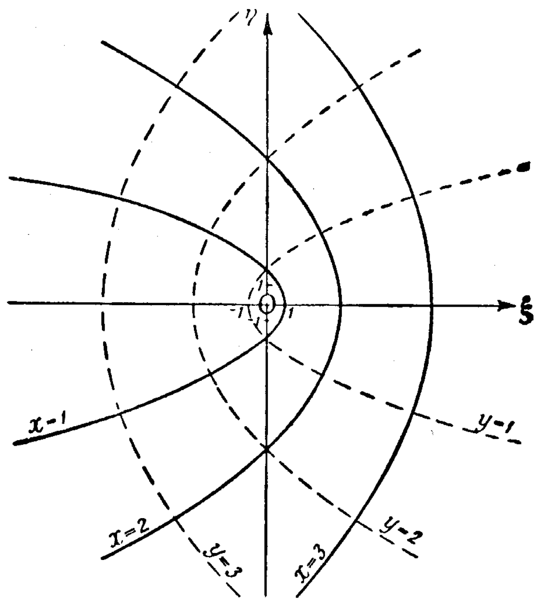

Figura 3.9 Familias ortogonales de parábolas confocales.

es simplemente la expresión matemática del hecho físico obvio de que partículas separadas permanecen separadas.

Ejercicios 3.3a

1. Encontrar las curvas imagen de las rectas $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ bajo las transformaciones siguientes:

   (a) $\xi = e^x \cos y, \qquad \eta = e^x \operatorname{sen} y$

   (b) $\xi = (x - y)/2, \qquad \eta = \sqrt{xy}$

   (c) $\xi = \sqrt{x/y}, \qquad \eta = \cos(x + y)$

   (d) $\xi = x + y^2, \qquad \eta = y + x^2 - 1$

   (e) $\xi = x^y, \qquad \eta = y^x$

   (f) $\xi = \operatorname{senh} x, \qquad \eta = \cosh y$

   (g) $\xi = \operatorname{sen}(x + y), \qquad \eta = \cos(x - y)$

   (h) $\xi = e^{\cos x}, \qquad \eta = e^{\operatorname{sen} y}$.

2. Hallar la imagen de la región limitada por la curva $\cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 y = 1$ bajo la aplicación $\xi = e^x$, $\eta = e^y$.
3. Hallar la imagen del rectángulo $1 \leqq x \leqq 3$, $4 \leqq y \leqq 16$, bajo la aplicación $\xi = \sqrt{x + y}, \qquad \eta = \sqrt{y - x}$.
4. ¿Es biunívoca la transformación $\xi = x - xy$, $\eta = 2xy$?

b. Coordenadas curvilíneas

Intimamente relacionada con la primera interpretación (como una aplicación) del sistema de ecuaciones $\xi = f(x, y), \eta = \psi(x, y)$, está la segunda interpretación, como una *transformación de coordenadas* en el plano. Si sucede que las funciones φ y ψ no son lineales, ésta ya no es una transformación "afín" sino una *transformación a coordenadas curvilíneas generales.*

Nuevamente se supone que cuando (x, y) varía sobre una región R del plano x, y, el punto correspondiente (ξ, η) varía sobre una región B del plano ξ, η, y también que para cada punto de B puede determinarse de modo único el correspondiente (x, y) en R; en otras palabras, que la transformación es uno a uno. Una vez más, la transformación inversa se denota por $x = g(\xi, \eta)$, $y = h(\xi, \eta)$.

Por *coordenadas de un punto P* en una región R ahora debe entenderse cualquier pareja de números que sirva para especificar la posición del punto P en R, de modo único con respecto a un marco coordenado dado. Las coordenadas rectangulares constituyen el sistema más sencillo de coordenadas que se extienden sobre todo el plano. Otro sistema familiar es el sistema de coordenadas polares en el plano x, y, introducidas por las ecuaciones

$$\xi = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\eta = \theta = \text{arc tan } y/x \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi).$$

Cuando se da un sistema de funciones $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ como las anteriores, en general, a cada punto $P(x, y)$ pueden asignársele los valores correspondientes (ξ, η) como nuevas coordenadas, porque cada pareja de valores (ξ, η) que pertenece a la región B determina de modo único a la pareja (x, y), y, por tanto, determina de modo único la posición del punto P en R. Entonces "las líneas coordenadas" $\xi =$ constante y $\eta =$ constante quedan representadas en el plano x, y por medio de dos familias de curvas, las cuales se definen implícitamente por las ecuaciones $\phi(x,y) =$ constante y $\psi(x,y) =$ constante, respectivamente. Estas curvas coordenadas cubren la región R con una red coordenada (generalmente curva), por lo cual las coordenadas (ξ, η) también se conocen como *coordenadas curvilíneas* en R.

Una vez más se hará notar la íntima relación que tienen estas dos interpretaciones del sistema de ecuaciones. Las curvas en el plano ξ, η, *que en la aplicación corresponden a rectas paralelas a los ejes en* el plano x, y, pueden considerarse directamente como las curvas coordenadas para las coordenadas curvilíneas $x = g(\xi, \eta)$, $y = h(\xi, \eta)$ en el plano ξ, η; inversamente, las curvas coordenadas del sistema curvilíneo $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ en el plano x, y, bajo la aplicación son las imágenes de las rectas paralelas a los ejes en el plano ξ, η. Incluso en la interpretación de (ξ, η) como coordenadas curvilíneas en el plano x,y, debe considerarse un plano ξ,η y una región B de ese plano en la cual puede variar el punto con coordenadas (ξ, η), si se desea mantener clara la situación. La diferencia está principalmente en el punto de vista.* Si se está interesado primordialmente en la región R del plano x, y, simplemente se consideran ξ, η como un nuevo medio de localizar los puntos en la región R, siendo entonces la región B del plano ξ, η simplemente subsidiaria; mientras que si se está igualmente interesado en las dos regiones R y B en los planos x,y y ξ, η, respectivamente, es preferible considerar el sistema de ecuaciones como si especificara una correspondencia entre las dos regiones, es decir, una aplicación de una sobre la otra. No obstante, a menudo es preferible tener presentes al mismo tiempo las dos interpretaciones, aplicación y transformación de coordenadas.

Si, por ejemplo, se introducen las coordenadas polares (r, θ) y se interpretan r y θ como coordenadas rectangulares en un plano r, θ, los círculos $r =$ constante y las rectas $\theta =$ constante se aplican sobre rectas paralelas a los ejes en el plano r, θ. Si la región R del plano x, y es el círculo $x^2 + y^2 \leqq 1$, el punto (r, θ) del plano r, θ variará sobre un rectángulo $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, donde los puntos correspondientes de los lados $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$ están relacionados con uno y el mismo punto de R, y el lado completo $r = 0$ es la imagen del origen $x = 0, y = 0$.

Otro ejemplo de sistema coordenado curvilíneo es el sistema de *coordenadas parabólicas*. Se llega a estas coordenadas considerando la familia de parábolas confocales en el plano x, y (ver también la p. 284 y la Fig. 3.9)

$$y^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right),$$

las cuales todas tienen al origen como foco y al eje x como eje. Por cada punto del plano, excepto el origen, pasan dos parábolas de la

*Sin embargo, existe una diferencia real en el sentido de que las ecuaciones siempre definen una *aplicación*, sin importar cuántos puntos (x, y) corresponden a un punto (ξ, η), mientras que definen una *transformación de coordenadas* sólo cuando la correspondencia es biunívoca.

familia, una correspondiente a un valor positivo del parámetro, $c = \xi$, y la otra a un valor negativo del parámetro, $c = \eta$. Estos dos valores se obtienen resolviendo para c la ecuación cuadrática $y^2 = 2c(x + c/2)$ usando los valores de x y y que correspondan al punto; ésto da

$$\xi = -x + \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \eta = -x - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Estas cantidades ξ y η pueden introducirse como coordenadas curvilíneas en el plano x, y, convirtiéndose entonces las parábolas confocales en las curvas coordenadas. En la Fig. 3.9 se indican estas curvas, si se intercambian los símbolos (x, y) y (ξ, η).

Al usar las coordenadas parabólicas (ξ, η), debe tenerse presente que *la* pareja de valores (ξ, η) corresponde a los *dos* puntos (x, y) y $(x, -y)$, que son las dos intersecciones de las parábolas correspondientes. De aquí que, con el fin de obtener una correspondencia biunívoca entre la pareja (x, y) y la pareja (ξ, η), nos debemos restringir a un semiplano, $y \geqq 0$, por ejemplo. Entonces cada región R en este semiplano está en correspondencia biunívoca con una región B del plano ξ, η, y las coordenadas rectangulares (ξ, η) de cada punto en esta región B son exactamente las mismas que las coordenadas parabólicas del punto correspondiente en la región R.

Ejercicios 3.3b

1. Probar que para $x \neq 1$, $0 < y < \pi/2$, $\xi = (\operatorname{sen} y)/(x - 1)$, $\eta = x \tan y$, definen un sistema de coordenadas curvilíneas.
2. Encontrar la ecuación para el círculo $x^2 + y^2 = 1$ en términos de las coordenadas curvilíneas

$$\xi = x^3 + 1, \ \eta = xy.$$

3. ¿Para cuáles puntos del plano x, y no pueden usarse $\xi = xy$ y $\eta = x^2 + y^2$ como coordenadas curvilíneas?

c. *Extensión a más de dos variables independientes*

Para tres o más variables independientes, el estado de cosas es análogo. De donde, un sistema de tres funciones continuamente diferenciables

$$\xi = \phi(x, y, z), \qquad \eta = \psi(x, y, z), \qquad \zeta = \chi(x, y, z),$$

definidas en una región R del espacio x, y, z, se pueden considerar como la aplicación de la región R sobre una región B del espacio ξ, η, ζ. Si esta aplicación de R sobre B es biunívoca, de manera que para cada punto imagen (ξ, η, ζ) de B puedan calcularse de modo único las coordenadas (x, y, z) del punto correspondiente (punto original o imagen inversa) en R por medio de las funciones

$$x = g(\xi, \eta, \zeta), \quad y = h(\xi, \eta, \zeta), \quad z = l(\xi, \eta, \zeta),$$

entonces (ξ, η, ζ) también pueden considerarse como las *coordenadas generales* del punto P en la región R. Las superficies $\xi =$ constante, $\eta =$ constante, $\zeta =$ constante o, en otros símbolos, $\phi(x, y, z) =$ constante, $\psi(x, y, z) =$ constante, $\chi(x, y, z) =$ constante, forman un sistema de tres familias de superficies que cubren la región R y pueden llamarse superficies coordenadas curvilíneas.

Al igual que para dos variables independientes, las transformaciones uno a uno en tres dimensiones pueden interpretarse como deformaciones de una sustancia distribuída continuamente en toda una región del espacio.

Un sistema muy importante de coordenadas son las *coordenadas esféricas,* a veces llamadas *coordenadas polares en el espacio.* Estas especifican la posición de un punto P en el espacio por medio de tres números: (1) la distancia $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ medida desde el origen; (2) la longitud geográfica ϕ, es decir, el ángulo entre el plano x, z y el plano determinado por p y el eje z; y (3) la inclinación polar o latitud complementaria θ, es decir, el ángulo entre el radio vector OP y el eje z positivo. Como se ve en la Fig. 3.10, las tres coordenadas esféricas r, ϕ, θ están relacionadas con las coordenadas rectangulares por medio de las ecuaciones de transformación

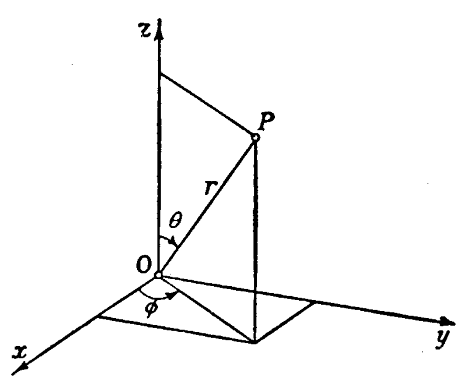

Figura 3.10 Coordenadas esféricas.

$$x = r \cos \phi \operatorname{sen} \theta,$$

$$y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta,$$

$$z = r \cos \theta,$$

de las cuales se obtienen las relaciones inversas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \operatorname{arc} \cos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\theta = \operatorname{arc} \cos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Para coordenadas polares en el plano el origen es un punto excepcional, en el sentido de que para él no se cumple la correspondencia biunívoca, porque allí el ángulo no está determinado. De la misma manera, para la coordenadas esféricas en el espacio, el eje z completo es una excepción, en el sentido de que allí está indeterminada la longitud ϕ. En el propio origen la inclinación polar θ también está indeterminada.

Las superficies coordenadas para coordenadas polares tridimensionales son como sigue: (1) para valores constantes de r, las esferas concéntricas alrededor del origen; (2) para valores constantes de ϕ, la familia de semiplanos que pasan por el eje z ; (3) para valores constantes de θ, los conos circulares con el eje z como eje y el origen como vértice (Fig. 3.11).

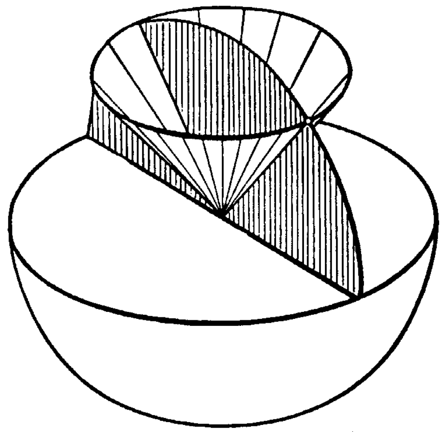

Figura 3.11 Superficies coordenadas para las coordenadas esféricas.

Otro sistema coordenado que se usa con frecuencia es el sistema de *coordenadas cilíndricas.* Estas se obtienen introduciendo las coordenadas polares ρ, ϕ en el plano x, y y conservando a z como la tercera coordenada. Entonces las fórmulas de transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas son

$$x = \rho \cos \phi,$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi,$$

$$z = z$$

y la transformación inversa es

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \operatorname{arc} \cos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$z = z.$$

Las superfieices coordenadas $\rho =$ constante son los cilindros circulares verticales que cortan al plano x, y en círculos concéntricos con el origen como centro; las superficies $\phi =$ constante son los semiplanos que pasan por el eje z y las superficies $z =$ constantes son los planos paralelos al plano x, y.

Ejercicios 3.3c

1. Encontrar la inversa de la transformación de coordenadas curvilíneas

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + y^2}, \qquad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \zeta = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

2. Invertir la transformación de coordenadas $w = r \cos \phi$, $x = r \operatorname{sen} \phi \cos \psi$, $y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \psi \cos \theta$, $z = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta$. ¿Cuáles son los conjuntos $r =$ constante, $\phi =$ constante, $\psi =$ constante, $\theta =$ constante?

d. Fórmulas de derivación para las funciones inversas

En muchos casos de importancia práctica es posible resolver explícitamente el sistema de ecuaciones dado, como en los ejemplos anteriores, y, por tanto, reconocer que las funciones inversas son continuas y poseen derivadas continuas. Si es posible presumir la existencia y la diferenciabilidad de las funciones inversas, pueden calcularse las derivadas de estas últimas sin resolver en realidad las ecuaciones explícitamente, de la siguiente manera: se sustituyen las funciones inversas $x = g(\xi, \eta)$, $y = h(\xi, \eta)$ en las ecuaciones dadas $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$. A la derecha se obtienen las funciones compuestas $\phi(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta))$ y $\psi(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta))$ de ξ y η; pero éstas deben ser iguales a ξ y η, respectivamente. Derívense ahora cada una de las ecuaciones

$$\xi = \phi(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)) \tag{24a}$$

$$\eta = \psi(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta))$$

con respecto a ξ y a η, considerando a ξ y a η como variables independientes[1] y aplicando la regla de la cadena para derivar a las funciones compuestas. Entonces se obtiene el sistema de ecuaciones

$$1 = \phi_x g_\xi + \phi_y h_\xi, \quad 0 = \phi_x g_\eta + \phi_y h_\eta, \tag{24b}$$

$$0 = \psi_x g_\xi + \psi_y h_\xi, \quad 1 = \psi_x g_\eta + \psi_y h_\eta.$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtienen expresiones para las derivadas parciales de las funciones inversas $x = g(\xi, \eta)$ y $y = h(\xi, \eta)$ con respecto a ξ y η, expresadas en términos de las derivadas de las funciones originales $\phi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ con respecto a x y y, a saber,

$$g_\xi = \frac{\psi_y}{D}, \qquad g_\eta = -\frac{\phi_y}{D}, \qquad h_\xi = -\frac{\psi_x}{D}, \qquad h_\eta = \frac{\phi_x}{D}, \tag{24c}$$

o bien,

$$x_\xi = \frac{\eta_y}{D}, \qquad x_\eta = -\frac{\xi_y}{D}, \qquad y_\xi = -\frac{\eta_x}{D}, \qquad y_\eta = \frac{\xi_x}{D}. \tag{24d}$$

Por brevedad aquí se ha escrito

$$D = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix}. \tag{24e}$$

---

[1]Estas ecuaciones se cumplen para todos los valores de ξ y η bajo consideración; como se dice, se cumplen *idénticamente*, en contraste con las ecuaciones entre variables que sólo se satisfacen para *algunos* de los valores de estas variables. Cuando tales ecuaciones idénticas, o *identidades*, se derivan con respecto a cualquiera de las variables que ocurren en ellas, nuevamente se obtienen identidades, lo que se concluye inmediatamente a partir de la definición.

Esta expresión D, que se supone no es cero en el punto en cuestión, se llama el *jacobiano o determinante funcional* de las funciones $\xi = \phi(x,y)$ y $\eta = \psi(x, y)$ con respecto a las variables x y y. Este determinante juega un papel principal siempre que se consideran transformaciones, como se verá en lo que sigue.

En lo anterior, así como ocasionalmente en otra parte, se ha usado la notación más corta $\xi(x, y)$ en lugar de la notación más detallada $\xi = \phi(x, y)$, la cual distingue entre la cantidad ξ y su expresión funcional $\phi(x, y)$. En el futuro, con frecuencia se usarán abreviaturas semejantes cuando no haya riesgo de confusión.

Para las coordenadas polares en el plano, expresadas en términos de coordenadas rectangulares,

$$\xi = r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad \eta = \theta = \operatorname{arc\,tan} \frac{y}{x},$$

las derivadas parciales son

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \qquad r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r},$$

$$\theta_x = \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2}, \qquad \theta_y = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2}.$$

De aquí que el jacobiano tiene el valor

$$D = \frac{x}{r}\frac{x}{r^2} - \frac{y}{r}\left(-\frac{y}{r^2}\right) = \frac{1}{r},$$

y las derivadas parciales de las funciones inversas (coordenadas rectangulares expresadas en términos de coordenadas polares) son, por (24d),

$$x_r = \frac{x}{r}, \qquad x_\theta = -y, \qquad y_r = \frac{y}{r}, \qquad y_\theta = x,$$

como pudo haberse encontrado con más facilidad derivando directamente las fórmulas inversas $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$.

El jacobiano se presenta con tanta frecuencia que, a menudo, se usa un símbolo especial para él[1]:

$$D = \frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)}. \tag{25}$$

[1]Con frecuencia, el jacobiano se escribe con el signo de derivada parcial como

$$D = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}.$$

Pronto resultará obvio lo adecuado de esta abreviatura. A partir de las fórmulas para las derivadas de las funciones inversas (24b), se encuentra que el jacobiano de las funciones $x = x(\xi, \eta)$ y $y = y(\xi, \eta)$con respecto a ξ y η está dado por la expresión

$$(26) \qquad \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = \frac{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x}{D^2} = \frac{1}{D} = \left(\frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)}\right)^{-1}$$

Es decir, *el jacobiano del sistema inverso de funciones es el recíproco del jacobiano del sistema original.*[2]

También se pueden expresar las segundas derivadas del sistema inverso de funciones en términos de las primeras y segundas derivadas de las funciones dadas. Sólo se tienen que derivar las ecuaciones linales (24b) con respecto a ξ y a η por medio de la regla de la cadena. (Por supuesto, se supone que las funciones dadas poseen derivadas continuas de segundo orden.) Entonces se obtienen ecuaciones lineales a partir de las cuales se pueden calcular fácilmente las derivadas requeridas.

Por ejemplo, para calcular las derivadas

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = g_{\xi\xi} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = h_{\xi\xi}$$

se derivan las dos ecuaciones

$$1 = \xi_x x_\xi + \xi_y y_\xi$$
$$0 = \eta_x x_\xi + \eta_y y_\xi$$

una vez más con respecto a ξ y, por la regla de la cadena, se obtiene

$$(27a) \qquad 0 = \xi_{xx} x_\xi{}^2 + 2\xi_{xy} x_\xi y_\xi + \xi_{yy} y_\xi{}^2 + \xi_x x_{\xi\xi} + \xi_y y_{\xi\xi},$$

$$(27b) \qquad 0 = \eta_{xx} x_\xi{}^2 + 2\eta_{xy} x_\xi y_\xi + \eta_{yy} y_\xi{}^2 + \eta_x x_{\xi\xi} + \xi_y y_{\xi\xi}.$$

Si se resuelve este sistema de ecuaciones lineales, considerando a las cantidades $x_{\xi\xi}$ y $y_{\xi\xi}$ como incógnitas (el determinante del sistema es nuevamente D y, por lo tanto, por hipótesis, no es cero) y, a continuación, se remplazan x_ξ y y_ξ por los valores ya conocidos para ellas, un cálculo breve da

[2]Por supuesto, ésta es la análoga a la regla para la derivada de la inversa de una función de una sola variable (Volumen I, p. 207).

$$x_{\xi\xi} = -\frac{1}{D^3}\begin{vmatrix} \xi_{xx}\eta_y^2 - 2\xi_{xy}\eta_x\eta_y + \xi_{yy}\eta_x^2 & \xi_y \\ \eta_{xx}\eta_y^2 - 2\xi_{xy}\eta_x\eta_y + \eta_{yy}\eta_x^2 & \eta_y \end{vmatrix} \tag{27c}$$

y

$$y_{\xi\xi} = \frac{1}{D^3}\begin{vmatrix} \xi_{xx}\eta_y^2 - 2\xi_{xy}\eta_x\eta_y + \xi_{yy}\eta_x^2 & \xi_x \\ \eta_{xx}\eta_y^2 - 2\eta_{xy}\eta_x\eta_y + \eta_{yy}\eta_x^2 & \eta_x \end{vmatrix} \tag{27d}$$

Las derivadas terceras y superiores pueden obtenerse de la misma manera, derivando repetidamente el sistema lineal de ecuaciones; en cada paso se obtiene un sistema de ecuaciones lineales con determinante D que no se anula.

Ejercicios 3.3d

1. Hallar los jacobianos de las transformaciones siguientes:

   (a) $\xi = ax + by, \qquad \eta = cx + dy$

   (b) $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \text{arc tan } y/x$

   (c) $\xi = x^2, \qquad \eta = y^2$

   (d) $\xi = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2), \qquad \eta = \text{arc tan } \dfrac{y}{x}$

   (e) $\xi = xy^2, \qquad \eta = x^2y$

   (f) $\xi = x^3 - y, \qquad \eta = y^3 + x.$

2. Para cada una de las transformaciones dadas en el Ejercicio 1, dar los puntos (x, y) que carecen de vecindades en donde la transformación tiene una inversa.
3. Encontrar el jacobiano de la transformación $\xi = f(x, y)$, $\eta = g(x, y)$, así como todas las derivadas parciales de x, y con respecto a ξ, η hasta las de segundo orden, en cada uno de los casos siguientes:

   (a) $\xi = e^x \cos y, \qquad \eta = e^x \operatorname{sen} y$

   (b) $\xi = x^2 - y^2, \qquad \eta = 2xy$

   (c) $\xi = \tan(x + y), \qquad \eta = \cos(x - y), \qquad -\pi/2 < x + y < \pi/2$

   (d) $\xi = \operatorname{senh} x + \cosh y, \qquad \eta = -\cosh x + \operatorname{senh} y$

   (e) $\xi = x^3 + y^3, \qquad \eta = xy^2.$

4. Se dice que una transformación es "conforme" (ver la p. 337) si se conserva el ángulo entre dos curvas cualesquiera.
   (a) Probar que la inversión

   $$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

   es una transformación conforme;

(b) probar que la inversa de cualquier círculo es otro círculo o una recta:
(c) encontrar el jacobiano de la inversión.

5. Sean K_1, K_2, K_3 tres círculos que pasan por 0 y que tienen intersecciones pareadas distintas, digamos P_1, P_2, P_3, en otros puntos. Demostrar que la suma de los ángulos del triángulo curvilíneo $P_1 P_2 P_3$, formado por arcos circulares, es π.
6. Probar que una transformación del plano

$$u = \varphi(x, y), \qquad v = \psi(x, y)$$

es conforme si las funciones φ y ψ satisfacen las identidades

$$\varphi_x = \psi_y, \qquad \varphi_y = -\psi_x.$$

7. Probar que si todas las normales de una superficie $z = u(x, y)$ cortan al eje z, entonces la superficie es una superficie de revolución.
8. La ecuación

$$\frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} = 1 \qquad (a > b)$$

determina dos valores de t que dependen de x y y:

$$t_1 = \lambda(x, y),$$
$$t_2 = \mu(x, y).$$

(a) Probar que las curvas $t_1 =$ constante y $t_2 =$ constante son elipses e hipérbolas que tienen todas los mismos focos (cónicas confocales).
(b) Probar que las curvas $t_1 =$ constante y $t_2 =$ constante son ortogonales.
(c) t_1 y t_2 pueden usarse como coordenadas curvilíneas (las llamadas coordenadas focales). Expresar x y y en términos de estas coordenadas.
(d) Expresar el jacobiano $\partial(t_1, t_2)/\partial(x, y)$ en términos de x y y.
(e) Encontrar la condición para que dos curvas, representadas paramétricamente en el sistema de coordenadas focales por las ecuaciones

$$t_1 = f_1(\lambda), \quad t_2 = f_2(\lambda) \qquad \text{y} \qquad t_1 = g_1(\mu), \quad t_2 = g_2(\mu)$$

sean ortogonales entre sí.

9. (a) Probar que la ecuación en t

$$\frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} + \frac{z^2}{c-t} = 1 \qquad (a > b > c)$$

tiene tres raíces reales distintas t_1, t_2, t_3, las cuales se encuentran respectivamente en los intervalos

$$-\infty < t < c, \quad c < t < b, \qquad b < t < a,$$

siempre que el punto (x, y, z) no se encuentre sobre de un plano coordenado.
(b) Probar que las tres superficies $t_1 =$ constante, $t_2 =$ constante, $t_3 =$ constante, que pasen por un punto arbitrario, son mutuamente ortogonales.

(c) Expresar x, y, z en términos de las coordenadas focales t_1, t_2, t_3.

10. Probar que la transformación del plano x, y dada por las ecuaciones

$$\xi = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

(a) es conforme;

(b) transforma las rectas que pasan por el origen y los círculos con el origen como centro en el plano x, y, en cónicas confocales $t =$ constante, dadas por

$$\frac{\xi^2}{t + 1/2} + \frac{\eta^2}{t - 1/2} = 1.$$

11. Para $\xi = f(x,y)$, $\eta = g(x,y)$, y $D = \partial(\xi,\eta)/\partial(x,y) \neq 0$, demostrar las identidades

(a) $\dfrac{\partial D}{\partial y} = \dfrac{\partial(\xi_y, \eta)}{\partial(x, y)} + \dfrac{\partial(\xi, \eta_y)}{\partial(x, y)}$,

(b) $$D^{-3}\,[\xi_x(\eta_{yy}\, D - \eta_y D_y) - \xi_y(\eta_{xy} D - \eta_y D_x)]$$
$$= D^{-3}\,[\eta_x(\xi_{yy} D - \xi_y D_y) - \eta_y(\xi_{xy} D - \xi_y D_x)].$$

e. Producto simbólico de aplicaciones

Empecemos con algunas observaciones acerca de la composición de transformaciones. Si la transformación

$$\xi = \phi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y) \tag{28a}$$

da una aplicación biunívoca de los puntos (x, y) de una región R sobre los puntos (ξ, η) de la región B en el plano ξ, η, y si las ecuaciones

$$u = \Phi(\xi, \eta), \qquad v = \Psi(\xi, \eta) \tag{28b}$$

dan una aplicación biunívoca de la región B sobre una región R' en el plano u, v, entonces se genera una aplicación biunívoca de R sobre R'. Naturalmente, esta aplicación se llama *aplicación o transformación resultante* y se dice que se obtiene por la composición de las dos aplicaciones dadas y que representa su *producto simbólico*. La transformación resultante está dada por las ecuaciones

$$u = \Phi(\phi(x, y), \psi(x, y)), \qquad v = \Psi(\phi(x, y), \psi(x, y));$$

de la definición, inmediatamente se deduce que esta aplicación es biunívoca.

Por medio de las reglas para derivar funciones compuestas, se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Phi_\xi \phi_x + \Phi_\eta \psi_x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \Phi_\xi \phi_y + \Phi_\eta \psi_y, \tag{29a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \Psi_\xi \phi_x + \Psi_\eta \psi_x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \Psi_\xi \phi_y + \Psi_\eta \psi_y. \tag{29b}$$

En notación matricial (p. 188).

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_\xi & \Phi_\eta \\ \Psi_\xi & \Psi_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{pmatrix} \tag{30}$$

Comparando ésto con la ley para la multiplicación de los determinantes (ver la p. 210), se encuentra[1] que el jacobiano de u y v con respecto a x y y es

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = (\Phi_\xi \Psi_\eta - \Phi_\eta \Psi_\xi)(\phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x). \tag{31a}$$

Es decir, *el jacobiano del producto simbólico de dos transformaciones es igual al producto de los jacobianos de las transformaciones individuales,* o sea, en la notación (25),

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \frac{d(u, v)}{d(\xi, \eta)} \frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)}. \tag{31b}$$

En esta ecuación se observa que el símbolo que se adoptó para los jacobianos es el adecuado. *Cuando se combinan transformaciones, los jacobianos se comportan de la misma manera que se comportan las derivadas cuando se combinan funciones de una variable.* El jacobiano de la transformación resultante difiere de cero siempre que se cumpla lo mismo para las transformaciones individuales (o componentes).

Si, en particular, la segunda transformación

$$u = \Phi(\xi, \eta), \qquad v = \Psi(\xi, \eta)$$

es la inversa de la primera,

$$\xi = \phi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y)$$

[1] Por supuesto se puede obtener el mismo resultado multiplicando directamente.

y si ambas transformaciones son diferenciables, la transformación resultante será sencillamente la transformación idéntica; ésto es, $u = x$, $v = y$. Obviamente, el jacobiano de esta última transformación es 1, de manera que nuevamente se obtiene la relación (26).

Incidentalmente, de ésto se deduce que ninguno de los dos jacobianos se puede anular:

$$\frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)} \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)} = 1.$$

Para una pareja de funciones continuamente diferenciables $\phi(x,y)$ y $\psi(x,y)$ que tienen un jacobiano que no se anula, pueden encontrarse fórmulas para la *aplicación de direcciones* correspondiente, en un punto $(x_0, y_0) = P_0$. Una curva que pasa por un punto P_0 puede describirse paramétricamente por medio de las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde $f(t_0) = x_0$, $g(t_0) = y_0$. La pendiente de la curva en P_0 está dada por

$$m = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}.$$

De modo semejante, la pendiente de la curva imagen

$$\xi = \varphi(f(t),g(t)), \qquad \eta = \psi(f(t),g(t))$$

en el punto correspondiente a P_0 es

$$\mu = \frac{d\eta/dt}{d\xi/dt} = \frac{\psi_x f' + \psi_y g'}{\phi_x f' + \phi_y g'} = \frac{c + dm}{a + bm}, \tag{32}$$

donde a, b, c, d son las constantes

$$a = \phi_x(x_0, y_0),\ b = \phi_y(x_0, y_0),\ c = \psi_x(x_0, y_0),\ d = \psi_y(x_0, y_0).$$

La relación (32) entre la pendiente m de la curva original en P_0 y la pendiente μ de la curva imagen es la misma que para la aplicación afin:

$$\xi = \phi(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

$$\eta = \psi(x_0, y_0) + c(x - x_0) + d(y - y_0).$$

que da una aproximación de la aplicación cerca de P_0. Dado que

$$\frac{d\mu}{dm} = \frac{ad - bc}{(a + bm)^2},$$

se encuentra que μ es una función creciente de m para $ad - bc > 0$ y una función decreciente para $ad - bc < 0$.[1].

Las pendientes crecientes corresponden a ángulos de inclinación crecientes o a una rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj de las direcciones correspondientes. De donde, $d\mu/dm > 0$ implica que se conserva el sentido de la rotación contrario al movimiento de las manecillas del reloj, mientras que se invierte cuando $d\mu/dm < 0$. Ahora bien, $ad - bc$ es precisamente el jacobiano

$$\frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}$$

evaluado en el punto P_0. Se concluye que *la aplicación* $\xi = \phi(x, y), \eta = \psi(x, y)$ *conserva o invierte las orientaciones cerca del punto* (x_0, y_0) *Según que el jacobiano en ese punto sea positivo o negativo.*

Ejercicios 3.3e

1. Para cada una de las siguientes parejas de transformaciones, encontrar $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ eliminando primero ξ y η, y, a continuación, aplicando (31b):

(a) $\begin{cases} u = \frac{1}{2}\log(\xi^2 + \eta^2) \\ v = \arctan\frac{\eta}{\xi} \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \xi = e^x \cos y \\ \eta = e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u = \xi^2 - \eta^2 \\ v = 2\xi\eta \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \xi = x\cos y \\ \eta = x \operatorname{sen} y \end{cases}$

(c) $\begin{cases} u = e^{\xi}\cos\eta \\ v = e^{\xi}\operatorname{sen}\eta \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \xi = x/(x^2 + y^2) \\ \eta = -y/(x^2 + y^2) \end{cases}$

2. ¿En cuáles de las transformaciones sucesivas siguientes pueden definirse x, y como funciones continuamente diferenciables de u, v en una vecindad del punto indicado (u_0, v_0)?

(a) $\xi = e^x \cos y,\ \eta = e^x \operatorname{sen} y;$
$u = \xi^2 - \eta^2,\ v = 2\xi\eta,\ u_0 = 1,\ v_0 = 0;$

(b) $\xi = \cosh x + \operatorname{senh} y,\ \eta = \operatorname{senh} x + \cosh y;$
$u = e^{\xi+\eta},\ v = e^{\xi-\eta},\ u_0 = v_0 = 1;$

(c) $\xi = x^3 - y^3,\ \eta = x^2 + 2xy^2;$
$u = \xi^5 + \eta,\ v = \eta^5 - \xi;\ u_0 = 1,\ v_0 = 0.$

---

[1]De modo más concreto, ésto se cumple localmente, excluyendo las direcciones donde m o μ se vuelven infinitas.

3. Considérese la transformación

$$\begin{cases} u = \varphi(\xi, \eta) \\ v = \psi(\xi, \eta) \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = f(x) \\ \eta = g(y). \end{cases}$$

Demostrar que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = f'(x)\, g'(y)\, \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)}.$$

4. Si $z = f(x, y)$ y $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, demostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial(z, \eta)}{\partial(x, y)} \Big/ \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x,y)}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial(\xi, z)}{\partial(x, y)} \Big/ \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}$$

siempre que $\partial(\xi, \eta)/\partial(x, y) \neq 0$.

f. Teorema general sobre la inversión de las transformaciones y de los sistemas de funciones implícitas. Descomposición en aplicaciones primitivas

La posibilidad de invertir una transformación depende del siguiente teorema general:

Sean $\phi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ funciones continuamente diferenciables en una vecindad de un punto (x_0, y_0), para las cuales el jacobiano $D = \phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x$ no es cero en (x_0, y_0). Póngase $u_0 = \phi(x_0, y_0)$, $v_0 = \psi(x_0, y_0)$. Entonces existen vecindades N de (x_0, y_0) y N' de (u_0, v_0) tales que la aplicación

$$u = \phi(x, y), \qquad v = \psi(x, y) \tag{33a}$$

tiene una inversa única

$$x = g(u, v), \qquad y = h(u, v) \tag{33b}$$

que aplica N' en N. Las funciones g y h satisfacen las identidades

$$u = \phi(g(u, v),\ h(u, v)), \qquad v = \psi(g(u, v),\ h(u, v)) \tag{33c}$$

para (u, v) en N', y las ecuaciones

$$x_0 = g(u_0, v_0), \qquad y_0 = h(u_0, v_0). \tag{33d}$$

Las funciones inversas g, h tienen derivadas continuas para (u, v) cerca de (u_0, v_0), dadas por

(33e) $$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{D}\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial y}$$

(33f) $$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{D}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

La demostración se deduce a partir del teorema de la función implícita dado en la p. 274, el cual permite resolver una ecuación para una sola variable. En esencia, se invierten las ecuaciones (33a) resolviendo la primera ecuación para una de las variables x, y y sustituyendo la expresión resultante en la segunda ecuación, obteniendose una ecuación para la segunda variable únicamente.

Como, por hipótesis, el jacobiano D no se anula en el punto (x_0, y_0), al menos una de las primeras derivadas de $\phi(x, y)$ es diferente de cero en ese punto. Supóngase, por ejemplo, que $\phi_x(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces se puede resolver la ecuación

(34a) $$u = \phi(x, y)$$

para x. Más precisamente, se pueden encontrar constantes positivas h_1, h_2, h_3 tales que, para

(34b) $$|u - u_0| < h_1, \quad |y - y_0| < h_2,$$

la ecuación (34a) tiene una solución única $x = X(u, y)$ para la cual $|x - x_0| < h_3$. La función $X(u, y)$ tiene el dominio (34b) y satisface las ecuaciones

(34c) $$\phi(X(u, y), y) = u, \quad X(u_0, y_0) = x_0,$$

y la desigualdad

(34d) $$|X(u, y) - x_0| < h_3.$$

Es más, $X(u, y)$ tiene derivadas continuas, para las cuales, por (34c),

(34e) $$\phi_x(X(u, y), y)X_u(u, y) = 1$$

(34f) $$\phi_x(X(u, y), y)X_y(u, y) + \phi_y(X(u, y), y) = 0.$$

Supóngase aquí que h_2, h_3 son tan pequeñas que el rectángulo

(34g) $$|x - x_0| < h_3, \quad |y - y_0| < h_2$$

queda en el dominio de $\phi(x, y)$, $\psi(x, y)$. Sustituyendo x por la expresión $X(u, y)$ en las funciones $\psi(x, y)$, se obtiene una función compuesta

$$\psi(X(u, y), y) = \chi(u, y) \tag{34h}$$

con el dominio (34b). Aquí, por (34c, f),

$$\chi(u_0, y_0) = \psi(x_0, y_0) = v_0 \tag{34i}$$

$$\chi_y(u_0, y_0) = \psi_x X_y + \psi_y = -\psi_x \frac{\phi_y}{\phi_x} + \psi_y = \frac{D}{\phi_x} \neq 0; \tag{34j}$$

por (34e), se tiene $\phi_x \neq 0$. Se concluye que pueden hallarse constantes positivas h_4, h_5, h_6 tales que, para

$$|u - u_0| < h_4, \quad |v - v_0| < h_5 \tag{34k}$$

la ecuación

$$\chi(u, y) = v \tag{34m}$$

tiene una solución única $y = h(u, v)$, para la cual $|y - y_0| < h_6$. Aquí se puede suponer que $h_4 \leqq h_1$, $h_6 \leqq h_2$ (ver la nota al pie de la p. 274).

Por último, hágase

$$X(u, h(u, v)) = g(u, v). \tag{34n}$$

Las dos funciones $g(u, v)$, $h(u, v)$ tienen el dominio (34k). Por (34c, h), satisfacen las ecuaciones

$$\phi(g(u, v), h(u, v)) = \phi(X(u, h(u, v)), h(u, v)) = u$$

$$\psi(g(u, v), h(u, v)) = \psi(X(u, h(u, v)), h(u, v)) = \chi(u, h(u, v)) = v$$

y las desigualdades

$$|g(u, v) - x_0| < h_3, \quad |h(u, v) - y_0| < h_6.$$

Las fórmulas (33e, f) para las derivadas de g y h se dedujeron con anterioridad, en la p. 300.

Con el fin de demostrar la unicidad de las funciones inversas, supóngase que x, y, u, v, es cualquier conjunto de valores que satisfacen las ecuaciones (33a) y las desigualdades

$$|x - x_0| < h_3, \quad |y - y_0| < h_6, \quad |u - u_0| < h_4, \quad |v - v_0| < h_5.$$

Como se cumplen (34a, b), se concluye que

(34o) $$x = X(u, y).$$

De (34h) se obtiene la ecuación

$$v = \psi(x, y) = \psi(X(u, y), y) = \chi(u, y),$$

la cual tiene la solución única $y = h(u, v)$. Entonces se deduce la relación $x = g(u, v)$ a partir de (34n, o). Las relaciones (33d) para g y h se deducen de la unicidad de la solución y de la suposición de que $u_0 = \phi(x_0, y_0), v_0 = \psi(x_0, y_0)$.

Hasta aquí se ha supuesto que $\phi_x(x_0, y_0) \neq 0$. Si $\phi_x(x_0, y_0) = 0$, pero $\phi_y(x_0, y_0) \neq 0$, la inversión de la aplicación 33a se lleva a cabo de modo semejante. En este caso, primero, se resuelve la ecuación de (33a) para h y se sustituye la función resultante $y = Y(u, x)$ en la segunda ecuación, obteniéndose una ecuación para x únicamente.

La inversión de la aplicación "plana" (33a) se ha reducido a inversiones de aplicaciones en las que sólo se transforma una variable cada vez. Generalmente, a la transformación (33a) se le da el nombre de *primitva* si deja invariante una de las coordenadas, es decir, si la función $\phi(x, y)$ es idéntica a x, o bien, la función $\psi(x,y)$ es idéntica a y. El efecto de una transformación primitiva del tipo $u = \phi(x, y)$, $v = y$ es el de mover cada punto en la dirección del eje x, manteniendo inalterada su ordenada. Después de la deformación el punto tiene una nueva abscisa, que depende tanto de x como de y. Si el jacobiano ϕ de la aplicación primitiva es positivo, u varía monótonamente con x para y fija.

Se probará que *una transformación arbitraria* (33a) *con jacobiano que no se anula se puede descomponer en transformaciones primitivas, en una vecindad de un punto*. Esto se deduce fácilmente a partir de la construcción dada de la aplicación inversa. Si $\phi_x(x_0, y_0) \neq 0$, la aplicación (33a) se representa como el producto simbólico de las aplicaciones primitivas

(34p) $$\xi = \phi(x, y), \qquad \eta = y$$

y

$$u = \xi, \qquad v = \chi(\xi, \eta). \tag{34q}$$

Aquí, el dominio R de la primera aplicación en el plano x, y será un rectángulo tan pequeño que

$$|x - x_0| < h_3, \quad |y - y_0| < h_2, \quad |\phi(x, y) - u_0| < h_1,$$

mientras que la segunda aplicación tiene el dominio

$$|\xi - u_0| < h_1, \quad |\eta - y_0| < h_2.$$

Se deduce que la imagen (ξ, η) de un punto (x, y) de R bajo la aplicación (34p) se encuentra en el dominio de la aplicación (34q), y que

$$x = X(\xi, y).$$

Consecuentemente, también

$$x = X(\phi(x, y), y). \tag{34r}$$

Entonces, por (34h, r), para la aplicación compuesta a partir de (34p, q) resulta

$$u = \phi(x, y)$$

$$v = \chi(\phi(x, y), y) = \psi(X(\phi(x, y), y), y) = \psi(x, y).$$

Se obtiene una descomposición análoga de la aplicación (33a) cuando $\phi_x(x_0, y_0) = 0$ pero $\phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. Unicamente se tienen que intercambiar los papeles de las variables x y y.

No es de esperar que una transformación se descomponga en transformaciones primitivas de una y en la misma manera en la totalidad de la región abierta R. Sin embargo, como cerca de cada punto de R puede llevarse a cabo algún tipo de descomposición, todo subconjunto cerrado acotado de R puede subdividirse en un número finito de conjuntos[1] tales que en cada uno de esos conjuntos sea posible una de las descomposiciones.

El teorema de inversión es un caso especial de un teorema más general que se puede considerar como una extensión del teorema de

[1] Esto se deduce a partir del teorema de la cobertura, p. 140.

las funciones implícitas a sistemas de funciones. El teorema de las funciones implícitas (p. 274) se aplica a la solución de una ecuación para una de las variables. El teorema general es como sigue:

Si $\phi(x, y, u, v, \ldots, w)$ *y* $\psi(x, y, u, v, \ldots, w)$ *son funciones continuamente diferenciables de* $x, y, u, v, \ldots, w$, *y las ecuaciones*

$$\phi(x, y, u, v, \ldots, w) = 0 \qquad \text{y} \qquad \psi(x, y, u, v, \ldots, w) = 0$$

son satisfechas por un cierto conjunto de valores $x_0, y_0, u_0, v_0, \ldots, w_0$ *y si, además, el jacobiano de* ϕ *y* ψ *con respecto a* x *y a* y *es diferente de cero en ese punto (es decir,* $D = \phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x \neq 0$*), entonces, en la vecindad de ese punto las ecuaciones* $\phi = 0$ *y* $\psi = 0$ *pueden resolverse de una, y sólo una manera para* x *y* y*, y esta solución da a* x *y a* y *como funciones continuamente diferenciables de* $u, v, \ldots, w$.

La demostración de este teorema es semejante a la del teorema de inversión anterior. A partir de la hipótesis de que $D \neq 0$ puede concluirse que en el punto en cuestión no se anula alguna derivada parcial, digamos $\phi_x = 0$. Por el teorema principal de la p. 274, si se restringen $x, y, u, v, \ldots, w$ a intervalos lo suficientemente pequeños alrededor de $x_0, y_0, u_0, v_0, \ldots, w_0$, respectivamente, se puede resolver la ecuación $\phi(x, y, u, v, \ldots, w) = 0$ en exactamente una forma, para x como una función de las otras variables; esta solución $x = X(y, u, v, \ldots, w)$ es una función continuamente diferenciable de sus argumentos y tiene la derivada parcial $X_y = -\phi_y/\phi_x$. Si se sustituye esta función $x = X(y, u, v, \ldots, w)$ en $\psi(x, y, u, v, \ldots, w)$, se obtiene una función $\psi(x, y, u, v, \ldots, w) = \chi(y, u, v, \ldots, w)$, y

$$\chi_y = -\psi_x \frac{\phi_y}{\phi_x} + \psi_y = \frac{D}{\phi_x}.$$

De aquí, en virtud de la suposición de que $D \neq 0$, se ve que la derivada χ_y no es cero. De donde, si se restringen $y, u, v, \ldots, w$ a intervalos alrededor de $y_0, u_0, v_0, \ldots w_0$ contenidos en los intervalos a los cuales fueron previamente restringidas, se puede resolver la ecuación $\chi = 0$ en exactamente una manera para y como una función de $u, y, \ldots, w$, y esta solución es continuamente diferenciable. Sustituyendo esta expresión para y en la ecuación $x = X(y, u, v, \ldots, w)$, se encuentra x como una función de $u, v, \ldots, w$. Esta solución es única y continuamente diferenciable, sujeta a la restricción de tener $x, y, u, v, \ldots, w$ en intervalos lo suficientemente pequeños alrededor de $x_0, y_0, u_0, v_0, \ldots, w_0$, respectivamente.

Ejercicios 3.3f

1. ¿Cuáles de los siguientes sistemas de ecuaciones pueden resolverse para x, y como funciones continuamente diferenciables de las variables restantes, cerca de los puntos indicados?

   (a) $e^x \operatorname{sen} u - e^y \cos v + w = 0$
   $x \cosh w - u \operatorname{senh} y - v^2 = \cosh 1$
   $x = 1, y = 0, u = 0, v = 0, w = 1$

   (b) $u \cos x - v \operatorname{sen} y + w^2 = 1$
   $\cos (x + y) + v = 1,$
   $x = 0, y = \pi/2, u = 1, v = 1, w = 1$

   (c) $x^2 + y^2 + u^2 - v = 0$
   $x^2 - y^2 + 2u - 1 = 0$
   $x = y = u = v = 1$

   (d) $\cos x + t \operatorname{sen} y = 0$
   $\operatorname{sen} x - \cos ty = 0,$
   $x = \pi, y = \pi/2, t = 1.$

g. *Construcción alternativa de la aplicación inversa por el método de las aproximaciones sucesivas*

En la demostración anterior el problema de invertir una aplicación se redujo al caso unidimensional y, por último, al hecho elemental de que las aplicaciones proporcionadas por funciones monótonas continuas de una sola variable pueden invertirse. Esta hilación del argumento tiene dos características indeseables. Nos vemos forzados a distinguir casos diferentes que conducen a resoluciones bastante diferentes (digamos, para $\phi_x \neq 0$ y $\phi_x = 0$), los cuales no corresponden a cambio radical alguno en el carácter de la transformación original. Además, la demostración de la existencia *no es constructiva;* no proporciona un esquema numérico práctico para invertir las aplicaciones. Estas dos características objetables no se presentan en el método de interacción o de aproximaciones sucesivas, que siguen el patrón de los métodos numéricos dados en el Volumen I (p. 502) para la solución de ecuaciones para una sola cantidad desconocida. La idea básica es la de aplicar correcciones sucesivas a una solución aproximada, donde las correcciones se determinan a partir de las *ecuaciones lineales* que aproximen mejor la relación funcional en una vecindad de un punto.

Considérense nuevamente las ecuaciones

$$u = \phi(x, y), \quad v = \psi(x, y), \tag{35a}$$

donde ϕ y ψ son funciones continuamente diferenciables en un conjunto abierto R del plano x, y. Sea (x_0, y_0) un punto de R en el cual el jacobiano

$$\begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \tag{35b}$$

tiene un valor diferente de cero, y sea (u_0, v_0) la imagen de (x_0, y_0) bajo la aplicación (35a). Se desea demostrar que, para (u, v) lo suficientemente próximo a (u_0, v_0), existe un valor (x, y) determinado de modo único, cerca de (x_0, y_0), para el cual $u = \phi(x, y)$ y $v = \psi(x, y)$.

Para obtener la solución se usará un esquema de iteración idéntico al usado para las funciones de una variable y que se discutió en el Volumen I (p. 502), en una notación apropiada para el caso bidimensional. Introducimos los vectores $\mathbf{U} = (u, v)$, $\mathbf{X} = (x, y)$. La aplicación (35a) puede escribirse de manera concisa en la forma

$$\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \tag{35c}$$

donde $\mathbf{F}$ es la transformación no lineal que aplica el vector con componentes x, y sobre el vector con componentes $\phi(x, y)$, $\psi(x, y)$. Las diferenciales dx, dy y du, dv satisfacen las relaciones lineales (ver la p. 77)

$$du = d\phi = \phi_x\, dx + \phi_y\, dy \tag{35d}$$

$$dv = d\psi = \psi_x\, dx + \psi_y\, dy. \tag{35e}$$

Si se combinan las diferenciales en los vectores $d\mathbf{X} = (dx, dy)$, $d\mathbf{U} = (du, dv)$, las relaciones (34d, e) pueden escribirse[1] como

$$d\mathbf{U} = \mathbf{F}'\, d\mathbf{X}, \tag{35f}$$

donde $\mathbf{F}'$ es la matriz cuadrada formada a partir de las primeras derivadas de las funciones de aplicación

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{pmatrix}. \tag{35g}$$

[1]Es mejor interpretar (35f) como una relación entre las tres matrices $d\mathbf{U}, \mathbf{F}', d\mathbf{X}$, identificando a $d\mathbf{X}$ y a $d\mathbf{U}$ con las matrices con dos filas y una sola columna:

$$d\mathbf{X} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \qquad d\mathbf{U} = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix};$$

ver la p. 189

Obviamente, la matriz $\mathbf{F}'$ *desempeña el papel de la derivada de la función vectorial de aplicación* $\mathbf{F}$. El determinante de $\mathbf{F}'$ es precisamente el jacobiano (35b) de la aplicación.[1] Generalmente se escribirá $\mathbf{F}' = \mathbf{F}'(\mathbf{X})$ para hacer hincapié en la dependencia de la matriz $\mathbf{F}'$ con relación al vector $\mathbf{X} = (x, y)$. Para una aplicación lineal la matriz $\mathbf{F}'$ es constante.

La "magnitud" de los elementos de la matriz $\mathbf{F}'$ limita cuánto puede amplificar las distancias la matriz $\mathbf{F}$. Tómense dos puntos (x, y) y $(x + h, y + k)$, tales que el segmento rectilíneo que los une se encuentre por completo en el dominio de la aplicación. Por el teorema del valor medio para las funciones de varias variables (p. 95).

$$
\begin{aligned}
&\phi(x + h, y + k) - \phi(x, y) = \phi_x h + \phi_y k,\\
(36)\qquad &\\
&\psi(x + h, y + k) - \psi(x, y) = \psi_x h + \psi_y k,
\end{aligned}
$$

donde los valores de las primeras derivadas se toman en puntos apropiados del segmento que une (x, y) y $(x + h, y + k)$.[2] Denotemos por M una cota superior para las cantidades

$$|\phi_x|, \quad |\phi_y|, \quad |\psi_x|, \quad |\psi_y|$$

tomadas en todos lo puntos del segmento que une a (x, y) con $(x + h, y + k)$. Entonces, obviamente, la distancia entre los puntos imagen puede estimarse por medio de

$$
\begin{aligned}
(36a)\quad &\sqrt{(\phi(x + h, y + k) - \phi(x, y))^2 + (\psi(x + h, y + k) - \psi(x, y))^2}\\
&\leqq \sqrt{(M|h| + |M|k)^2 + (M|h| + |M|k)^2}\\
&= \sqrt{2}\, M(|h| + |k|) \leqq 2M\sqrt{h^2 + k^2}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, la distancia entre los puntos imagen es cuando más $2M$ veces la distancia entre los originales. Introduciendo el vector $\mathbf{Y} = (x + h, y + k)$ se puede escribir (36a) en la forma de una condición de Lipschitz para la aplicación $\mathbf{F}$:

[1] A menudo se da el nombre de *matriz jacobiana* o *derivada de Fréchet de la aplicación a* $\mathbf{F}'$.

[2] Generalmente se tiene que usar un punto intermedio diferente en la primera y en la segunda ecuación.

$$|\mathbf{F}(\mathbf{Y}) - \mathbf{F}(\mathbf{X})| \leqq 2M|\mathbf{Y} - \mathbf{X}|, \tag{36b}$$

donde M es una cota superior para los valores absolutos de los elementos de la matriz $\mathbf{F}'$.[1] En notación matricial las ecuaciones (36) se convierten en

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}) - \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(\mathbf{Y} - \mathbf{X}), \tag{36c}$$

donde la matriz $\mathbf{H}$ satisface

$$\lim_{Y\to X} \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{F}'(\mathbf{X}). \tag{36d}$$

Considérese ahora la aplicación $\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ en una vecindad

$$|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| < \delta \tag{37a}$$

del punto $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0)$ en el dominio R de $\mathbf{F}$. Sea $\mathbf{U}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = (u_0, v_0)$. Para un $\mathbf{U}$ fijo escríbase la ecuación $\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, la cual debe resolverse para $\mathbf{X}$, en la forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}(\mathbf{X}), \tag{37b}$$

donde

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{a}(\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{X})); \tag{37c}$$

aquí $\mathbf{a}$ representa una matriz constante no singular, elegida apropiadamente, la cual tiene una recíproca $\mathbf{a}^{-1}$. Entonces, la ecuación (37b) es equivalente a $\mathbf{a}(\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{X})) = 0$, la cual, multiplicando por $\mathbf{a}^{-1}$, da

$$\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a}(\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{X})) = \mathbf{e}(\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{X})) = \mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0,$$

donde $\mathbf{e}$ es la matriz unidad. De donde, cualquier solución $\mathbf{X}$ de (37b)—es decir, cualquier *punto fijo de la aplicación* $\mathbf{G}$—proporciona una solución de $\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$.

Se demostrará que una solución $\mathbf{X}$ de (37b) está dada por el límite de los $\mathbf{X}_n$ definidos por la fórmula de recurrencia

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{X}_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{37d}$$

[1]Para las aplicaciones $\mathbf{F}$ en n dimensiones se debe remplazar el factor 2 en (36b) por n.

siempre que la matriz $\mathbf{G}'(\mathbf{X})$ que representa la derivada de la aplicación vectorial $\mathbf{G}$ tenga una magnitud lo suficientemente pequeña. Más precisamente, se requiere que, para todo $\mathbf{X}$ en la vecindad (37a) de $\mathbf{X}_0$, el elemento máximo de la matriz $\mathbf{G}'$ sea menor que 1/4 en valor absoluto y que

$$|\mathbf{G}(\mathbf{X}_0) - \mathbf{X}_0| < \frac{1}{2}\delta.$$

Primero se probará por inducción que, bajo las hipótesis establecidas, la fórmula de recurrencia (37d) sólo conduce a vectores que satisfacen (37a). De esta manera se asegura que los $\mathbf{X}_n$ se encuentran en el dominio de $\mathbf{G}$, de modo que la sucesión puede continuarse indefinidamente. De (36b) se encuentra, con $M = \frac{1}{4}$, que

$$(37e)\quad |\mathbf{G}(\mathbf{Y}) - \mathbf{G}(\mathbf{X})| \leqq \frac{1}{2}|\mathbf{Y} - \mathbf{X}| \text{ para } |\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| < \delta,\ |\mathbf{Y} - \mathbf{X}_0| < \delta.$$

Ahora bien, la desigualdad (37a) es satisfecha trivialmente por $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$. Si se cumple para $\mathbf{X} = \mathbf{X}_n$, se encuentra, para el vector $\mathbf{X}_{n+1}$ definido por (37d), que

$$|\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_0| \leqq |\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_1| + |\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0| = |\mathbf{G}(\mathbf{X}_n) - \mathbf{G}(\mathbf{X}_0)| + |\mathbf{G}(\mathbf{X}_0) - \mathbf{X}_0| \leqq \frac{1}{2}|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_0| + \frac{1}{2}\delta < \delta.$$

Esto prueba que $|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_0| < \delta$ para toda n.

Para ver que los $\mathbf{X}_n$ convergen obsérvese que, por (37e),

$$|\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n| = |\mathbf{G}(\mathbf{X}_n) - \mathbf{G}(\mathbf{X}_{n-1})| \leqq \frac{1}{2}|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}|.$$

Por el mismo razonamiento,

$$|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}| \leqq \frac{1}{2}|\mathbf{X}_{n-1} - \mathbf{X}_{n-2}|,$$

$$|\mathbf{X}_{n-1} - \mathbf{X}_{n-2}| \leqq \frac{1}{2}|\mathbf{X}_{n-2} - \mathbf{X}_{n-3}|,$$

y así sucesivamente. Estas desigualdades en conjunto conducen a la estimación

$$(37f)\qquad |\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n| \leqq \frac{1}{2^n}|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0| \leqq \frac{\delta}{2^{n+1}}.$$

Entonces, se concluye la existencia de $\mathbf{X} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{X}_n$ escribiendo $\mathbf{X}$ como la suma de una serie infinita

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) + (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) + \cdots + (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n) + \cdots,$$

cuya convergencia se establece a partir de (37f) por *comparación* (ver el Volumen I, p. 521) con una serie geométrica convergente. Que $\mathbf{X}$ es una solución de (37b) se deduce inmediatamente de (37d) cuando $n \to \infty$, aplicando la continuidad de $\mathbf{G}(\mathbf{X})$.

Por su definición (37c), la función $\mathbf{G}$ depende continuamente no sólo de $\mathbf{X}$ sino también del vector $\mathbf{U}$. Entonces, los $\mathbf{X}_n$ obtenidos sucesivamente por medio de la fórmula de recurrencia (37d) también dependen continuamente de $\mathbf{U}$.[1] Dado que la serie geométrica usada en la comparación que establece la convergencia de $\mathbf{X} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{X}_n$ no depende de $\mathbf{U}$, se concluye que $\mathbf{X}$ es un *límite uniforme de funciones continuas de* $\mathbf{U}$ y de aquí que él mismo es una función continua de $\mathbf{U}$. Además, es evidente que $|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| \leqq \delta$, dado que $|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}| < \delta$ para toda n. Si existiera una segunda solución $\mathbf{Y}$, con $\mathbf{Y} = \mathbf{G}(\mathbf{Y})$ y $|\mathbf{Y} - \mathbf{X}_0| \leqq \delta$, de (37$c$) se encontraría que

$$|\mathbf{Y} - \mathbf{X}| = |\mathbf{G}(\mathbf{Y}) - \mathbf{G}(\mathbf{X})| \leqq \frac{1}{2}|\mathbf{Y} - \mathbf{X}|$$

y, de aquí, que $|\mathbf{Y} - \mathbf{X}| = 0$ y $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$.

De esta manera se establece la existencia, unicidad y continuidad de una solución $\mathbf{X}$ de la ecuación $\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, para la cual $|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| \leqq \delta$, *siempre que* el vector $\mathbf{G}$ definido por (37c) tenga una derivada $\mathbf{G}'$ con elementos menores que $\frac{1}{4}$ en valor absoluto para $|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| \leqq \delta$, y siempre que

$$|\mathbf{G}(\mathbf{X}_0) - \mathbf{X}_0| < \frac{1}{2}\delta.$$

Se ve con facilidad que se pueden satisfacer los requisitos para todo $\mathbf{U}$ lo suficientemente próximo a $\mathbf{U}_0$, eligiendo apropiadamente la matriz $\mathbf{a}$. Por (37c),

$$\mathbf{G}'(\mathbf{X}) = \mathbf{e} - \mathbf{a}\mathbf{F}'(\mathbf{X}),$$

donde $\mathbf{e}$ es la matriz unidad. Entonces, para $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$,

$$\mathbf{G}'(\mathbf{X}_0) = \mathbf{e} - \mathbf{a}\mathbf{F}'(\mathbf{X}_0) = \mathbf{O},$$

[1]Aquí se aplica el hecho de que funciones continuas de funciones continuas son también continuas.

si se elige como $\mathbf{a}$ la matriz recíproca a la matriz $\mathbf{F}'(\mathbf{X}_0)$:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{F}'(\mathbf{X}_0))^{-1}.$$

(La existencia de esta recíproca se deduce a partir de la hipótesis básica de que la matriz $\mathbf{F}'(\mathbf{X}_0)$ tiene un determinante que no se anula; es decir, que el jacobiano de la aplicación $\mathbf{F}$ no se anula en el punto $\mathbf{X}_0$). Con base en la continuidad supuesta de las primeras derivadas de la aplicación $\mathbf{F}$, se concluye que $\mathbf{G}'(\mathbf{X})$ depende continuamente de $\mathbf{X}$; de aquí que los elementos de $\mathbf{G}'(\mathbf{X})$ son arbitrariamente pequeños (por ejemplo, menores que $\frac{1}{4}$,) para $|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|$, lo suficientemente pequeño, digamos, para

$$|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| \leqq \delta;$$

además, por (37c),

$$|\mathbf{G}(\mathbf{X}_0) - \mathbf{X}_0| = |\mathbf{a}(\mathbf{U} - \mathbf{F}(\mathbf{X}_0)| = |\mathbf{a}(\mathbf{U} - \mathbf{U}_0)| < \frac{1}{2}\,\delta,$$

siempre que $\mathbf{U}$ esté en una vecindad lo suficientemente pequeña de $\mathbf{U}_0$.

Esto completa la demostración para la existencia local de una inversa continua de una aplicación continuamente diferenciable con jacobiano que no se anula. La existencia y continuidad de las primeras derivadas de la aplicación inversa se deducen fácilmente de las fórmulas (36c, d). Sea $\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, donde se supone que la matriz jacobiana $\mathbf{F}'(\mathbf{X})$ es no singular. Entonces todo $\mathbf{V}$ lo suficientemente próximo a $\mathbf{U}$ es de la forma $\mathbf{V} = \mathbf{F}(\mathbf{Y})$, donde $\mathbf{Y}$ tiende a $\mathbf{X}$ cuando $\mathbf{V}$ tiende a $\mathbf{U}$. De aquí que, para $\mathbf{V}$ lo suficientemente próximo a $\mathbf{U}$, la matriz $\mathbf{H}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ también es no singular. Entonces se encuentra que

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} - \mathbf{X} &= (\mathbf{H}(\mathbf{X},\mathbf{Y}))^{-1}\,(\mathbf{V} - \mathbf{U})\\ &= (\mathbf{F}'(\mathbf{X}))^{-1}\,(\mathbf{V} - \mathbf{U}) + \mathbf{E}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\,(\mathbf{V} - \mathbf{U})\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{V \to U} \mathbf{E}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \lim_{Y \to X} \mathbf{E}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = 0.$$

Empero, esta relación expresa precisamente que el vector $\mathbf{X}$ que satisface $\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ es una función diferenciable del vector $\mathbf{U}$, y que la matriz jacobiana de $\mathbf{X}$ con respecto a $\mathbf{U}$ es la recíproca de la matriz $\mathbf{F}'(\mathbf{X})$. Obviamente, puede aplicarse la misma construcción de la inversa, por medio de *interacción* o *aproximaciones sucesivas,* a aplicaciones en cualquier número de dimensiones.

Ejercicios 3.3g

1. Obtener la aproximación iterativa (x_2, y_2) para la transformación inversa de:

$$u = \frac{1}{2}\,({}^2x - y^2),\; v = xy$$

aplicando (37d) a una vecindad de $\mathbf{X} = (1, 1)$, o bien, $\mathbf{U} = (0, 1)$.
2. Comparar el resultado del ejercicio anterior con los desarrollos de Taylor de x y y hasta el segundo orden en la vecindad de $u = 1$, $v = 1$.

h. Funciones dependientes

Si el jacobiano D se anula en un punto (x_0, y_0), no puede hacerse proposición general alguna acerca de la posibilidad de resolver las ecuaciones (33a) en la vecindad de ese punto. Incluso si se tiene que las funciones inversas existen, éstas no pueden ser diferenciables, porque entonces el producto

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} \cdot \frac{d(x, y)}{d(u, v)}$$

se anularía, mientras que por lo expuesto en la p. 306 debe ser igual a 1. Por ejemplo, las ecuaciones

$$u = x^3, \qquad v = y$$

se pueden resolver de modo único en la forma

$$x = \sqrt[3]{u}, \qquad y = v,$$

aunque el jacobiano se anula en el origen; pero la función $\sqrt[3]{u}$ no es diferenciable en el origen.

Por otra parte, las ecuaciones

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy$$

no se pueden resolver de modo único en la vecindad del origen, dado que los dos puntos (x, y) y $(-x, -y)$ del plano x, y, corresponden al mismo punto del plano u, v.

Si el jacobiano se anula idénticamente, no sólo en el punto (x, y) sino en todo punto de una vecindad completa de (x, y), entonces se dice que la transformación es *degenerada*. En este caso, se puede demostrar que las funciones

$$u = \phi(x, y) \qquad \text{y} \qquad v = \psi(x, y)$$

son dependientes, en el sentido de que una de ellas es una función de la otra.[1] Primero se considerará el caso trivial en el que las ecuaciones $\phi_x = 0$ y $\phi_y = 0$ se cumplen en todo punto, de modo que la función $\phi(x, y)$ es una constante. Entonces se ve que mientras que el punto (x, y) varía sobre toda una región, su imagen (u, v) permanece siempre sobre la recta $u =$ constante. Es decir, una región se aplica en una sola recta, en lugar de sobre otra región, de modo que no existe posibilidad de una aplicación biunívoca entre dos regiones bidimensionales.

Surge una situación semejante en el caso general en el que al menos una de las derivadas ϕ_x o ϕ_y no se anula pero el jacobiano D aún es cero. Supóngase que en un punto (x_0, y_0) de la región bajo consideración se tiene $\phi_x \neq 0$. Entonces es posible resolver la primera ecuación para x en la forma $x = X(u, y)$ y escribir $v = \psi(X(u, y), y) = \chi(u, y)$, precisamente como en la p. 309, porque allí sólo se hizo uso de la suposición de que $\phi_x \neq 0$. No obstante, en virtud de (34j) y la ecuación $D = 0$, χ_y debe ser idénticamente 0 en la región donde $\phi_x \neq 0$; ésto es, la cantiad $\chi = v$ no depende de y en lo absoluto y v es una función únicamente de u. Entonces, se concluye que si el jacobiano de la transformación se anula idénticamente, una región del plano x, y es aplicada por medio de la transformación sobre una curva en el plano u, v, en lugar de sobre una región, porque en un cierto intervalo de valores de u sólo un valor de v corresponde a cada valor de u. Así, si el jacobiano se anula idénticamente, las funciones no son independientes; es decir, existe una relación

$$F(\varphi, \psi) = \psi - \chi(\varphi) = 0$$

que es satisfecha por todos los sistemas de valores (x, y) en la región. Recíprocamente, si existe una curva en el plano u, v sobre la cual se aplica la región del plano x, y, entonces, para todos los puntos de esta región el jacobiano $D = \phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x$ debe anularse idénticamente,

[1] La anulación del jacobiano también es equivalente a la *dependencia de los vectores* (ϕ_x, ϕ_y) y (ψ_x, ψ_y) formados por las primeras derivadas de las funciones de aplicación.

ya que es obvio que la aplicación no se puede invertir en una vecindad completa de un punto.

Obviamente, el caso excepcional que se discutió por separado al principio está incluído en esta proposición general. La curva en cuestión es precisamente la curva $u =$ constante, la cual es paralela al eje v.

Un ejemplo de una transformación degenerada es

$$\xi = x + y, \qquad \eta = (x + y)^2.$$

En esta transformación todos los puntos del plano x, y se aplican sobre los puntos de la parábola $\eta = \xi^2$ en el plano ξ, η. Invertir la transformación está fuera de la cuestión, porque todos los puntos de la recta $x + y =$ constante se aplican sobre un solo punto (ξ, η). Como se puede verificar fácilmente, el valor del jacobiano es 0. La relación entre las funciones ξ y η, de acuerdo con el teorema general, está dada por la ecuación

$$F(\xi, \eta) = \xi^2 - \eta = 0.$$

Ejercicios 3.3h

1. Dar un ejemplo de una pareja de funciones continuamente diferenciables $\xi = f(x, y), \eta = g(x, y)$ que sean independientes en una región y no independientes en otra.
2. Probar que si $\xi = ax + by + c$ y $\eta = \alpha x + \beta y + \gamma$ son dependientes, las rectas $\xi = 0$ y $\eta = 0$ son paralelas.

i. Observaciones finales

La generalización de la teoría al caso de tres o más variables independientes no presenta dificultades particulares. La diferencia principal es que en lugar del determinante D de dos filas se tienen determinantes con tres o más filas. En el caso de transformaciones con tres variables independientes

$$\xi = \phi(x, y, z), \qquad \eta = \psi(x, y, z), \qquad \zeta = \chi(x, y, z),$$

$$x = g(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = h(\xi, \eta, \zeta), \qquad z = l(\xi, \eta, \zeta),$$

el jacobiano está dado por la ecuación

$$D = \frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{d(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \phi_x & \psi_x & \chi_x \\ \phi_y & \psi_y & \chi_y \\ \phi_z & \psi_z & \chi_z \end{vmatrix}$$

De la misma manera, para las transformaciones

$$\xi_i = \phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$x_i = g_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

con n variables independientes, el jacobiano es

$$\frac{d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Para más de dos variables independientes aún se cumple que cuando se componen las transformaciones sus jacobianos se multiplican entre sí. En símbolos,

$$\frac{d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{d(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)} \cdot \frac{d(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

En particular, el jacobiano de la transformación inversa es el recíproco del jacobiano de la transformación original.

Los teoremas acerca de la resolución y composición de transformaciones, acerca de la inversión de una transformación y acerca de la dependencia de las transformaciones, siguen siendo válidos para tres o más variables independientes. Las demostraciones son semejantes a las del caso $n = 2$; para evitar la repetición innecesaria; se omiten. Lo mismo se cumple para la construcción de la aplicación inversa por el método de iteración.

En la sección precedente se vio que, en muchos aspectos, el comportamiento de una transformación general se semeja al de una transformación afín, y que el jacobiano desempeña el mismo papel que el determinante en el caso de una transformación afín. La observación que sigue aclarará aún más ésto. Dado que las funciones $\xi = \phi(x, y)$ y

$\eta = \psi(x, y)$ son diferenciables en la vecindad de (x_0, y_0), se pueden expresar en la forma

$$\xi - \xi_0 = (x - x_0)\phi_x(x_0, y_0) + (y - y_0)\phi_y(x_0, y_0) + \varepsilon\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$\eta - \eta_0 = (x - x_0)\psi_x(x_0, y_0) + (y - y_0)\psi_y(x_0, y_0) + \delta\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

donde ε y δ tienden a cero con

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Esto demuestra que para valores lo suficientemente pequeños de $|x - x_0|$ y $|y - y_0|$, la transformación se puede representar en forma aproximada por medio de la transformación afín

$$\xi = \xi_0 + (x - x_0)\phi_x(x_0, y_0) + (y - y_0)\phi_y(x_0, y_0),$$

$$\eta = \eta_0 + (x - x_0)\psi_x(x_0, y_0) + (y - y_0)\psi_y(x_0, y_0),$$

cuyo determinante es el jacobiano de la transformación original.

Ejercicios 3.3i

1. Evaluar $\partial(\xi, \eta, \rho)/\partial(x, y, z)$ para cada uno de los casos que siguen:

(a) $\xi = e^x \cos y \cos z$
$\eta = e^x \cos y \operatorname{sen} z$
$\rho = e^x \operatorname{sen} y$

(b) $\xi = \cos(x + y) + \cos(y + z)$
$\eta = \cos(x + y) + \operatorname{sen}(y + z)$
$\rho = \operatorname{sen}(x + y) + \cos(y + z)$

(c) $\xi = \cosh x + \log y$
$\eta = \tanh y - \operatorname{senh} z$
$\rho = x - y^z$

(d) $\xi = x \cos y \operatorname{sen} z$
$\eta = x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$
$\rho = x \cos z$

(e) $\xi = x \cos y$
$\eta = x \operatorname{sen} y$
$\rho = z.$

2. Definir la dependencia de las funciones $\xi = f(x, y, z)$, $\eta = g(x, y, z)$, ρ

asegurar que las ecuaciones en realidad representan una superficie, sólo se tiene que suponer que los tres jacobianos

$$\text{(39b)} \qquad \begin{vmatrix} \psi_u & \psi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \chi_u & \chi_v \\ \phi_u & \phi_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \phi_u & \phi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}$$

no se anulan al mismo tiempo; en una sola fórmula, se requiere que

$$\text{(39c)} \qquad (\phi_u\psi_v - \phi_v\psi_u)^2 + (\psi_u\chi_v - \psi_v\chi_u)^2 + (\chi_u\phi_v - \chi_v\phi_u)^2 > 0.$$

Entonces, en alguna vecindad de cada punto en el espacio, representado por (39a), sin duda es posible expresar una de las tres coordenadas en términos de las otras dos.

Resulta ventajoso remplazar las tres ecuaciones en la representación paramétrica (39a) por una sola ecuación vectorial

$$\text{(40a)} \qquad \mathbf{X} = \Phi(u, v),$$

donde $\mathbf{X} = (x, y, z)$ es el *vector de posición* de un punto de la superficie y Φ denota al vector

$$\Phi(u, v) = (\phi(u, v),\ \psi(u, v),\ \chi(u, v)).$$

En cada punto de la superficie con parámetros u, v se pueden formar las *derivadas parciales del vector de posición*

$$\text{(40b)} \qquad \mathbf{X}_u = (\phi_u, \psi_u, \chi_u) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{X}_v = (\phi_v, \psi_v, \chi_v).$$

Entonces la diferencial total del vector $\mathbf{X}$ es [ver la fórmula (15b), p. 77].

$$\text{(40c)} \qquad d\mathbf{X} = (dx, dy, dz) = \mathbf{X}_u\, du + \mathbf{X}_v\, dv.$$

Los tres determinantes (39b) son precisamente los componentes del producto vectorial $\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v$ de los vectores $\mathbf{X}_u$ y $\mathbf{X}_v$ (ver la p. 221). La expresión a la izquierda en (39c) representa el cuadrado de la longitud del vector $\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v$, de modo que la condición (39c) es equivalente a

$$\text{(40d)} \qquad \mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v \neq 0.$$

Por ejemplo, la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ de radio r se representa paramétricamente por medio de las ecuaciones

$$\text{(40e)} \qquad x = r \cos u \operatorname{sen} v, \qquad y = r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \qquad z = r \cos v$$
$$(0 \leqq u < 2\pi, \quad 0 \leqq v \leqq \pi),$$

donde $v = \theta$ es la "inclinación polar" y $u = \phi$ es la "longitud" del punto sobre la esfera (ver la p. 250).

Este ejemplo pone de manifiesto una de las ventajas de la representación paramétrica. Las tres coordenadas se dan explícitamente como funciones de u y v, y estas funciones son uniformes. Si v varía desde $\pi/2$ hasta π, se obtiene el hemisferio inferior, es decir,

$$z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2},$$

mientras que los valores de v desde 0 hasta $\pi/2$ dan el hemisferio superior. Por tanto, para la representación paramétrica no es necesario, como lo es para la representación

$$z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2},$$

considerar dos ramas uniformes de la función para obtener la esfera completa.

Se obtiene otra representación paramétrica de la esfera por medio de la *proyección estereográfica* (ver el Volumen I, p. 21). Para proyectar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, estereográficamente desde el polo norte $(0, 0, r)$ sobre el plano ecuatorial $z = 0$, se une cada punto de la superficie con el polo norte (N) por medio de una recta, y a la intersección de esta recta con el plano ecuatorial se le da el nombre de *imagen estereográfica* del punto correspondiente de la esfera (Fig. 3.12). Así se obtiene una correspondencia biunívoca entre los puntos de la esfera y los puntos del plano, excepto para el polo norte N. Aplicando geometría elemental fácilmente se encuentra que esta correspondencia se expresa por medio de las fórmulas

$$\text{(40f)} \quad x = \frac{2r^2u}{u^2 + v^2 + r^2}, \quad y = \frac{2r^2v}{u^2 + v^2 + r^2}, \quad z = \frac{(u^2 + v^2 - r^2)r}{u^2 + v^2 + r^2},$$

donde (u, v) son las coordenadas rectangulares del punto imagen en el plano. Estas ecuaciones se pueden considerar como una representación paramétrica de la esfera, siendo los parámetros u y v las coordenadas rectangulares en el plano u, v.

Como un ejemplo más, se darán las representaciones paramétricas de las superficies

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

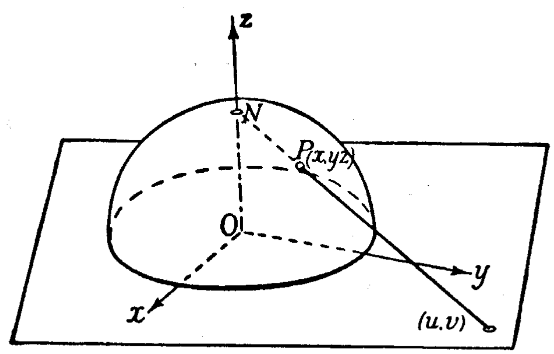

Figura 3.12 Proyección estereográfica de la esfera.

los cuales se conocen como *hiperboloide de un manto* e *hiperboloide de dos mantos,* respectivamente (ver las Figs. 3.13 y 3.14). El hiperboloide de un manto se representa por

$$\text{(40g)} \qquad \begin{aligned} x &= a \cos u \cosh v, \\ y &= b \operatorname{sen} u \cosh v, \\ z &= c \operatorname{senh} v \end{aligned}$$

$$(0 \leqq u < 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty)$$

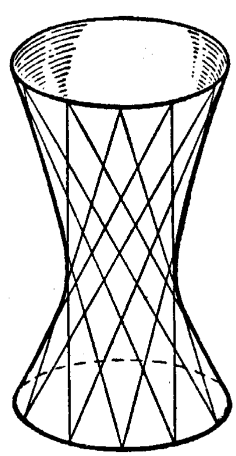

Figura 3.13 Hiperboloide de un manto.

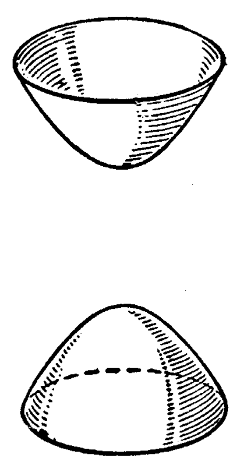

Figura 3.14 Hiperboloide de dos mantos.

y el hiperboloide de dos mantos, por

$$x = a \cos u \operatorname{senh} v,$$

(40h) $$y = b \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v,$$

$$z = \pm c \cosh v$$

$$(0 \leqq u < 2\pi, \ 0 < v < +\infty).$$

En general, puede considerarse la *representación paramétrica* de una superficie como la *aplicación de la región R del plano u, v sobre la superficie correspondiente.* A cada punto de la región R del plano u, v le corresponde un punto de la superficie y, para puntos típicos, lo inverso también se cumple.*

De la misma manera, una curva $u = u(t)$, $v = v(t)$ en el plano u, v corresponde, en virtud de las ecuaciones

$$x = \phi(u(t), v(t)) = x(t), \ . \ . \ . \ ,$$

a una curva sobre la superficie. En particular, en la representación (40e) de la esfera por medio de coordenadas esféricas, los meridianos se representan por la ecuación $u =$ constante y los paralelos de latitud por $v =$ constante. Generalmente se pueden considerar esas curvas sobre una superficie que están dadas por las ecuaciones $u =$ constante o $v =$ constante. Si en la representación paramétrica considerada se sustituye u, por un valor fijo definido, se obtiene una "curva en el espacio" o "curva alabeada" que se encuentra sobre la superficie y que tiene a v como parámetro; se cumple también una proposición correspondiente si se sustituye v por un valor fijo y se deja variar u. Estas curvas $u =$ constante y $v =$ constante son las *curvas paramétricas* o *líneas coordenadas* sobre la superficie. La red de curvas paramétricas corresponde a la red de paralelas a los ejes en el plano u, v (Fig. 3.15).

La tangente a la curva sobre la superficie, correspondiente a la curva $u = u(t)$, $v = v(t)$ en el plano u, v tiene la dirección del vector

(41) $$\dot{\mathbf{X}}_t = (x_t, y_t, z_t) = \left(x_u \frac{du}{dt} + x_v \frac{dv}{dt}, \ y_u \frac{du}{dt} + y_v \frac{dv}{dt}, \ z_u \frac{du}{dt} + z_v \frac{dv}{dt}\right)$$
$$= \mathbf{X}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{dt}$$

*Por supuesto, éste no es siempre el caso. Por ejemplo, en la representación (40e) de la esfera por medio de coordenadas esféricas (p. 328), los polos de la esfera corresponden a los segmentos rectilíneos completos dados por $v = 0$ y $v = \pi$.

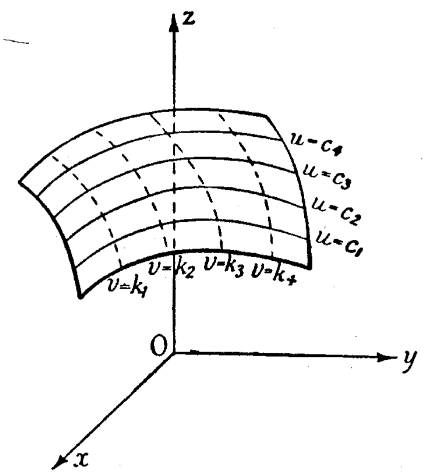

Figura 3.15 Curvas paramétricas $u =$ constante, $v =$ constante.

(ver la p. 256). En un punto dado de la superficie los vectores tangenciales $\mathbf{X}_t$ de todas las curvas sobre la superficie que pasan por ese punto dependen de los dos vectores $\mathbf{X}_u$, $\mathbf{X}_v$, los cuales, respectivamente, son tangenciales a las líneas paramétricas $v =$ constante y $u =$ constante que pasan por ese punto. Esto significa que todas las tangentes se encuentran en el plano que pasa por el punto y es *generado* por los vectores $\mathbf{X}_u$ y $\mathbf{X}_v$, el *plano tangente a la superficie* en ese punto. La *normal* a la superficie es perpendicular a todas las direcciones tangenciales, en particular a los vectores $\mathbf{X}_u$ y $\mathbf{X}_v$. Se concluye (ver la p. 221) que la superficie normal es paralela a la dirección del producto vectorial

$$\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v = (y_u z_v - y_v z_u,\ z_u x_v - z_v x_u,\ x_u y_v - x_v y_u). \tag{42}$$

Una de las herramientas más importantes para la investigación de las propiedades de una superficie dada es el estudio de las curvas que se encuentran sobre ella. Aquí sólo se dará la expresión para s, la longitud de arco de tal curva. Como se mencionó en la p. 257 (ver también el Volumen I, p. 353)

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \mathbf{X}_t \cdot \mathbf{X}_t,$$

de modo que, en vista de las ecuaciones (41), se obtiene

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\mathbf{X}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{dt}\right) \cdot \left(\mathbf{X}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{dt}\right) \tag{43}$$

$$= \left(x_u \frac{du}{dt} + x_v \frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(y_u \frac{du}{dt} + y_v \frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(z_u \frac{du}{dt} + z_v \frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$= E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Aquí los coeficientes E, F, G, las *cantidades gaussianas fundamentales* de la superficie, están dadas por

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u \tag{44a}$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v \tag{44b}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v. \tag{44c}$$

Estas cantidades dependen de la propia superficie y de su representación paramétrica y no de la elección particular de la curva sobre la superficie. Por lo común, la expresión (43) para la derivada de la longitud de arco s con respecto al parámetro t se escribe simbólicamente sin hacer referencia al parámetro usado a lo largo de la curva. Se dice que el *elemento lineal ds* está dado por la forma cuadrática diferencial ("forma fundamental")

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{45}$$

La longitud del producto cruz $\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v$ puede expresarse en términos de E, F, G como (ver la p. 222)

$$|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|^2 = |\mathbf{X}_u|^2|\mathbf{X}_v|^2 - (\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v)^2 = EG - F^2. \tag{45a}$$

Por tanto, la hipótesis original (39c) o (40d), acerca de la representación paramétrica, puede enunciarse como la condición

$$EG - F^2 > 0 \tag{46}$$

para las cantidades fundamentales.

Los cosenos directores para una de las dos normales a la superficie son las componentes del vector unitario

$$\frac{1}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|}\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v.$$

De (42) se deduce que la normal para una superficie representada paramétricamente tiene los cosenos directores

$$\text{(47)}\quad \cos\alpha = \frac{y_u z_v - y_v z_u}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \cos\beta = \frac{z_u x_v - z_v x_u}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{x_u y_v - x_v y_u}{\sqrt{EG - F^2}}$$

La tangente a una curva $u = u(t)$, $v = v(t)$ sobre la superficie tiene la dirección del vector

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{dt}.$$

Si ahora se considera una segunda curva $u = u(\tau)$, $v = v(\tau)$ sobre la superficie, referida a un parámetro τ, su tangente tiene la dirección del vector

$$\mathbf{X}_\tau = \mathbf{X}_u \frac{du}{d\tau} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{d\tau}.$$

Si las dos curvas pasan por el mismo punto sobre la superficie, el coseno del ángulo de intersección ω es igual al coseno del ángulo entre los vectores $\mathbf{X}_t$ y $\mathbf{X}_\tau$. De aquí que (ver la p. 165).

$$\cos\omega = \frac{\mathbf{X}_t \cdot \mathbf{X}_\tau}{|\mathbf{X}_t|\,|\mathbf{X}_\tau|}.$$

Aquí

$$\mathbf{X}_t \cdot \mathbf{X}_\tau = \left(\mathbf{X}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{dt}\right) \cdot \left(\mathbf{X}_u \frac{du}{d\tau} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{d\tau}\right)$$

$$= E\frac{du}{dt}\frac{du}{d\tau} + F\left(\frac{du}{dt}\frac{dv}{d\tau} + \frac{du}{d\tau}\frac{dv}{dt}\right) + G\frac{dv}{dt}\frac{dv}{d\tau}.$$

Consecuentemente, el coseno del ángulo entre las dos curvas sobre la superficie está dado por

$$\text{(48)}\quad \cos\omega = \frac{E\dfrac{du}{dt}\dfrac{du}{d\tau} + F\left(\dfrac{du}{dt}\dfrac{dv}{d\tau} + \dfrac{du}{d\tau}\dfrac{dv}{dt}\right) + G\dfrac{dv}{dt}\dfrac{dv}{d\tau}}{\sqrt{E\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 + 2F\dfrac{du}{dt}\dfrac{dv}{dt} + G\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2}\sqrt{E\left(\dfrac{du}{d\tau}\right)^2 + 2F\dfrac{du}{d\tau}\dfrac{dv}{d\tau} + G\left(\dfrac{dv}{d\tau}\right)^2}}$$

La aplicación de una región plana sobre otras se puede considerar como un caso especial de representación paramétrica, porque si la tercera de las funciones dadas en (39a), $\chi(u, v)$, se anula para todos los valores de u y v bajo consideración, las ecuaciones simplemente representan la aplicación de una región del plano u, v sobre una región del plano x, y; o bien, si se prefiere pensar en términos de transformaciones de coordenadas, las ecuaciones definen un sistema de *coordenadas curvilíneas* en la región u, v y las funciones inversas (si existen) definen un sistema u, v curvilíneo de coordenadas en la región plana x, y. En términos de las coordenadas curvilíneas (u, v), el elemento lineal en el plano x, y es sencillamente ver (44a, b, c)

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

donde

(49a) $$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2,$$

(49b) $$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},$$

(49c) $$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2.$$

Como un ejemplo más de la representación de una superficie en forma paramétrica, considérese el *arganeo* o *toro*. Este se obtiene haciendo girar un círculo alrededor de una recta que se encuentra en el plano del círculo y que no se intersecta con él (ver la Fig. 3.16). Tómese el eje de rotación como el eje z y elíjase el eje y de tal manera que pase por el centro del círculo, cuya coordenada y se denota por a. Si el radio del círculo es $r < |a|$, se obtiene

$$x = 0,\ y - a = r\cos\theta,\ z = r\operatorname{sen}\theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

como una representación paramétrica del círculo en el plano y, z. Ahora bien, haciendo que el círculo gire alrededor del eje z se encuentra que, para cada punto del círculo $x^2 + y^2$ permanece constante; es decir, $x^2 + y^2 = (a + r\cos\theta)^2$. Si ϕ es el ángulo de rotación alrededor del eje z, se tiene

$$x = (a + r\cos\theta)\operatorname{sen}\phi,$$

$$y = (a + r\cos\theta)\cos\phi,$$

$$z = r\operatorname{sen}\theta$$

$$(0 \leqq \phi < 2\pi,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

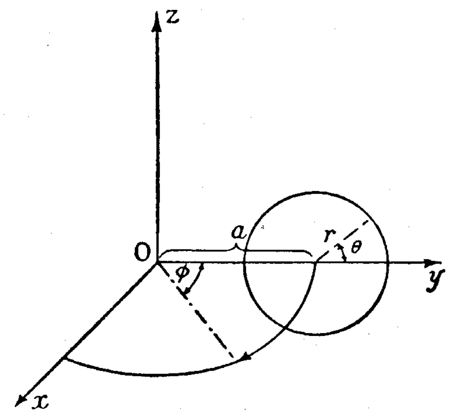

Figura 3.16 Generación de un toro por la rotación de un círculo.

como una representación paramétrica del toro en términos de los parámetros θ y ϕ. En esta representación el toro aparece como la imagen de un cuadrado de lado 2π en el plano θ, ϕ, donde cualquier pareja de puntos frontera que se encuentre sobre la misma recta $\theta =$ constante o $\phi =$ constante corresponde a sólo un punto de la superficie, y las cuatro esquinas del cuadrado corresponden al mismo punto.

Para el elemento lineal sobre el arganeo se tiene, por (44a, b, c) y (45),

$$ds^2 = r^2\, d\theta^2 + (a + r \cos \theta)^2 d\phi^2.$$

Ejercicios 3.4a

1. Calcular el elemento lineal
   (a) sobre la esfera
   $$x = \cos u \operatorname{sen} v, \qquad y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \qquad z = \cos v;$$
   (b) sobre el hiperboloide
   $$x = \cos u \cosh v, \qquad y = \operatorname{sen} u \cosh v, \qquad z = \operatorname{senh} v;$$
   (c) sobre la superficie de revolución dada por
   $$r = \sqrt{x^2 + y^2} = f(z),$$
   usando las coordenadas cilíndricas z y $\theta = \arctan(y/x)$ como coordenadas sobre la superficie;
   (d) sobre la cuádrica $t_3 =$ constante de la familia de cuádricas confocales dada por

$$\frac{x^2}{a-t}+\frac{y^2}{b-t}+\frac{z^2}{c-t}=1,$$

usando t_1 y t_2 como coordenadas sobre la cuádrica (ver el Ejercicio 9, p. 256).

2. Encontrar las cantidades fundamentales de Gauss para la catenoide $x = a \cosh(t/a)\cos(\theta/a)$, $y = a\cosh(t/a)\operatorname{sen}(\theta/a)$, $z = t$; demostrar que $E - G = F = 0$.
3. Para la superficie $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$, $z = \alpha u + \beta$, $\alpha, \beta =$ constante, demostrar que las imágenes de las rectas $u =$ constante, $v =$ constante son ortogonales.
4. ¿Cuál es la forma fundamental que da el elemento lineal para una superficie dada por una ecuación $z = f(x, y)$?
5. Probar que si se introduce un nuevo sistema de coordenadas curvilíneas r, s sobre una superficie con parámetros u, v, por medio de las ecuaciones

$$u = u(r, s), \qquad v = v(r, s),$$

entonces

$$E'G' - F'^2 = (EG - F^2)\left\{\frac{d(u,v)}{d(r,s)}\right\}^2,$$

donde E', F', G' denotan las cantidades fundamentales tomadas con respecto a r, s y E, F, G las tomadas con respecto a u, v.

6. Sea t una tangente a una superficie S en el punto P y considérense las secciones de S formadas por todos los planos que contienen a t. Probar que los centros de curvatura de las diferentes secciones se encuentran sobre un círculo.
7. Si t es una tangente a la superficie S en el punto P, a la curvatura de la sección plana normal que pasa por t (es decir, la sección que pasa por t y la normal) en ese punto se le da el nombre de *curvatura k de S en la dirección t.* Para cada tangente en P tómese el vector con la dirección de t, punto inicial P y longitud $1/\sqrt{k}$. Probar que los puntos finales de estos vectores se encuentran sobre una cónica.
8. Se da una curva como la intersección de las dos superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

Encontrar las ecuaciones de
(a) la tangente,
(b) el plano osculador, en cualquier punto de la curva.

9. Si las coordenadas (x, y, z) de un punto sobre una esfera están dadas por las ecuaciones (ver la p. 297)

$$x = a\operatorname{sen}\theta\cos\phi,\ y = a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,\ z = a\cos\theta,$$

demostrar que las dos curvas de los sistemas $\theta + \phi = \alpha$, $\theta - \phi = \beta$, las cuales pasan por cualquier punto (θ, ϕ), se cortan entre sí formando el ángulo arc cos $\{(1 - \operatorname{sen}^2\theta)/(1 + \operatorname{sen}^2\theta)\}$ (ver la p. 334).

Demostrar que el radio de curvatura de cualquiera de las dos curvas es igual a

$$\frac{a(1 + \operatorname{sen}^2 \theta)^{3/2}}{(5 + 3\operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2}}.$$

b. Transformación conforme en general

Una transformación en el plano,

$$x = \phi(u, v), \qquad y = \psi(u, v) \tag{50}$$

se dice que es conforme si aplica dos curvas cualesquiera que se intersectan, en otras dos que encierren el mismo ángulo que las originales.

Teorema. *Una condición necesaria y suficiente para que una transformación* (50) *continuamente diferenciable sea conforme, es que se cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$\phi_u - \psi_v = 0, \qquad \phi_v + \psi_u = 0 \tag{51a}$$

o bien,

$$\phi_u + \psi_v = 0, \qquad \phi_v - \psi_u = 0 \tag{51b}$$

En el primer caso se conserva el sentido de los ángulos; en el segundo, se invierte.[1]

La demostración es como sigue: si la transformación es conforme, las dos curvas ortogonales $u =$ constante $= u_0$, $v = v_0 + t$ y $u = u_0 + \tau$, $v =$ constante $= v_0$, en el plano u, v deben aplicarse en curvas ortogonales en el plano x, y. A partir de la fórmula (48) para el ángulo entre dos curvas (p. 333), inmediatamente se deduce que

$$0 = F = \phi_u\phi_v + \psi_u\psi_v. \tag{51c}$$

De la misma manera, las curvas correspondientes a las rectas $u = u_0 + t$, $v = v_0 + t$ y $u = u_0 + \tau$, $v = v_0 - \tau$ deben ser ortogonales. Esto da

$$0 = E - G = \phi_u^2 + \psi_u^2 - \phi_v^2 - \psi_v^2. \tag{51d}$$

*Esta última proposición se deduce directamente de las proposiciones dadas en la p. 307, referentes al signo del jacobiano $D = \phi_u \psi_v - \phi_v \psi_u$. En el caso de que se cumpla (51a), se tiene $D = \phi_u^2 + \phi_v^2 \geqq 0$; en el caso (51b), $D = -\phi_u^2 - \phi_v^2 \leqq 0$.

La ecuación (51c) puede escribirse como

$$\phi_u = \lambda\psi_v, \quad \phi_v = -\lambda\psi_u,$$

donde λ denota una constante de proporcionalidad. Introduciendo ésto en la ecuación (51d) inmediatamente se obtiene $\lambda^2 = 1$, de modo que se cumple uno o el otro de los dos sistemas de ecuaciones de Cauchy-Riemann (51a, b).

Que las ecuaciones de Cauchy-Riemann son una condición suficiente para la conformidad, excepto en los puntos en donde las cuatro cantidades $\phi_u, \phi_v, \psi_u, \psi_v$ son cero, se confirma por las observaciones siguientes.

Las ecuaciones (51a) o (51b) conducen a las relaciones

$$E = G \geqq 0, \qquad F = 0$$

para las cantidades fundamentales E, F, G, definidas por (49a, b, c). Por (48), entonces el ángulo ω entre dos curvas en el plano x, y está dado por

$$\cos\omega = \frac{\dfrac{du}{dt}\dfrac{du}{d\tau} + \dfrac{dv}{dt}\dfrac{dv}{d\tau}}{\sqrt{\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2}\ \sqrt{\left(\dfrac{du}{d\tau}\right)^2 + \left(\dfrac{dv}{d\tau}\right)^2}}.$$

El segundo miembro de esta ecuación es precisamente el coseno del ángulo entre las curvas correspondientes en el plano u, v. Por tanto, la aplicación conserva los ángulos entre las curvas, cambiando posiblemente su orientación. La única excepción es presentada por los puntos donde $E = F = G = 0$, es decir, por los puntos en donde todas las primeras derivadas de ambas funciones de aplicación se anulan.*

Ejercicios 3.4b

1. Investigar el comportamiento de la aplicación $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$. ¿Es conforme en $u = 2$, $v = 3$? ¿En $u = v = 0$? ¿Por qué?
2. ¿Dónde es conforme la aplicación $x = \frac{1}{2}\log(u^2 + v^2)$, $y = \arctan v/u$?
3. Demostrar que si las dos aplicaciones $(u, v) \to (x, y)$ y $(u, v) \to (\xi, \eta)$ son conformes, la aplicación $(u, v) \to (x\xi - y\eta, x\eta + y\xi)$ también es conforme.

[1]Allí la aplicación realmente puede dejar de ser conforme.

4. (a) Probar que la proyección estereográfica de la esfera unitaria sobre el plano es conforme.
   (b) Probar que los círculos sobre la esfera se transforman en círculos, o bien, en rectas en el plano.
   (c) Probar que en la proyección estereográfica la reflexión de la superficie esférica en el plano ecuatorial corresponde a una inversión en el plano u, v.
   (d) Encontrar la expresión para el elemento lineal sobre la esfera, en términos de los parámetros u, v.
5. ¿Bajo qué condiciones sobre los coeficientes gaussianos fundamentales (44), la aplicación del plano u, v hacia la superficie $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$ es conforme?
6. Encontrar una aplicación conforme de la esfera $x = \cos\theta \operatorname{sen}\phi$, $y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$, $z = \cos\phi$ hacia el plano u, v tal que $\theta = u$, y $\phi = f(v)$ con $f(0) = \frac{1}{2}\pi$.

3.5 Familias de curvas, familias de superficies y sus envolventes

a. *Observaciones generales*

En varias ocasiones se han considerado las curvas o las superficies no como configuraciones individuales sino como miembros de una familia de curvas o de superficies, tales como $f(x, y) = c$, donde a cada valor de c le corresponde una curva diferente de la familia.

Por ejemplo, las rectas paralelas al eje y en el plano x, y, es decir, las rectas $x = c$, forman una familia de curvas. Lo mismo se cumple para la familia de círculos concéntricos $x^2 + y^2 = c^2$ alrededor del origen; a cada valor de c le corresponde un círculo de la familia, a saber, el círculo con radio c. De modo semejante, las hipérbolas rectangulares $xy = c$ forman una familia de curvas, trazadas en la Fig. 3.2. El valor particular $c = 0$ corresponde a la hipérbola degenerada que consiste de los dos ejes coordenados. Otro ejemplo de una familia de curvas es el conjunto de todas las normales a una curva dada. Si la curva se da en términos del parámetro t por medio de las ecuaciones $\xi = \phi(t)$, $\eta = \psi(t)$, la ecuación de la familia de normales se obtiene en la forma (ver el Volumen I, p. 345)

$$(x - \phi(t))\phi'(t) + (y - \psi(t))\psi'(t) = 0,$$

donde se usa t en lugar de c para denotar al parámetro de la familia.

El concepto general de una familia de curvas puede expresarse analíticamente de la siguiente manera. Sea

$$f(x, y, c)$$

una función continuamente diferenciable de las dos variables independientes x y y y del parámetro c, donde el parámetro varía en un intervalo dado. (Así, el parámetro es en realidad una tercera variable independiente, la cual se simboliza de una manera diferente simplemente porque desempeña un papel diferente.) Entonces, si para cada valor del parámetro c la ecuación

(52a) $$f(x, y, c) = 0$$

representa una curva, el agregado de las curvas que se forman conforme c recorre su intervalo se llama *familia de curvas* que depende del parámetro c.

Cada curva de una familia de curvas de este tipo también puede representarse en la forma paramétrica

(52b) $$x = \phi(t, c), \qquad y = \psi(t, c),$$

donde c es el parámetro que distingue a las diferentes curvas de la familia y t el parámetro a lo largo de la curva.

Por ejemplo, las ecuaciones

$$x = c \cos t, \qquad y = c \operatorname{sen} t$$

representan a la familia de círculos concéntricos que se mencionó con anterioridad; una vez más, las ecuaciones

$$x = ct, \qquad y = \frac{1}{t},$$

representan a la familia de hipérbolas rectangulares que también se mencionó, excepto a la hipérbola degenerada que consiste de los ejes coordenados.

Ocasionalmente será necesario considerar familias de curvas que dependan de varios parámetros. Por ejemplo, el agregado de todos los círculos $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ en el plano es una familia de curvas que dependen de los tres parámetros a, b, c. Si no se especifica lo contrario, siempre se sobreentenderá que una familia de curvas es una familia "uniparamétrica", o sea, que depende de un solo parámetro. Los demás casos se distinguirán hablando de familias de curvas biparamétricas, triparamétricas o multiparamétricas.

Por supuesto, se cumplen proposiciones semejantes para las familias de superficies en el espacio. Si se da una función continuamente diferenciable $f(x, y, z, c)$ y si, para cada valor del parámetro c en un cierto intervalo definido, la ecuación

$$f(x, y, z, c) = 0$$

representa una superficie en el espacio con coordenadas rectangulares $x, y, z,$ entonces el agregado de las superficies que se obtienen haciendo que c describa su intervalo se llama *familia de superficies* o, más precisamente, *familia uniparamétrica de superficies con el parámetro c*. Por ejemplo, las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ alrededor del origen forman una familia de ese tipo. Como con las curvas, también se pueden considerar familias de superficies que dependan de varios parámetros.

Así, los planos definidos por la ecuación

$$ax + by + \sqrt{1 - a^2 - b^2}\, z + 1 = 0$$

forman una familia biparamétrica que depende de los parámetros a y b, si los parámetros a y b varían sobre la región $a^2 + b^2 \leqq 1$. Esta familia de superficies consiste de la clase de todos los planos que se encuentran a una distancia unitaria del origen.*

Ejercicios 3.5a

1. Caracterizar geométricamente las siguientes familias de curvas:

   (a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = c^2$, $a, b =$ constantes conocidas, $c =$ un parámetro

   (b) $x^2 + (y - c)^2 = c^2$, $c =$ parámetro

   (c) $x = \cos(c + t)$, $y = \operatorname{sen}(c + t)$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$, $c =$ parámetro.

2. Describir la familia uniparamétrica de superficies

$$(x - c)^2 + (y - 1 - c)^2 + (z + \sqrt{2} - 2c)^2 = 1.$$

b. Envolventes de familias uniparamétricas de curvas

Si una familia de rectas consiste de las tangentes a una curva plana E (por ejemplo, si la familia de normales de una curva C es la familia de tangentes a la evoluta E de C; ver el Volumen I, p. 424), se dirá que *la curva E es la envolvente de la familia de rectas*. De la

[1]A veces una familia uniparamétrica de superficies se menciona como superficies ∞^1 una familia biparamétrica como ∞^2 y así sucesivamente.

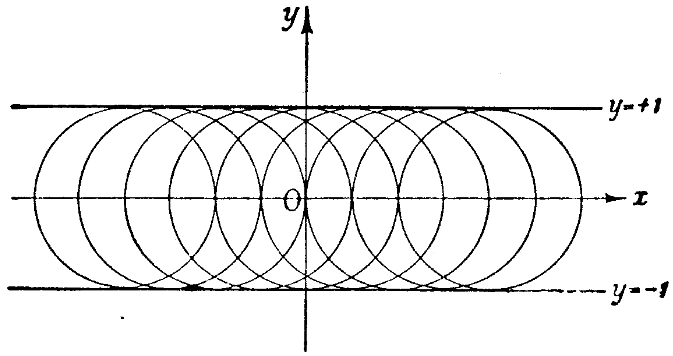

Figura 3.17 Familia de círculos con envolvente.

misma manera, se dirá que la familia de círculos con radio 1 y centro sobre el eje x —es decir, la familia de círculos con ecuación $(x - c)^2 + y^2 - 1 = 0$— tiene como su envolvente a la pareja de rectas $y = 1$ y $y = -1$, las cuales tocan a cada uno de los círculos (Fig. 3.17). En ambos ejemplos, se puede obtener el punto de contacto de la envolvente y una curva de la familia con valor c del parámetro, encontrando las intersecciones de las dos curvas de la familia con valores del parámetro c y $c + h$ y, a continuación, haciendo que h tienda a 0. Esto se expresa brevemente diciendo que la envolvente es el *lugar geométrico de las intersecciones de curvas vecinas.*

Para cualquier familia de curvas, *una curva E que en cada uno de sus puntos toca a alguna de las curvas de la familia se llama envolvente de la familia de curvas.* La cuestión que surge ahora es hallar la envolvente E de una familia de curvas $f(x, y, c) = 0$ dada. Hagamos primero unas cuantas observaciones plausibles en las cuales se supone que existe una envolvente E y que puede obtenerse, al igual que en los casos anteriores, como el lugar geométrico de las intersecciones de curvas vecinas.[1] Entonces se obtiene el punto de contacto de la curva $f(x, y, c) = 0$ con la curva E, de la siguiente manera: además de esta curva se considera una curva vecina $f(x, y, c + h) = 0$, se encuentra la intersección de estas dos curvas y, a continuación debe entonces tender hacia el punto de contanto buscado. En el punto de intersección se cumple la ecuación

$$\frac{f(x, y, c + h) - f(x, y, c)}{h} = 0 \text{ ,}$$

[1]Como, por medio de ejemplos, se verá que esta última suposición es demasiado restrictiva, dentro de poco se remplazarán estas plausibilidades por una discusión más completa.

así como las ecuaciones $f(x, y, c + h) = 0$ y $f(x, y, c) = 0$. En la primera ecuación se pasa hacia el límite cuando $h \to 0$. Dado que se supone la existencia de la derivada parcial f_c, ésto da las dos ecuaciones

$$f(x, y, c) = 0, \qquad f_c(x, y, c) = 0 \tag{53}$$

para el punto de contacto de la curva $f(x, y, c) = 0$ con la envolvente. Si pueden determinarse x y y como funciones de c por medio de estas ecuaciones, se obtiene la representación paramétrica de una curva con el parámetro c, y esta curva es la envolvente. Eliminando el parámetro c la curva también puede representarse en la forma $g(x, y) = 0$. Esta ecuación se llama *discriminante* de la familia, y la curva dada por la ecuación $g(x, y) = 0$ se llama *curva discriminante*.

Así se llega a la regla siguiente: *para obtener la envolvente de una familia de curvas $f(x, y, c) = 0$, considérense las dos ecuaciones $f(x, y, c) = 0$ y $f_c(x, y, c) = 0$ simultáneamente e inténtese expresar x y y como funciones de c, por medio de ellas, o bien, eliminar la cantidad c entre ellas.*

Ahora se remplazarán estas consideraciones heurísticas por una discusión más general basada en la definición de la envolvente como la curva de contacto. Al mismo tiempo se aprenderá bajo qué condiciones la regla da realmente la envolvente y qué otras posibilidades se presentan.

Para empezar, supóngase que E es una envolvente que puede representarse en términos del parámetro c por medio de dos funciones continuamente diferenciables

$$x = x(c), \quad y = y(c),$$

donde

$$\left(\frac{dx}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dc}\right)^2 \neq 0,$$

y que E, en el punto con parámetro c, toca a la curva de la familia $f(x, y, c) = 0$ que corresponde al mismo valor de c. Entonces se satisface la ecuación $f(x, y, c) = 0$ en el punto de contacto. Consecuentemente, si se sustituyen las expresiones $x(c)$ y $y(c)$ en lugar de x y y en esta ecuación, la misma sigue siendo válida para todos los valores de c en el intervalo. Derivando con respecto a c inmediatamente se obtiene

$$f_x \frac{dx}{dc} + f_y \frac{dy}{dc} + f_c = 0.$$

Ahora bien, la condición de tangencia es

$$f_x \frac{dx}{dc} + f_y \frac{dy}{dc} = 0,$$

porque las cantidades dx/dc y dy/dc son proporcionales a los cosenos directores de la tangente a E, y las cantidades f_x y f_y son proporcionales a los cosenos directores de la normal a la curva $f(x, y, c) = 0$ de la familia, y además tangente y normal deben de formar ángulos rectos entre sí. Se concluye que la envolvente satisface la ecuación $f_c = 0$, y, por tanto, se ve que las ecuaciones (53) forman una condición *necesaria* para la envolvente.

Para averiguar en qué medida también es *suficiente* esta condición, supóngase que una curva E, representada por dos funciones continuamente diferenciables $x = x(c)$ y $y = y(c)$, satisface las dos ecuaciones $f(x, y, c) = 0$ y $f_c(x, y, c) = 0$. Nuevamente, en $f(x, y, c) = 0$ sustitúyanse x y y por $x(c)$ y $y(c)$; entonces esta ecuación se convierte en una indentidad en c. Derivando con respecto a c y recordando que $f_c = 0$, inmediatamente se obtiene la relación

$$f_x \frac{dx}{dc} + f_y \frac{dy}{dc} = 0,$$

la cual, por lo tanto, se cumple para todos los puntos de E. Si las dos expresiones $f_x^2 + f_y^2$ y $(dx/dc)^2 + (dy/dc)^2$ son diferentes de cero en un punto de E, de modo que en ese punto tanto la curva E como la curva de la familia tienen tangentes bien definidas, esa ecuación afirma que la envolvente y la curva de la familia se tocan. Con estas hipótesis adicionales la regla es una condición suficiente para la envolvente, así como necesaria. No obstante, si tanto f_x como f_y se anulan, la curva de la familia puede tener un punto singular (ver la p. 282) y no se pueden sacar conclusiones acerca del contacto de las curvas.

Así, después de haber encontrado la curva discriminante todavía se requiere investigar más en cada caso con el fin de descubrir si en realidad es una envolvente o hasta qué punto no lo es.

En conclusión, se ha llegado a la condición que debe satisfacer la curva discriminante de una familia de curvas dada en la forma paramétrica

$$x = \phi(t, c), \quad y = \psi(t, c),$$

con el parámetro t sobre la curva. Esta condición es

$$\phi_t\psi_c - \phi_c\psi_t = 0;$$

la cual se obtiene fácilmente, pasando de la representación paramétrica de la familia a la expresión original, por medio de la eliminación de t.

Ejercicios 3.5b

1. ¿Las normales a una curva plana suave tienen siempre una envolvente?
2. Las rectas

$$y = cx + \psi(c)$$

satisfacen la ecuación diferencial

$$y = xy' + \psi(y')$$

(ecuación de Clairaut). Obtener una ecuación no paramétrica para la envolvente de la familia y verificar que satisfaga también la ecuación diferencial.

c. Ejemplos

1. $(x - c)^2 + y^2 = 1$. Como se hizo notar en la p. 342, esta ecuación representa a la familia de círculos de radio unitario, cuyos centros se encuentran sobre el eje x (Fig. 3.17). Geométricamente, se ve de inmediato que la envolvente debe consistir de las dos rectas $y = 1$ y $y = -1$. Esto puede verificarse por medio de la regla dada; en efecto, las dos ecuaciones $(x - c)^2 + y^2 = 1$ y $-2(x - c) = 0$ inmediatamente dan la envolvente en la forma $y^2 = 1$.

2. La familia de círculos de radio unitario que pasan por el origen cuyos centros, por lo tanto, deben estar sobre el círculo de radio unitario alrededor del origen, está dada por la ecuación

$$(x - \cos c)^2 + (y - \operatorname{sen} c)^2 = 1$$

o bien,

$$x^2 + y^2 - 2x \cos c - 2y \operatorname{sen} c = 0.$$

La derivada con respecto a c, igualada a 0, da $x \operatorname{sen} c - y \cos c = 0$. Estas dos ecuaciones son satisfechas por los valores $x = 0$ y $y = 0$. No obstante. si $x^2 + y^2 \neq 0$. fácilmente se deduce de estas ecuaciones que sen $c = y/2$, cos $c = x/2$, de modo que, eliminando a c, se obtiene $x^2 + y^2 = 4$. De donde, por la regla para hallar la envolvente, se obtiene que ésta es el círculo de radio 2 alrededor del origen, como se anticipa por intuición geométrica; pero también se obtiene el punto aislado $x = 0$, $y = 0$.

3. La familia de parábolas $(x - c)^2 - 2y = 0$ (ver la Fig. 3.18) también tiene una envolvente, la cual, tanto por intuición como por medio de la regla, resulta ser el eje x.

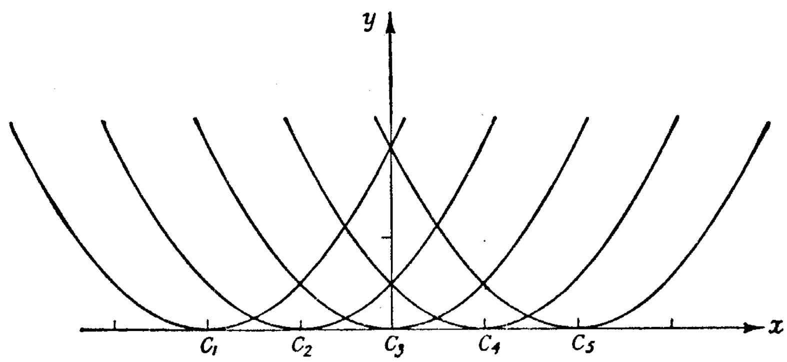

Figura 3.18 Familia de parábolas con envolvente.

4. Considérese la familia de círculos $(x - 2c)^2 + y^2 - c^2 = 0$ (ver la Fig. 3.19). La derivación con respecto a c da $2x - 3c = 0$, y por substitución se encuentra que la ecuación de la envolvente es

$$y^2 = \frac{x^2}{3} ;$$

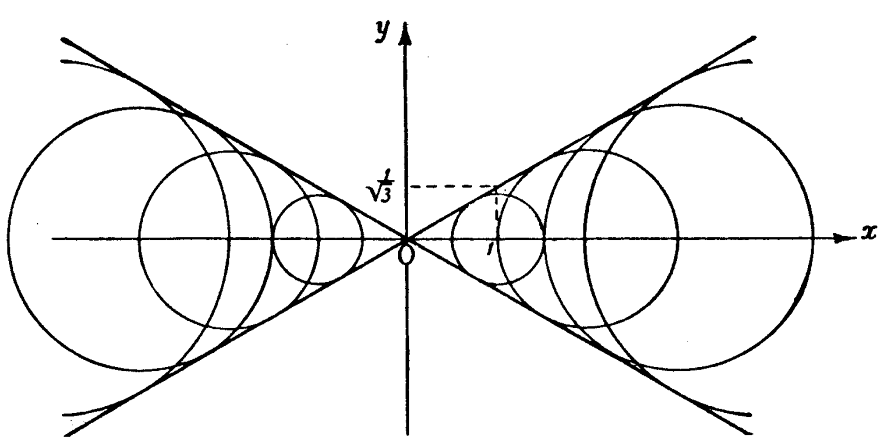

Figura 3.19 La familia $(x - 2c)^2 + y^2 - c^2 = 0$.

es decir, la envolvente consiste de las dos rectas

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}\,x \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,x.$$

El origen es una excepción, en el sentido de que allí no hay contacto.

5. Considérese ahora la familia de rectas sobre las cuales los ejes x y y determinan un segmento de longitud unitaria. Si $\alpha = c$ es el ángulo indicado en la Fig. 3.20, las rectas están dadas por la ecuación

$$\frac{x}{\cos\,\alpha} + \frac{y}{\operatorname{sen}\,\alpha} = 1.$$

La condición que debe satisfacer la envolvente es

$$\frac{\operatorname{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha}\,x - \frac{\cos\,\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\,y = 0,$$

la cual, junto con la ecuación de las rectas, da la envolvente en forma paramétrica

$$x = \cos^3\alpha, \quad y = \operatorname{sen}^3\alpha.$$

Eliminando el parámetro, se obtiene la ecuación

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

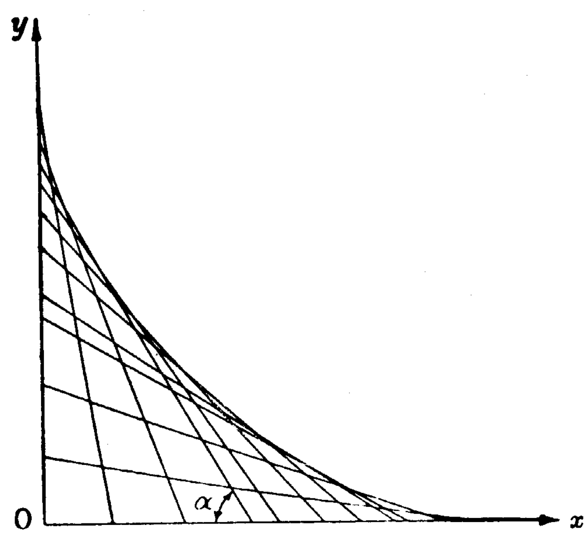

Figura 3.20 Arco de la astroide como envolvente de rectas.

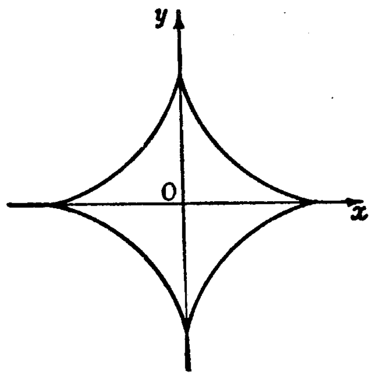

Figura 3.21 Astroide

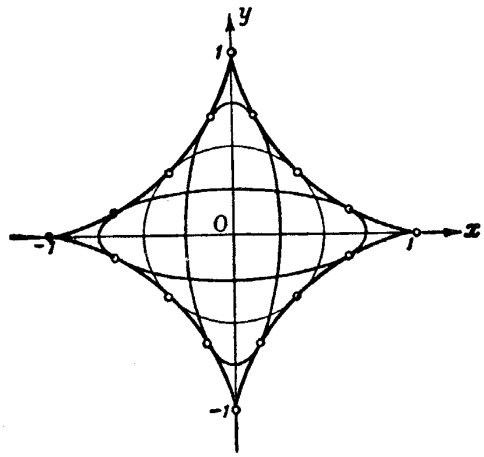

Figura 3.22 Astroide como envolvente de elipses.

Esta curva se llama *astroide* (ver el Volumen I, Capítulo 4, Ejercicio I, p. 435). Consiste (Figs. 3.21 y 3.22) de cuatro ramas simétricas que se encuentran en cuatro cúspides.

6. La astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ también aparece como la envolvente de la familia de elipses

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(1-c)^2} = 1$$

cuyos semiejes c y $(1 - c)$ tienen la suma constante 1 (Fig. 3.22).

7. La familia de curvas $(x - c)^2 - y^3 = 0$ muestra que, bajo ciertas circunstancias, el proceso puede no dar una envolvente. Aquí la regla da el eje x. Pero, como se ve en la Fig. 3.23, éste no es una envolvente; es el lugar geométrico de las cúspides de las curvas de la familia.

8. Para la familia

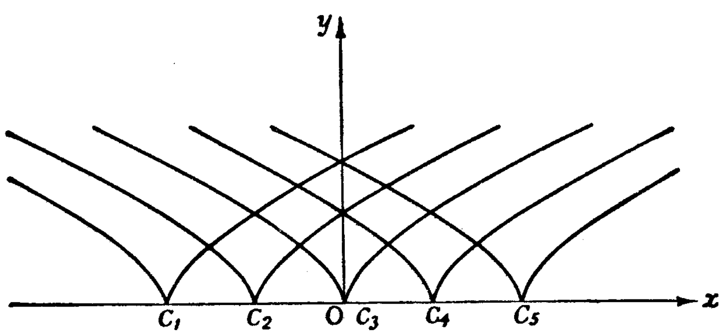

Figura 3.23 La familia $(x - c)^2 - y^3 = 0$.

$$(x - c)^3 - y^2 = 0,$$

la curva discriminante es el eje x (ver la Fig. 3.24). Nuevamente éste es el lugar geométrico de las cúspides; pero toca a cada una de las curvas y, en este sentido, debe considerarse como la envolvente.

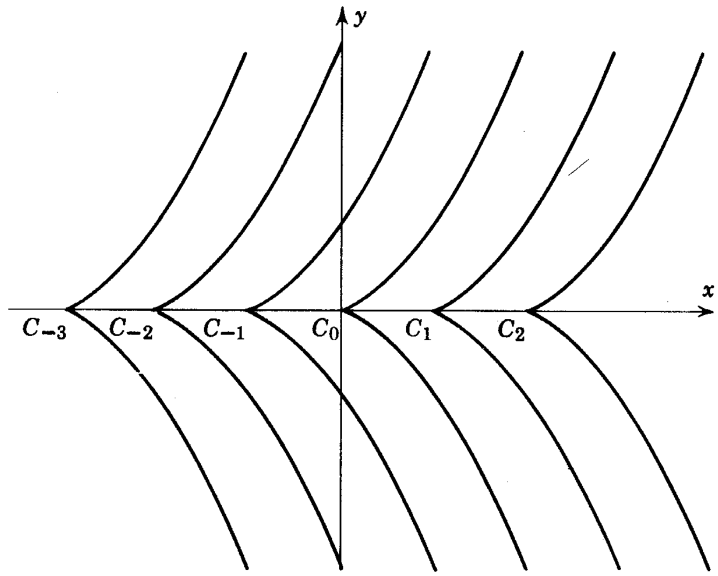

Figura 3.24 La familia $(x - c)^3 - y^2 = 0$.

9. La familia de *estrofoides*

$$[x^2 + (y - c)^2](x - 2) + x = 0$$

(ver la Fig. 3.25) tiene una curva discriminante que consiste de la envolvente más el lugar geométrico de los puntos dobles. Las curvas de la familia son congruentes entre sí y surgen una de la otra, por medio de una traslación paralela al eje y. Derivando se obtiene

$$f_c = -2(y - c)(x - 2) = 0,$$

de modo que debe tenerse $x = 2$, o bien, $y = c$. Sin embargo, la recta $x = 2$ no interviene en el asunto, porque ningún valor finito de y corresponde a $x = 2$. Por lo tanto, se tiene $y = c$. De modo que la curva discriminante es

$$x^2(x - 2) + x = 0.$$

Esta curva consiste de las rectas $x = 0$ y $x = 1$. Como se ve en la Fig. 3.25, sólo $x = 0$ es la envolvente; la recta $x = 1$ pasa por los puntos dobles de las curvas.

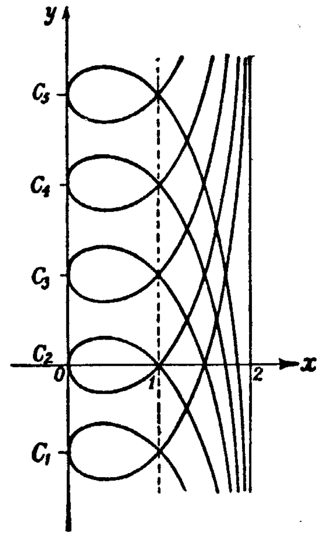

Figura 3.25 Familia de estrofoides.

10. La envolvente no necesita ser el lugar geométrico de los puntos de intersección de curvas vecinas; ésto queda ilustrado por medio de la familia de parábolas cúbicas idénticas paralelas $y - (x - c)^3 = 0$. Ningún par de estas curvas se intersectan. La regla da la ecuación $f_c = 3(x - c)^2 = 0$, de modo que el eje x, $y = 0$, es la curva discriminante. Como todas las curvas de la familia son tocadas por ella, también es la envolvente (Fig. 3.26).

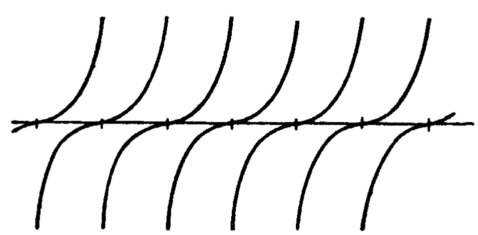

Figura 3.26 Familia de parábolas cúbicas.

11. La noción de envolvente nos permite dar una nueva definición para la *evoluta* de una curva C (ver el Volumen I, pp. 359, 424 y siguientes). Sea C dada por

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t).$$

La evoluta E de C se define como la envolvente de las normales de C. Dado que las normales de C están dadas por

$$\{x - \phi(t)\}\phi'(t) + \{y - \psi(t)\}\psi'(t) = 0,$$

la envolvente se encuentra derivando esta ecuación con respecto a t:

$$0 = \{x - \phi(t)\}\phi''(t) + \{y - \psi(t)\}\psi''(t) - \phi'^2(t) - \psi'^2(t).$$

A partir de esta ecuación y la anterior se obtiene la representación paramétrica de la envolvente,

$$x = \phi(t) - \psi'(t)\frac{\phi'^2 + \psi'^2}{\psi''\phi' - \phi''\psi'} = \phi - \frac{\psi'\rho}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}},$$

$$y = \psi(t) + \phi'(t)\frac{\phi'^2 + \psi'^2}{\psi''\phi' - \phi''\psi'} = \psi + \frac{\phi'\rho}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}},$$

donde

$$\rho = \frac{(\phi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}{\psi''\phi' - \phi''\psi'}$$

denota el radio de curvatura (ver el Volumen I, p. 356). Estas ecuaciones son idénticas a las dadas en el Volumen I (p. 359) para la evoluta.

12. Sea una curva C dada por $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$. Fórmese la envolvente E de los círculos que tienen sus centros sobre C y que pasan por el origen O. Como los círculos están dados por

$$x^2 + y^2 - 2x\phi(t) - 2y\psi(t) = 0,$$

la ecuación de E es

$$x\phi'(t) + y\psi'(t) = 0.$$

De aquí que si P es el punto $(\phi(t), \psi(t))$ y $Q(x, y)$ es el punto correspondiente de E, entonces OQ es perpendicular a la tangente a C en P. Supuesto que, por definición, $PQ = PO$, PO y PQ forman ángulos iguales con la tangente a C en P.

Si se imagina a O como un punto luminoso y a C como una curva reflectora, entonces QP es el rayo reflejado correspondiente a OP. La envolvente de los rayos reflejados recibe el nombre de *caústica* de C con respecto a O. *La cáustica es la evoluta de* E: el rayo reflejado PQ es normal a E, dado que un círculo con centro en P toca a E en Q y la envolvente de las normales de E, es su evoluta, como se vio en el ejemplo anterior.

Por ejemplo, sea C un círculo que pasa por O. Entonces E es la trayectoria descrita por el punto O' de un círculo C' congruente a C que rueda sobre éste y que inicia su movimiento con C y O' coincidentes; porque, durante el movimiento, O y O' siempre ocupan posiciones simétricas con respecto a la tangente común de los dos círculos. Por tanto, E será una epicicloide especial;de hecho, una cardioide (ver el Volumen I, p. 329) y siguientes. Como la evoluta de una epicicloide es una epicicloide semejante (ver el Volumen I, p. 439), la cáustica de C con respecto a O es en este caso una cardioide.

Ejercicios 3.5c

1. Un proyectil disparado desde el origen con un ángulo de inclinación inicial α y velocidad inicial v, recorre una trayectoria parabólica dada por las ecuaciones

$$x = (v \cos \alpha)\, t$$

$$y = (v \operatorname{sen} \alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2,$$

donde g es la aceleración constante de la gravedad.

(a) Encontrar la envolvente de la familia de trayectorias con parámetros α

(b) Demostrar que ningún punto por encima de la envolvente puede ser alcanzado por el proyectil.

(c) Demostrar que todo punto por debajo de la envolvente puede ser alcanzado de dos maneras, es decir, que un punto de este tipo se encuentra sobre dos trayectorias.

2. Obtener las envolventes de las familias de curvas que siguen:

(a) $y = cx + 1/c.$

(b) $y^2 = c(x - c)$

(c) $cx^2 + y^2/c = 1$

(d) $(x - c)^2 + y^2 = a^2c^2/(1 + a^2)$, $a =$ constante.

3. Sea C una curva arbitraria en el plano y considérense los círculos de radio p cuyos centros se encuentran sobre C. Probar que la envolvente de estos círculos está formada por las dos curvas paralelas a C a la distancia p (ver la definición de curvas paralelas, Volumen I, p. 291.

4. Una familia de rectas en el espacio puede darse como la intersección de dos planos que dependan de un parámetro t:

$$a(t)x + b(t)y + c(t)z = 1$$

$$d(t)x + e(t)y + f(t)z = 1.$$

Probar que si estas rectas son tangentes a alguna curva (es decir, poseen una envolvente), entonces

$$\begin{vmatrix} a-d & b-e & c-f \\ a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{vmatrix} = 0.$$

5. Si una curva plana C está dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$, su recíproca polar C' se define como la envolvente de la familia de rectas

$$\xi f(t) + \eta g(t) = 1,$$

donde (ξ, η) son coordenadas corrientes.

(a) Probar que C también es la recíproca polar de C'.
(b) Encontrar la recíproca polar del círculo $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$.
(c) Encontrar la recíproca polar de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

6. Un círculo de radio a rueda sobre una recta fija, llevando una tangente fija con relación al círculo. Tomando ejes en el punto de contacto donde la tangente en movimiento coincide con la recta fija, demostrar que la envolvente de la tangente está dada por

$$x = a(\theta + \cos\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta)$$
$$y = a(\cos^2\theta - \cos\theta).$$

7. Encontrar la envolvente de un círculo variable en un plano, que pasa por un punto fijo O, y cuyo centro describe una cónica dada con centro en O.

8. (a) Si Γ es una curva plana y O un punto en su plano, el lugar geométrico Γ' de las proyecciones ortogonales de O sobre una tangente variable de Γ se llama curva pedal de Γ con respecto al punto O. Probar que si el punto M describe la curva Γ, la curva pedal Γ' es la envolvente del círculo variable con el radiovector OM como diámetro.
(b) ¿Cómo es la envolvente si Γ es un círculo y O un punto sobre su circunferencia?

9. MM' es una cuerda variable de una elipse, paralela al eje menor. Encontrar la envolvente del círculo variable que tiene a MM' como diámetro.

d. *Envolventes de familias de superficies*

Las observaciones hechas acerca de las envolventes de familias de curvas también se aplican a las familias de superficies, con sólo unas cuantas modificaciones. Dada una familia uniparamétrica de superficies $f(x, y, z, c) = 0$, definida para un intervalo de valores de parámetro c, se dirá que una superficie E es la envolvente de la familia si toca a cada superficie de la familia a lo largo de toda una curva y si, además, estas curvas de contacto forman una familia uniparamétrica de curvas sobre E que cubren por completo a esta superficie.

Un ejemplo es el de la familia de todas las esferas de radio unitario con centro sobre el eje z. Intuitivamente se ve que la envolvente es el cilindro $x^2 + y^2 - 1 = 0$ con radio unitario y eje a lo largo del eje z; la familia de curvas de contacto es simplemente la familia de círculos paralelos al plano x, y, con radio unitario y centro sobre el eje.[1]

Como en la p. 341 si se supone que la envolvente existe, puede hallársele a través del método heurístico que sigue: primero se consideran las superficies $f(x, y, z, c) = 0$ y $f(x, y, z, c + h) = 0$ correspondientes a dos valores diferentes del parámetro, c y $c + h$. Estas dos ecuaciones determinan la curva de intersección de las dos superficies (se ha supuesto expresamente que esa curva de intersección existe). Como consecuencia de las dos ecuaciones anteriores, esta curva también satisface la tercera ecuación

$$\frac{f(x, y, z, c + h) - f(x, y, z, c)}{h} = 0.$$

Si se hace que h tienda a cero, la curva de intersección se aproximará a una posición límite definida y esta curva límite queda determinada por las dos ecuaciones

$$f(x, y, z, c) = 0, \quad f_c(x, y, z, c) = 0. \tag{54}$$

A menudo se dice, en una forma intuitiva no rigurosa, que esta curva es la intersección de superficies vecinas de la familia. Esta es una función del parámetro c, de modo que las curvas de intersección para todos los diferentes valores de c forman una familia uniparamétrica de curvas en el espacio. Si se elimina la cantidad c entre las dos ecuaciones anteriores, se obtiene una ecuación que se conoce como *discriminante*. Como en la p. 343, puede demostrarse que la envolvente debe satisfacer esta ecuación discriminante.

Precisamente como en el caso de las curvas planas, fácilmente nos podemos convencer de que un plano que toca a la superficie discriminante también toca a la superficie correspondiente de la familia, siempre que $f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 \neq 0$. De aquí que la superficie discriminante da las envolventes de la familia y los lugares geométricos de las singularidades de las superficies de la familia.

Como un primer ejemplo, considérese la familia de esferas

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 - 1 = 0$$

mencionadas en el párrafo anterior. Para encontrar la envolvente se tiene la ecuación adicional

[1]Las envolventes de esferas de radio constante cuyos centros se encuentran sobre una curva dada se llaman *superficies tubulares*.

$$-2(z-c)=0.$$

Obviamente, para valores fijos de c, estas dos ecuaciones representan el círculo de radio unitario paralelo al plano x, y que se encuentra a la altura $z=c$. Si se elimina el parámetro c entre las dos ecuaciones, se obtiene la ecuación de la envolvente en la forma $x^2+y^2-1=0$, que es la ecuación del cilindro circular recto con radio unitario y cuyo eje es el eje z.

Para las familias de superficies también es posible encontrar las envolventes de familias biparamétricas $f(x, y, z, c_1, c_2)=0$. (Sin embargo, con respecto a las familias de curvas, el concepto de envolvente sólo tiene significado para familias uniparamétricas). Por ejemplo, considérese la familia de todas las esferas con radio unitario y centro sobre el plano x, y, representada por la ecuación

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+z^2-1=0.$$

La intuición nos dice inmediatamente que los dos planos $z=1$ y $z=-1$ tocan a todas las superficies de la familia. En general, se dirá que una superficie E es la envolvente de una familia biparamétrica de superficies si, en todo punto P de E, la superficie E toca a una superficie de la familia, de tal manera que conforme P varía sobre E los valores paramétricos c_1, c_2 correspondientes a la superficie tocada por E en P varían sobre una región del plano c_1,c_2 y, además, puntos diferentes (c_1, c_2) corresponden a diferentes puntos P de E. Entonces, una superficie de la familia toca a la envolvente *en un punto*, y no, como antes, a lo largo de una curva completa.

Con hipótesis semejantes a las establecidas en el caso de curvas planas se encuentra que el punto de contacto de una superficie de la familia con la envolvente, si existe, debe satisfacer las ecuaciones

$$f(x, y, z, c_1, c_2)=0, \quad f_{c_1}(x, y, z, c_1, c_2)=0, \quad f_{c_2}(x, y, z, c_1, c_2)=0.$$

A partir de estas tres ecuaciones se determina el punto de contacto de una superficie dada, asignando los valores correspondientes a los parámetros. Inversamente, si se eliminan los parámetros c_1 y c_2, se obtiene una ecuación que debe ser satisfecha por la envolvente.

Por ejemplo, la familia de esferas con radio unitario y centro sobre el plano x, y está dada por la ecuación

$$f(x, y, z, c_1, c_2)=(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+z^2-1=0,$$

con los dos parámetros c_1 y c_2. La regla para formar a la envolvente de las dos ecuaciones

$$f_{c_1} = -2(x - c_1) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_{c_2} = -2(y - c_2) = 0.$$

Por tanto, para la ecuación discriminante se tiene $z^2 - 1 = 0$, y, en efecto, los dos planos $z = 1$ y $z = -1$ son envolventes, como ya se había visto intuitivamente.

Ejercicios 3.5d

1. ¿Cuál es la envolvente de la familia de elipsoides de volumen constante (es decir, producto fijo de los semiejes) con centro común en O y ejes paralelos a los ejes coordenados?
2. ¿Cuál es la envolvente de la familia de planos $ax + by + cz = 1$, donde $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$?
3. (a) Encontrar la envolvente de la familia biparamétrica de planos para los cuales.

$$OP + OQ + OR = \text{constante} = 1,$$

donde P, Q, R denotan a los puntos de intersección de los planos con los ejes coordenados, y O es el origen.

(b) Hallar la envolvente de los planos para los cuales

$$OP^2 + OQ^2 + OR^2 = 1.$$

4. Una familia de planos está dada por

$$x \cos t + y \operatorname{sen} t + z = t,$$

donde t es un parámetro.

(a) Encontrar la ecuación de la envolvente para los planos, en coordenadas cilíndricas (r, z, θ).

(b) Probar que la envolvente consiste de las tangentes a una cierta curva.

5. Sea $z = u(x, y)$ la ecuación de una superficie tubular, es decir, la envolvente de una familia de esferas de radio unitario con sus centros sobre alguna curva $y = f(x)$ en el plano x, y. Probar que $u^2 (u_x^2 + u_y^2 + 1) = 1$.
6. Encontrar la envolvente de la familia de esferas que tocan las tres esferas

$$S_1\colon \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{4},$$

$$S_2\colon x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{9}{4},$$

$$S_3\colon x^2 + y^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

7. Sea Γ una curva plana y Γ' su curva pedal, como se describió en el Ejercicio 8, p. 353.
   (a) Sea M un punto que describe la curva Γ. ¿Cuál es la envolvente de la esfera variable con el radio vector OM como diámetro?
   (b) ¿Cuál es la envolvente de la esfera variable si Γ es un círculo y O un punto sobre su circunferencia?
8. Demostrar que la superficie xyz =constante es la envolvente de la familia de planos que forman, con los planos coordenados, un tetraedro de volumen constante (es decir, producto fijo de las coordenadas de las intersecciones con los ejes).
9. Un plano se mueve de modo que toca a las parábolas $z = 0$, $y^2 = 4x$ y $y = 0$, $z^2 = 4x$. Demostrar que su envolvente consiste de dos cilindros parabólicos.

3.6 Formas diferenciales alternantes

a. Definición de formas diferenciales alternantes

En el Capítulo 1 (p. 113) se consideró la forma diferencial lineal general

$$L = A(x, y, z)\,dx + B(x, y, z)\,dy + C(x, y, z)\,dz \tag{55a}$$

en tres variables independientes. A lo largo de cualquier curva Γ con representación paramétrica $x = \phi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$, la forma L determina los valores

$$\frac{L}{dt} = A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} = A\dot{\phi} + B\dot{\psi} + C\dot{\chi}, \tag{55b}$$

que dependen de la representación paramétrica especial de Γ. Si Γ se refiere a un parámetro diferente t, se obtiene

$$\frac{L}{d\tau} = A\frac{dx}{d\tau} + B\frac{dy}{d\tau} + C\frac{dz}{d\tau} = \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt}\right)\frac{dt}{d\tau} = \frac{L}{dt}\,\frac{dt}{d\tau}. \tag{55c}$$

Sin embargo, la integral

$$\int_\Gamma L = \int \frac{L}{dt}\,dt = \int \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt}\right)dt$$

sólo depende de la curva Γ (y de su orientación) y no de la representación paramétrica particular.

De modo semejante, considérese una forma diferencial ω que sea cuadrática en dx, dy, y dz, a saber, una combinación lineal ω de los símbolos $dx\,dx$, $dx\,dy$, $dx\,dz$, $dy\,dx$, $dy\,dy$, $dy\,dz$, $dz\,dx$, $dz\,dy$, $dz\,dz$, con coeficientes que sean funciones de x, y, z. Sobre cualquier superficie S en el espacio, con representación paramétrica $x = \phi(s, t)$, $y = \psi(s, t)$, $z = \chi(s, t)$, la forma ω define los valores $\omega/ds\,dt$ si se conviene en que los cocientes

$$\frac{dx\,dx}{ds\,dt}, \quad \frac{dx\,dy}{ds\,dt}, \quad \frac{dx\,dz}{ds\,dt}, \ldots$$

denotan respectivamente los jacobianos

$$\frac{d(x, x)}{d(s, t)}, \quad \frac{d(x, y)}{d(s, t)}, \quad \frac{d(x, z)}{d(s, t)}, \ldots .^{1}$$

No se establece distinción entre dos formas diferenciales ω que proporcionan los mismos valores $\omega/ds\,dt$ en cada punto de la superficie. En vista del carácter alternante de los determinantes, o sea, de que

$$\frac{d(x, x)}{d(s, t)} = 0, \qquad \frac{d(x, y)}{d(s, t)} = -\frac{d(y, x)}{d(s, t)}, \ldots,$$

se ve que los términos de ω con $dx\,dx$, $dy\,dy$, $dz\,dz$ no contribuyen y que $dy\,dx$, $dz\,dy$, $dx\,dz$ pueden remplazarse respectivamente por $-dx\,dy$, $-dy\,dz$, $-dz\,dx$. Por tanto, la forma diferencial cuadrática más general en dx, dy, dz puede escribirse como

$$\text{(56a)} \qquad \omega = a(x, y, z)\,dy\,dz + b(x, y, z)\,dz\,dx + c(x, y, z)\,dx\,dy.$$

Los valores que asocia ω con los puntos de una superficie S referida a los parámetros s, t, son

$$\text{(56b)} \quad \frac{\omega}{ds\,dt} = a(x, y, z)\frac{d(y, z)}{d(s, t)} + b(x, y, z)\frac{d(z, x)}{d(s, t)} + c(x, y, z)\frac{d(x, y)}{d(s, t)}.$$

---

*Esta convención caracteriza a las formas diferenciales *alternantes*. En otros contextos también se encuentran formas diferenciales cuadráticas no alternantes, tales como la que da el cuadrado del elemento lineal en el espacio o sobre una superficie (ver la p. 332):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Dando a S los parámetros diferentes s', t', a partir de la ley de multiplicación para los jacobianos (ver la p. 305), se obtiene

$$\text{(56c)} \qquad \frac{\omega}{ds'\,dt'} = a\frac{d(y,z)}{d(s',t')} + b\frac{d(z,x)}{d(s',t')} + c\frac{d(x,y)}{d(s',t')} = \frac{\omega}{ds\,dt}\,\frac{d(s,t)}{d(s',t')}\,.$$

Posteriormente (p. 658), también se definirá la integral doble y se

$$\iint_S \omega$$

verá que no depende de la representación paramétrica particular de la superficie S.

De manera semejante, puede considerarse una forma diferencial ω que sea cúbica en dx, dy, dz. Tal forma asigna valores $\omega/dr\,ds\,dt$ correspondientes a cualquier representación paramétrica

$$x = \phi(r,s,t), \quad y = \psi(r,s,t), \quad z = \chi(r,s,t),$$

donde, nuevamente, los cocientes

$$\frac{dx\,dx\,dx}{dr\ \,ds\,dt}, \ \frac{dx\ dy\ dz}{dr\ \,ds\ dt}, \ldots$$

se interpretan como los jacobianos

$$\frac{d(x,x,x)}{d(r,s,t)}, \ \frac{d(x,y,z)}{d(r,s,t)}, \ldots .$$

Como los jacobianos se anulan cuando dos de las variables dependientes son idénticas, y cambian de signo cuando se intercambian dos de las variables dependientes, todas las formas diferenciales cúbicas en las tres variables independientes x, y, z son del tipo

$$\text{(56d)} \qquad \omega = \alpha(x,y,z)dx\,dy\,dz.$$

Siempre que x, y, z se representen como funciones de r, s, t, a partir de ω se obtiene el valor

$$\text{(56e)} \qquad \frac{\omega}{dr\,ds\,dt} = \alpha(x,y,z)\frac{d(x,y,z)}{d(r,s,t)}\,.$$

Procediendo de la misma manera podrían definirse formas diferenciales "alternantes" en dx, dy, dz de grados 4, 5, ... Pero todas éstas son idénticamente 0, ya que cualquier jacobiano de orden 4, 5, ... que pudiera formarse tendría idénticas a dos de las variables dependientes y, por tanto, se anularía.[1]

Ejercicios 3.6a

1. Encontrar $\omega/du\,dv$ en cada uno de los casos siguientes:

   (a) $\omega = x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$

   $x = \cos u \sin v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos v$

   (b) $\omega = (y - z)dy\,dz + (z - x)dz\,dx + (x - y)dx\,dy,$

   $x = au + bv, \quad y = bu + cv, \quad z = cu + av$

   (c) $\omega = dy\,dz + dz\,dx + dx\,dy,$

   $x = u^2 + v^2, \quad y = 2uv, \quad z = u^2 - v^2.$

b. Sumas y productos de formas diferenciales

Dos formas diferenciales del mismo orden (es decir, ambas lineales, ambas cuadráticas o ambas cúbicas) pueden sumarse trivialmente sumando los coeficientes correspondientes. De donde, para

$$\omega_1 = a_1\,dy\,dz + b_1\,dz\,dx + c_1\,dx\,dy,$$

$$\omega_2 = a_2\,dy\,dz + b_2\,dz\,dx + c_2\,dx\,dy,$$

Se define

$$\omega_1 + \omega_2 = (a_1 + a_2)dy\,dz + (b_1 + b_2)dz\,dx + (c_1 + c_2)dx\,dy. \tag{57a}$$

[1]Sin embargo, las formas de orden superior tienen un significado no trivial en los espacios de dimensiones superiores. En el espacio x, y, z, u tetradimensional, las formas diferenciales alternantes más generales de orden 1, 2, 3, 4 se pueden escribir como

(56f) $A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du$

(56g) $A\,dx\,dy + B\,dy\,dz + C\,dz\,du + D\,du\,dx + E\,dx\,dz + F\,dy\,du$

(56h) $A\,dy\,dz\,du + B\,dz\,du\,dx + C\,du\,dx\,dy + D\,dx\,dy\,dz$

(56i) $A\,dx\,dy\,dz\,du,$

respectivamente, con los coeficientes $A, B, \ldots,$ los cuales son funciones de x, y, z, u. Las formas de orden superior a 4 se anulan.

Puede definirse el producto $\omega_1\omega_2$ de dos formas diferenciales cualesquiera ω_1 y ω_2 del mismo orden o de órdenes diferentes, simplemente sustituyendo ω_1 y ω_2 por sus expresiones en términos de dx, dy, dz y aplicando la ley distributiva de la multiplicación, teniendo cuidado, sin embargo, de conservar el orden original de las diferenciales en cada término.[1] Así, el producto de las dos formas lineales

$$\omega_1 = A_1\, dx + B_1\, dy + C_1\, dz \qquad \text{y} \qquad \omega_2 = A_2\, dx + B_2\, dy + C_2\, dz$$

sería la forma cuadrática

$$\begin{aligned}
\text{(57b)} \quad \omega_1\omega_2 &= (A_1\, dx + B_1\, dy + C_1\, dz)(A_2\, dx + B_2\, dy + C_2\, dz) \\
&= A_1A_2\, dx\, dx + A_1B_2\, dx\, dy + A_1C_2\, dx\, dz + B_1A_2\, dy\, dx \\
&\qquad + B_1B_2\, dy\, dy + B_1C_2\, dy\, dz + C_1A_2\, dz\, dx \\
&\qquad + C_1B_2\, dz\, dy + C_1C_2\, dz\, dz \\
&= (B_1C_2 - C_1B_2) dy\, dz + (C_1A_2 - A_1C_2) dz\, dx \\
&\qquad + (A_1B_2 - B_1A_2) dx\, dy.
\end{aligned}$$

Si se describen las formas individuales ω_1 y ω_2 por los "vectores de los coeficientes" $\mathbf{R}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ y $\mathbf{R}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, entonces los coeficientes del producto $\omega_1\omega_2$ son precisamente las componentes del *producto vectorial* $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2$ (ver la p. 221). Evidentemente, el producto de las formas no es conmutativo. Aquí, por ejemplo, $\omega_1\omega_2 = -\,\omega_2\omega_1$.

Multiplicando la forma de primer orden

$$\omega_1 = A\, dx + B\, dy + C\, dz$$

por la forma de segundo orden

$$\omega_2 = a\, dy\, dz + b\, dz\, dx + c\, dx\, dy,$$

de modo semejante se obtiene

$$\begin{aligned}
\text{(57c)} \quad \omega_1\omega_2 &= (A\, dx + B\, dy + C\, dz)(a\, dy\, dz + b\, dz\, dx + c\, dx\, dy) \\
&= Aa\, dx\, dy\, dz + Ab\, dx\, dz\, dx + Ac\, dx\, dx\, dy \\
&\quad + Ba\, dy\, dy\, dz + Bb\, dy\, dz\, dx + Bc\, dy\, dx\, dy \\
&\quad + Ca\, dz\, dy\, dz + Cb\, dz\, dz\, dx + Cc\, dz\, dx\, dy \\
&= (Aa + Bb + Cc) dx\, dy\, dz.
\end{aligned}$$

[1]El producto formado de esta manera a veces se denota por el símbolo $\omega_1 \wedge \omega_2$.

Se observa que, en este caso, el coeficiente de $\omega_1\omega_2$ es el producto escalar de los vectores de los coeficientes (A, B, C) y (a, b, c). De aquí que, incidentalmente, $\omega_1 \omega_2 = \omega_2 \omega_1$.

Cuando se forma el producto de una forma de primer orden y una de tercero, de dos formas de segundo orden, o bien de una forma de segundo orden y una de tercero, se llega a formas de orden mayor que 3, que se anulan.

Para completar, resulta conveniente definir las formas diferenciales de orden 0 como los escalares $\alpha(x, y, z)$. Entonces, el producto de una forma α de orden 0 con una forma ω de cualquier orden $k = 0, 1, 2, 3$ se obtiene multiplicando cada uno de los coeficientes de ω por el escalar α.

A partir de la definición se ve fácilmente que los productos de las formas diferenciales son asociativos. Para tres formas lineales

$$L_i = A_i\, dx + B_i\, dy + C_i\, dz, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

por ejemplo, como se probará en el Ejercicio 5,

$$L_1(L_2L_3) = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} dx\, dy\, dz., \tag{57d}$$

y para $(L_1 L_2) L_3$ se obtiene la misma evaluación.

Por supuesto, se puede formar una mayor variedad de productos de formas diferenciales cuando el número de variables independientes es mayor que 3.

Ejercicios 3.6b

1. Evaluar los productos siguientes:
   (a) $(x\, dx + y\, dy)(x\, dx - y\, dy)$
   (b) $[(x^2 + y^2)dx + 2xy\, dy]\ [2xy\, dx + (x^2 - y^2)dy]$
   (c) $(a\, dx + b\, dy)(a\, dy\, dz + b\, dz\, dx + c\, dx\, dy)$
   (d) $(dx + dy + dz)(dy\, dz - dx\, dy)$.
2. Para cualquier forma ω de orden 1 en x, y, z, demostrar que $\omega^2 = 0$.
3. Para las formas de primer orden ω_1, ω_2 en tres variables, demostrar que
$$(\omega_1 + \omega_2)(\omega_1 - \omega_2) = 2\omega_2\omega_1.$$
4. Demostrar, para las formas de primer orden en tres variables, que
$$(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) = 2(\omega_2 + \omega_4)(\omega_1 + \omega_3).$$
5. Deducir (57d).

c. Derivadas exteriores de formas diferenciales

Para una forma diferencial de orden 0, es decir, para un escalar $\alpha(x, y, z)$ por definición se tiene

$$d\alpha = \alpha_x\, dx + \alpha_y\, dy + \alpha_z\, dz. \tag{58a}$$

Los coeficientes de esta forma diferencial son precisamente las componentes del vector que se denotó por grad α en la p. 249. De modo más general, se define la *derivada exterior* $d\omega$ de cualquier forma diferencial ω. Con este fin se escribe ω como una suma de términos, donde cada término es un producto de determinadas diferenciales de la terna dx, dy, dz *precedido* por un factor escalar, y se remplaza cada uno de los factores escalares por su diferencial formada en el sentido ordinario. Así, para una forma de primer orden

$$L = A\, dx + B\, dy + C\, dz,$$

se encuentra para dL la forma diferencial de segundo orden

(58b)

$$\begin{aligned} dL &= dA\, dx + dB\, dy + dC\, dz \\ &= (A_x\, dx + A_y\, dy + A_z\, dz)dx \\ &\quad + (B_x\, dx + B_y\, dy + B_z\, dz)dy + (C_x\, dx + C_y\, dy + C_z\, dz)dz \\ &= (C_y - B_z)dy\, dz + (A_z - C_x)dz\, dx + (B_x - A_y)dx\, dy. \end{aligned}$$

Si se asocia a L el vector $\mathbf{R} = (A, B, C)$, se tiene el hecho notable de que *los coeficientes de dL son precisamente las componentes del rotacional de* $\mathbf{R}$ (ver la p. 252).

Para una forma de segundo orden

$$\omega = a\, dy\, dz + b\, dz\, dx + c\, dx\, dy$$

la derivada exterior $d\omega$ es la forma de tercer orden

$$\begin{aligned} d\omega &= da\, dy\, dz + db\, dz\, dx + dc\, dx\, dy \\ &= (a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz)dy\, dz \\ &\quad + (b_x\, dx + b_y\, dy + b_z\, dz)dz\, dx \\ &\quad + (c_x\, dx + c_y\, dy + c_z\, dz)dx\, dy \\ &= (a_x + b_y + c_z)dx\, dy\, dz. \end{aligned} \tag{58c}$$

De aquí que, si se combinan los coeficientes de ω en el vector $\mathbf{R} = (a, b, c)$, entonces el coeficiente de $d\omega$ es el escalar div $\mathbf{R}$ (ver la p. 253).

La derivada de una forma diferencial de tercer orden es de cuarto orden y, por tanto, se anula.

Una importante regla general ("lema de Poincaré") es que *la segunda derivada exterior de cualquier forma diferencial* ω *se anula:*

$$dd\omega = 0. \tag{58d}$$

En el espacio tres ésto sólo se tiene que probar para los casos en donde ω es de orden 0, o bien, 1. Ahora bien, si ω es un escalar $\alpha(x, y, z)$, por (58a, b) se tiene

$$d^2\omega = d(\alpha_x\, dx + \alpha_y\, dy + \alpha_z\, dz) = 0.$$

En realidad, ésto sólo es una manera diferente de expresar la regla enunciada en la p. 253 de que rot(grad α) $= \mathbf{0}$ para cualquier escalar α. De modo semejante, a partir de (58b, c), para caso de una forma diferencial de primer orden

$$\omega = A\, dx + B\, dy + C\, dz$$

se encuentra que

$$d^2\omega = d[(C_y - B_z)dy\, dz + (A_z - C_x)dz\, dx + (B_x - A_y)dx\, dy] = 0.$$

Nuevamente, ésto no es otra cosa que la regla div(rot$\mathbf{R}$) $= 0$, válida para cualquier vector $\mathbf{R}$ (ver la p. 211).

El problema inverso, de encontrar una forma τ que tenga una forma ω dada como su derivada exterior, es básico. Es posible que se desee representar una forma diferencial ω dada, como

$$\omega = d\tau \tag{58e}$$

con una forma diferencial apropiada τ. Se dirá que ω es una *diferencial exacta, o total,* cuando es posible esa representación. Aplicando la regla (59) a la diferencial τ, se ve que *una condición necesaria para que* ω *sea una diferencial exacta es que* $d\omega = 0$.[1] Resulta que esta condición también es suficiente; es decir, *para* $d\omega = 0$, *la ecuación* (58e) *tiene una solución* τ, *siempre que nos restrinjamos a una vecindad rectangular de un punto* (x_0, y_0, z_0) *interior al dominio de definición*[2] *de* ω.

[1] Las formas ω para las cuales $d\omega = 0$ se llaman *cerradas*.

Se probará esta proposición por separado para cada orden de ω. Si es de orden 1, digamos

$$\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz,$$

entonces, por (58b), la condición $d\omega = 0$ es equivalente a las relaciones

$$C_y - B_z = 0, \quad A_z - C_x = 0, \quad B_x - A_y = 0. \tag{58f}$$

Pero, precisamente, éstas son las *condiciones de integrabilidad* que nos permiten representar a ω como la diferencial total de alguna función f, siempre que el punto (x, y, z) esté restringido a encontrarse en un paralelepípedo rectangular que contenga a (x_0, y_0, z_0) o, más generalmente, un conjunto simplemente conexo (ver la p. 134).

Para ω de orden 2,

$$\omega = a\,dy\,dz + b\,dz\,dx + c\,dx\,dy,$$

por (58c), la condición $d\omega = 0$ es equivalente a

$$a_x + b_y + c_z = 0. \tag{58g}$$

Supóngase que esta condición se satisface en el paralelepípedo rectangular

$$|x - x_0| < r_1, \quad |y - y_0| < r_2, \quad |z - z_0| < r_3.$$

Se tiene que demostrar que $\omega = d\tau$, donde τ es de la forma

$$\tau = A\,dx + B\,dy + C\,dz.$$

Esto significa que tienen que encontrarse las funciones A, B, C para las cuales

$$a = C_y - B_z, \quad b = A_z - C_x, \quad c = B_x - A_y.$$

Tratemos de satisfacer estas ecuaciones haciendo $C \equiv 0$. Entonces A y B tienen que ser de la forma

[2] Siempre se supondrá que las formas diferenciales consideradas aquí tienen coeficientes con tantas derivadas continuas como sean necesarias para que se cumplan los argumentos de que se trate.

$$A(x, y, z) = \alpha(x, y) + \int_{z_0}^{z} b(x, y, \zeta)\, d\zeta,$$

$$B(x, y, z) = \beta(x, y) - \int_{z_0}^{z} a(x, y, \zeta)\, d\zeta$$

para satisfacer las dos primeras ecuaciones. Se concluye, aplicando la condición (58g), que

$$\frac{\partial}{\partial z}(B_x - A_y) = \frac{\partial}{\partial x} B_z - \frac{\partial}{\partial y} A_z = -a_x - b_y = c_z.$$

De aquí que $B_x - A_y - c$ no depende de z. La tercera ecuación $c = B_x - A_y$, se satisfará para toda z en cuestión si se cumple para $z = z_0$. De aquí que sólo se tienen que determinar las funciones $\alpha(x, y)$ y $\beta(x, y)$ de tal manera que

$$\beta_x(x, y) - \alpha_y(x, y) = c(x, y, z_0).$$

Esto se logra, por ejemplo, tomando

$$\alpha(x, y) = 0, \quad \beta(x, y) = \int_{x_0}^{x} c(\xi, y, z_0) d\xi.$$

Por último, para un operador de tercer orden

$$\omega = \alpha(x, y, z) dx\, dy\, dz$$

siempre se satisface la condición $d\omega = 0$. Se desea representar ω en la forma $\omega = d\tau$, donde τ es una forma diferencial de segundo orden

$$\tau = a\, dy\, dz + b\, dz\, dx + c\, dx\, dy.$$

Por (58c), ésto equivale a encontrar funciones a, b, c para las cuales

$$a_x + b_y + c_z = \alpha.$$

Evidentemente, una solución está dada por

$$a(x, y, z) = b(x, y, z) = 0, \qquad c(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} \alpha(x, y, \zeta) d\zeta.$$

Esto prueba el teorema.

Ejercicios 3.6c

1. Evaluar $d\omega$ para cada uno de los casos siguientes:

   (a) $\omega = \arctan y/x$

   (b) $\omega = y\,dx - x\,dy$

   (c) $\omega = f(x, y)\,dx\,dy$

   (d) $\omega = x^2 \cos y \operatorname{sen} z\,dy\,dz - x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z\,dz\,dx + x \cos z\,dx\,dy$

   (e) $\omega = (z^2 - y^2)x\,dy\,dz + (x^2 - z^2)y\,dz\,dx + (y^2 - x^2)z\,dx\,dy.$

2. Para las formas de primer orden en tres variables, demostrar que

$$d(\omega_1\omega_2) = \omega_1(d\omega_2) + (d\omega_1)\omega_2.$$

3. Demostrar que cualquier producto de formas exactas de primer orden en tres variables es exacta.

d. Formas diferenciales exteriores en coordenadas arbitrarias

Hasta aquí siempre se han considerado las formas diferenciales como combinaciones lineales de productos alternantes de las diferenciales dx, dy, dz de las coordenadas cartesianas x, y, z en el espacio. Se hizo un uso esencial de esta representación de las formas en términos de dx, dy, dz al definir el producto de dos formas y la derivada de una forma. La utilidad de las formas diferenciales alternantes en las aplicaciones depende del hecho de que pueden definirse estas formas y llevarse a cabo las operaciones con ellas de la misma manera, cuando el espacio euclidiano tridimensional[1] es referido a *coordenadas curvilíneas* u, v, w. cualesquiera. Más generalmente, ésto se cumple sobre cualquier espacio o *variedad*[2] no euclidianos tridimensionales referidos a los parámetros u, v, w, por ejemplo, sobre una "superficie" tridimensional en el espacio euclidiano tetradimensional. Lo importante es que las operaciones con las formas pueden definirse de una *manera invariante*, sin hacer referencia a un sistema coordenado especial, y que las fórmulas resultantes son semejantes en todos los sistemas.

En este contexto, se piensa en los puntos P del espacio tridimensional, o de una variedad $\sum$ como objetos *geométricos* que existen

[1] Aquí se elige la dimensión 3 sólo en beneficio de la definición. Todas estas consideraciones son igualmente válidas para cualquier otro número de dimensiones.

[2] Por lo general, se usa el término "variedad" para denotar un conjunto dado paramétricamente de cualquier número de dimensiones $m \leqq n$ en el espacio euclidiano n-dimensional.

independientemente de cualquier sistema coordenado. Un escalar f es una función de P con números reales como valores (es decir, una *aplicación* de $\sum$ hacia el eje de los números reales). Sin embargo, existen muchas maneras de describir los puntos P por medio de *coordenadas curvilíneas*, es decir, por medio de ternas de números (u, v, w); por ejemplo, pueden usarse coordenadas rectangulares o coordenadas esféricas en el espacio euclidiano. Siempre supondremos que dos sistemas coordenados cualesquiera de ese tipo, digamos u, v, w y u', v', w', están relacionados por las ecuaciones de transformación

$$u' = \phi(u, v, w), \quad v' = \psi(u, v, w), \quad w' = \chi(u, v, w),$$

donde ϕ, ψ, χ son funciones continuas con tantas derivadas continuas como se requieran para las operaciones consideradas, y con un jacobiano $\dfrac{d(u', v', w')}{d(u, v, w)}$ que no se anula.[2] En ese caso, u, v, w pueden expresarse mediante fórmulas semejantes en términos de u', v', w'. En un sistema coordenado dado, u, v, w un escalar $f = f(P)$ se convierte en una función $f(u\ v, w)$ de las coordenadas u, v, w del punto P. En general, en sistemas coordenados diferentes las funciones que representan el mismo escalar son bastante diferentes.

Sobre la variedad $\sum$, sea C una curva con la representación paramétrica $P = P(t)$; con cada número real t de un cierto intervalo, la ecuación paramétrica asocia un punto P de la variedad $\sum$. Cualquier escalar $f(P)$ definido sobre $\sum$ proporciona una función de t a lo largo de C, obtenida formando la composición $f(P(t))$. Si esta función es diferenciable tiene sentido formar la derivada df/dt, la cual está definida para la curva dada y la representación paramétrica de C, independientemente de cualquier sistema coordenado curvilíneo usado para $\sum$. En un sistema coordenado dado las propias coordenadas u, v, w de un punto P son funciones $u = u(t), v = v(t)$, $w = w(t)$; y $f(P(t))$ está dada por la función compuesta $f(u(t), v(t), w(t))$. Suponiendo que $f(u, v, w)$ y $u(t), v(t), w(t)$ tienen derivadas continuas, por la regla de la cadena de la derivación se encuentra que en el sistema particular u, v, w, df/dt toma la forma

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dt}. \tag{59}$$

[2]La representación particular de la transformación que comprende las funciones uniformes ϕ, ψ, χ sólo necesita ser válida localmente, es decir, en una vecindad lo suficientemente pequeña de algún punto.

Una forma diferencial de orden cero en Σ es precisamente un escalar f. La forma diferencial general de primer orden, ω, se define como una expresión formal del tipo

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} a_i \, df_i,$$

donde $a_1, \ldots, a_N, f_1, \ldots, f_N$ son escalares dados. A lo largo de cualquier curva C referida a un parámetro t, con ω se asocia la función de t, denotada por ω/dt, que se define por

$$\frac{\omega}{dt} = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{df_i}{dt}.$$

Dos formas,

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} a_i \, df_i \qquad \text{y} \qquad \omega' = \sum_{i=1}^{m} b_i \, dg_i ,$$

se consideran iguales si

$$\frac{\omega}{dt} = \frac{\omega'}{dt}$$

para cualquier curva C y cualquier parámetro t a lo largo de c.

En un sistema coordenado u, v, w particular, ω/dt se convierte en

$$\frac{\omega}{dt} = \sum_{i=1}^{N} a_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f_i}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f_i}{\partial w} \frac{dw}{dt} \right) = A \frac{du}{dt} + B \frac{dv}{dt} + C \frac{dw}{dt},$$

donde

$$A = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial f_i}{\partial u}, \qquad B = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial f_i}{\partial v}, \qquad C = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial f_i}{\partial w}$$

son escalares definidos en Σ. Debido a la definición de igualdad de formas diferenciales de primer orden, se puede escribir ω como

$$\omega = A \, du + B \, dv + C \, dw$$

Aquí los coeficientes A, B, C de ω, referidos a un sistema coordenado u, v, w particular, están determinados de modo único; porque si para la curva C se toma una "línea coordenada", digamos $u = t$, $v =$ constante, $w =$ constante, se encuentra

$$\frac{\omega}{dt} = \frac{\omega}{du} = A,$$

y, de modo semejante,

$$\frac{\omega}{dv} = B, \qquad \frac{\omega}{dw} = C.$$

De donde en cualquier sistema coordenado u, v, w, particular ω se puede escribir como

$$\omega = \frac{\omega}{du}\,du + \frac{\omega}{dv}\,dv + \frac{\omega}{dw}\,dw, \tag{60}$$

donde ω/du en realidad representa la derivada parcial que se forma a lo largo de una curva donde v y w son constantes. Esta fórmula puede considerarse como una extensión de la regla de la cadena (59), partiendo de la diferencial df de cualquier escalar f y extendiéndola a una forma diferencial general de primer orden, ω.

Exactamente de la misma manera puede ahora definirse una *forma diferencial alternante de segundo orden*, ω, como una expresión formal del tipo

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} a_i\, df_i\, dg_i, \tag{61a}$$

donde $a_1, \ldots, a_N, f_1, \ldots, f_N, g_1, \ldots, g_N$ son escalares definidos sobre $\sum$. Sobre cualquier superficie S en $\sum$, referida a los parámetros $s, t,$ con la forma ω se asocian los valores $\omega/ds\,dt$ definidos por

$$\frac{\omega}{ds\,dt} = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d(f_i, g_i)}{d(s, t)} = \sum_{i=1}^{N} a_i \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_i}{\partial s} & \dfrac{\partial f_i}{\partial t} \\ \dfrac{\partial g_i}{\partial s} & \dfrac{\partial g_i}{\partial t} \end{vmatrix}. \tag{61b}$$

Dos formas, ω y ω', aunque se representen con la ayuda de escalares diferentes se consideran idénticas cuando determinan los mismos valores $\omega/ds\,dt = \omega'/ds\,dt$ sobre cada una de las superficies correspondientes a todas las representaciones paramétricas. Ahora bien, en cualquier sistema coordenado u, v, w particular, para dos ecalares f, g se tiene

Esto es equivalente a la fórmula

(63c) $$dL = \sum_i da_i\, df_i,$$

y muestra que la forma de segundo orden dL no depende de la representación particular (63a) de L en términos de los escalares a_i, f_i. Es la generalización natural de la fórmula (58b) para el caso especial de la derivada de una forma L expresada como $L = A\,dx + B\,dy + C\,dz$.

En el caso particular en que la forma de primer orden, L, es una diferencial total —es decir, $L = df$ con un escalar f— de (63c) se encuentra, por supuesto, que $dL = 0$. Por lo tanto, para un operador f de orden 0 se cumple la regla

$$ddf = 0$$

Cuando L se representa en términos de un sistema coordenado u, v, w particular en el espacio, por medio de la forma estándar

$$L = A\,du + B\,dv + C\,dw,$$

de (61f), (63b) se encuentra que

$$\begin{aligned} dL &= dA\,du + dB\,dv + dC\,dw \\ &= \frac{dL}{dv\,dw}\,dv\,dw + \frac{dL}{dw\,du}\,dw\,du + \frac{dL}{duv}\,du\,dv \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{L}{dw} - \frac{\partial}{\partial w}\,\frac{L}{dv}\right)dv\,dw + \left(\frac{\partial}{\partial w}\,\frac{L}{du} - \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{L}{dw}\right)dw\,dv \\ &\qquad + \left(\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{L}{dv} - \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{L}{du}\right)du\,dv \\ &= (C_v - B_w)\,dv\,dw + (A_w - C_u)\,dw\,du + (B_u - A_v)\,du\,dv, \end{aligned}$$

lo que concuerda con la fórmula (58b).

Si $dL = 0$, se obtiene, como antes, que $C_v - B_w = A_w - C_u = B_u - A_v = 0$. Se concluye que localmente existe un escalar f para el cual $A = f_u$, $B = f_v$, $C = f_w$, o bien $L = df$.

Finalmente, se define una forma diferencial alternante de tercer orden por una expresión formal

(64a) $$\omega = \sum_{i=1}^{N} a_i\, df_i\, dg_i\, dh_i\,,$$

El *producto* LM de dos formas de primer orden,

(62a) $$L = \sum_i a_i\, df_i, \qquad M = \sum_i b_k\, dg_k,$$

sobre una superficie con parámetros s, t, se define como aquella forma de segundo orden, ω, para la cual

(62b) $$\begin{aligned}\frac{\omega}{ds\,dt} &= \frac{L}{ds}\frac{M}{dt} - \frac{L}{dt}\frac{M}{ds}\\ &= \sum_i a_i \frac{\partial f_i}{\partial s}\sum_k b_k \frac{\partial g_k}{\partial t} - \sum_i a_i \frac{\partial f_i}{\partial t}\sum_k b_k \frac{\partial g_k}{\partial s}\\ &= \sum_{i,k} a_i b_k \frac{d(f_i, g_k)}{d(s, t)}.\end{aligned}$$ [1]

Consecuentemente, si L y M están dadas por (62a), LM puede identificarse con la forma de segundo orden

(62c) $$\omega = \sum_{i,k} a_i b_k\, df_i\, dg_k.$$

Sin embargo, la definición de $\omega/\,ds\,dt$ dada por (62b) no depende de la representación particular de L y M en términos de los escalares a_i, f_i, b_k, g_k; de aquí que la fórmula (62c) debe representar la misma forma $\omega = LM$ para todas las representaciones de los factores L, M.

Otra manera de generar formas de segundo orden a partir de las de primer orden es derivando. Dada la forma de primer orden

(63a) $$L = \sum_i a_i df_i,$$

puede definirse dL sin hacer referencia a algún sistema coordenado particular, por medio de la prescripción

(63b) $$\begin{aligned}\frac{dL}{ds\,dt} &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{L}{dt} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{L}{ds}\\ &= \frac{\partial}{\partial s}\sum_i a_i \frac{\partial f_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\sum_i a_i \frac{\partial f_i}{\partial s}\\ &= \sum_i \left(\frac{\partial a_i}{\partial s}\frac{\partial f_i}{\partial t} - \frac{\partial a_i}{\partial t}\frac{\partial f_i}{\partial s}\right) = \sum \frac{d(a_i, f_i)}{d(s, t)}.\end{aligned}$$

[1] Aquí M/ds y M/dt denotan la derivación (o derivada) "parcial" con t y s, respectivamente, mantenidas constantes. (Difícilmente puede hacerse una distinción consistente entre la derivación ordinaria y la parcial.)

$$= \sum_{i,k} a_i b_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial r} \frac{d(g_k, h_k)}{d(s, t)} + \frac{\partial f_i}{\partial s} \frac{d(g_k, h_k)}{d(t, r)} + \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{d(g_k, h_k)}{d(r, s)} \right)$$
$$= \sum_{i,k} a_i b_k \frac{d(f_i, g_k, h_k)}{d(r, s, t)} .$$

Esto equivale a la fórmula

$$L\omega = \sum_{i,k} a_i b_k \, df_i \, dg_k \, dh_k, \tag{65a}$$

como puede esperarse a partir de la multiplicación formal de las expresiones para L y ω. Cuando L y ω están en su forma estándar

$$L = A\,du + B\,dv + C\,dw, \quad \omega = a\,dv\,dw + b\,dw\,du + c\,du\,dv$$

para un sistema coordenado u, v, w dado, el producto se convierte en

$$L\omega = (Aa + Bb + Cc)\,du\,dv\,dw, \tag{65b}$$

en acuerdo con (57c).

La derivada de la forma de segundo orden

$$\omega = \sum a_i \, dg_i \, dh_i$$

se puede definir independientemente de cualquier sistemacoordenado especial, por la regla

$$\frac{d\omega}{dr\,ds\,dt} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\omega}{ds\,dt} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\omega}{dt\,dr} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\omega}{dr\,ds}$$
$$= \frac{\partial}{\partial r} \sum_i a_i \frac{d(g_i, h_i)}{d(s, t)} + \frac{\partial}{\partial s} \sum_i a_i \frac{d(g_i, h_i)}{d(t, r)} + \frac{\partial}{\partial t} \sum_i a_i \frac{d(g_i, h_i)}{d(r, s)} .$$

Así,

$$\frac{d\omega}{dr\,ds\,dt} = \sum_i \frac{d(a_i, g_i, h_i)}{d(r, s, t)} , \tag{66a}$$

como se verifica fácilmente. De aquí que la definición dada para $d\omega$ implica que

$$d\omega = \sum_i da_i \, dg_i \, dh_i. \tag{66b}$$

Para ω en la forma estándar

con escalares a_i, f_i, g_i, h_i. En cualquier sistema paramétrico r, s, t en el espacio, (64a) define los valores

$$\frac{\omega}{dr\,ds\,dt} = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d(f_i, g_i, h_i)}{d(r, s, t)}. \tag{64b}$$

Con referencia a un sistema coordenado u, v, w particular se puede escribir

$$\frac{\omega}{dr\,ds\,dt} = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d(f_i, g_i, h_i)}{d(u, v, w)} \frac{d(u, v, w)}{d(r, s, t)}. \tag{64c}$$

Esto equivale a la identidad

$$\omega = \alpha\, du\, dv\, dw, \tag{64d}$$

donde

$$\alpha = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d(f_i, g_i, h_i)}{d(u, v, w)}. \tag{64e}$$ [1]

Se puede definir el producto $L\omega$ de una forma de primer orden,

$$L = \sum_i a_i\, df_i,$$

y una forma de segundo orden,

$$\omega = \sum_k b_k\, dg_k\, dh_k,$$

especificando que

$$\frac{L\omega}{dr\,ds\,dt} = \frac{L}{dr}\frac{\omega}{ds\,dt} + \frac{L}{ds}\frac{\omega}{dt\,dr} + \frac{L}{dt}\frac{\omega}{dr\,ds}$$

[1] En el espacio n dimensional, referida a los parámetros $u_1, \ldots, u_n$, en lugar de (64c, d, e) se tiene la fórmula

$$\omega = \sum_{\substack{j,k,m=1,\ldots,n \\ j<k<m}} A_{jkm}\, du_j\, du_k\, du_m,$$

donde

$$A_{jkm} = \sum_i a_i \frac{d(f_i, g_i, h_i)}{d(u_j, u_k, u_m)} = \frac{\omega}{du_j\, du_k\, du_m}.$$

$f(x, y)$ para todo $(x, y) \neq (x_1, y_1)$ en R. El teorema básico de la p. 144 nos asegura que *si R es un conjunto cerrado y acotado y f es continua en R, entonces existen puntos en R donde f tiene su máximo y también puntos donde f tiene su mínimo.*

Como un ejemplo, considérese la función $u = x^2 + y^2$ en el disco cerrado dado por $x^2 + y^2 < 1$. La superficie S es la porción del paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$ que se encuentra por debajo del plano $z = 1$. Aquí los máximos de f ocurren en todos los puntos del círculo frontera $x^2 + y^2 = 1$, mientras que f tiene un *mínimo estricto* en el origen.

El cálculo se aplica directamente a la determinación de los máximos o mínimos *relativos,* en lugar de los extremos absolutos. Un punto (x_0, y_0) del dominio R es un *máximo relativo* si $f(x_0, y_0) \geqq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) de R que se encuentren en una vecindad lo suficientemente pequeña de (x_0, y_0). El valor $f(x_0, y_0)$ en un máximo relativo no tiene que ser el mayor valor de f en todo R, sino que es un máximo de f si nos restringimos a puntos lo suficientemente próximos a (x_0, y_0). Los mínimos relativos se definen de manera análoga. Todo máximo (mínimo) absoluto también es un máximo (mínimo) relativo, pero la recíproca no se cumple.

Por ejemplo, la función $u = (x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2)$, cuyo dominio sea el disco abierto $x^2 + y^2 < 4$, no tiene máximo pero tiene un máximo relativo en el orgien. Todos los puntos sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ son puntos mínimos. Aquí la superficie S se genera haciendo girar la curva $z = x^6 - 3x^2$ alrededor del eje z.

Las definiciones de mínimos absolutos o relativos para funciones $u = f(x, y, z, \ldots)$ de más variables independientes son enteramente semejantes.

Se darán primero las condiciones *necesarias* para la ocurrencia de un máximo o mínimo relativo en un punto *interior* (x_0, y_0) del dominio R de la función $f(x, y)$. Usaremos el término extremo relativo para incluir tanto a los máximos como a los mínimos. Sea ahora (x_0, y_0) un punto interior del dominio R de la función $f(x, y)$, y supóngase que f tiene las derivadas parciales $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ en ese punto. *Para que ocurra un extremo relativo de f en el punto (x_0, y_0), es necesario que:*

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f_y(x_0, y_0) = 0. \tag{67a}$$

Las condiciones (67a) se deducen inmediatamente a partir de las conocidas condiciones para las funciones de una sola variable. Pón-

(66c) $$\omega = a\,dv\,dw + b\,dw\,du + c\,du\,dv$$

se obtiene

(66d) $$d\omega = (a_u + b_v + c_w)du\,dv\,dw.$$

Puede usarse nuevamente esta representación especial para $d\omega$, como en la p. 315, para demostrar que una forma de segundo orden ω con $d\omega = 0$ es representable localmente como $\omega = dL$, donde L es una forma diferencial de primer orden apropiada.

Ejercicios 3.6d

1. En las coordenadas esféricas $x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho\cos\phi$, elíjanse los vectores unitarios $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ en la dirección de las líneas r, ϕ, θ respectivamente. Demostrar que $d\mathbf{X} = (dx, dy, dz) = \mathbf{u}d\rho + \mathbf{v}\rho d\phi + \mathbf{w}\rho \operatorname{sen}\phi\, d\theta$. De aquí, encontrar la expresión para $\nabla f(\rho, \phi, \theta)$ en coordenadas esféricas, donde ∇f se define por $\nabla f \cdot d\mathbf{X} = df$.

3.7 Máximos y mínimos

a. Condiciones necesarias

Para las funciones de varias variables, como para las funciones de una sola variable, una de las aplicaciones más importantes de la derivación es la teoría de los máximos y mínimos.

Empezaremos por considerar una función $u = f(x, y)$ de las dos variables independientes x, y. El *dominio* de la función será un cierto conjunto R en el plano x, y. Puede representarse f en el espacio x, y, z por la superficie S con ecuación $z = f(x, y)$. Se dice que $f(x, y)$ tiene un *máximo*[1] en el punto (x_0, y_0) de su dominio R, si $f(x_0, y_0) \geqq f(x, y)$ para todo (x, y) en R. Tal máximo corresponde a uno de los puntos más elevados de la superficie S. Se habla de un *máximo estricto* si, realmente, $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ para todo (x, y) en R que sea diferente de (x_0, y_0), de modo que el valor máximo de la función únicamente se alcanza en el punto (x_0, y_0). De modo semejante, se dice que $f(x, y)$ tiene un *mínimo* en el punto (x_1, y_1) de R si $f(x_1, y_1) \leqq f(x, y)$ para todo (x, y) en R, un *mínimo estricto* si $f(x_1, y_1) <$

[1]También llamado *máximo absoluto,* en contraste con el *maximo relativo* que se define a continuación. La terminología usada aquí es exactamente la misma que para las funciones de una sola variable; ver el Volumen I (pp. 238 y siguientes).

tiene punto máximo ni mínimo sino que tiene un *punto silla de montar* (o simplemente, *punto silla*) en el origen (ver la Fig. 3.1).

Se ve que los puntos máximo y mínimo de una función diferenciable se encuentran sobre la frontera del dominio o se tienen que buscar entre sus puntos críticos. Para decidir si, en realidad, un punto crítico es un máximo o mínimo se requiere una investigación especial. En la p. 349 se encontrarán las condiciones que son suficientes para asegurar que un punto crítico es al menos un extremo relativo.

El *valor máximo* M de una función $f(x, y)$ es el mayor de todos los valores alcanzados por f en los puntos de su dominio R. Los puntos máximos de f son aquellos para los cuales $f(x, y) = M$.[1] De modo semejante, los *valores críticos* o *estacionarios* de f son aquellos que alcanza en los puntos críticos o estacionarios.

b. Ejemplos

1. La función

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad (x^2 + y^2 < 1)$$

tiene las derivadas parciales

$$u_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \qquad u_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

y éstas se anulan en el origen. Aquí se tiene un máximo, porque en todos los demás puntos (x, y) en la vecindad del origen la cantidad $1 - x^2 - y^2$ en el radicando es menor que la que se tiene en el origen.

2. Se desea construir el triángulo para el cual el producto de los senos de los tres ángulos sea máximo; es decir, se desea encontrar el máximo de la función

$$f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x + y)$$

en la región $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$, $0 \leqq x + y \leqq \pi$. Como f es positiva en el interior de esta región, su valor máximo es positivo. Sobre la frontera de la región, donde se cumple el signo de igualdad en al

[1] A veces se usa el término "máximo" en una forma un tanto ambigua, refiriéndose ya sea al valor máximo o a un punto argumento (x, y) donde f toma su valor máximo.

gase $\phi(x) = f(x, y_0)$. Entonces $\phi(x)$ está definida para toda x lo suficientemente próxima a x_0 y tiene en x_0 la derivada $\phi'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$. Si $f(x_0, y_0) \geqq f(x, y)$ para todo (x, y) en R que esté lo suficientemente próximo a (x_0, y_0), entonces, en particular, $\phi(x_0) \geqq \phi(x)$ para toda x lo suficientemente próxima a x_0. Se concluye (ver el Volumen I, p. 241) que $\phi'(x_0) = 0$; ésto es, $f_x(x_0, y_0) = 0$. De modo semejante se deduce la segunda condición necesaria, $f_y(x_0, y_0) = 0$

Geométricamente, la anulación de las derivadas parciales de $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) significa que en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ es paralelo al plano x, y. Se dice que (x_0, y_0) es un punto *estacionario* o *crítico* de $f(x, y)$ si las primeras derivadas $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ ambas existen y se anulan. De aquí que todo extremo relativo en el interior del dominio de una función diferenciable f es un punto crítico de f.

El mismo resultado se aplica a las funciones $f(x, y, z, \ldots)$ de cualquier número de variables independientes. Aquí $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ es un punto *estacionario* o *crítico* de f si todas las primeras derivadas $f_x, f_y, \ldots$ en ese punto existen y satisfacen

$$\text{(67b)} \qquad \begin{aligned} &f_x(x_0, y_0, z_0, \ldots) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0, \ldots) = 0, \\ &f_z(x_0, y_0, z_0, \ldots) = 0, \ldots. \end{aligned}$$

El número de condiciones es igual al de variables independientes $x, y, z \ldots$. Pueden combinarse las condiciones en el requerimiento único de que

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz + \cdots = 0$$

para $(x, y, z, \ldots) = (x_0, y_0, z_0, \ldots)$ y todas las $dx, dy, dz, \ldots$.

Como el número de las ecuaciones (67b) es igual al número de incógnitas $x_0, y_0, z_0, \ldots$, comúnmente se espera encontrar un número finito de puntos críticos, aunque, por supuesto, no siempre es así. Es más, un punto crítico no necesariamente tiene que ser un extremo relativo

Considérese, por ejemplo, la función $u = xy$. Las dos ecuaciones (67a) inmediatamente dan el punto $x = 0, y = 0$ como el único punto crítico. Sin embargo, en toda vecindad de $(0, 0)$, la función puede tomar tanto valores positivos como negativos, dependiendo del cuadrante que contenga a (x, y). Por lo tanto, la función no tiene extremo relativo en este punto. Geométricamente, la superficie que representa a la función $u = xy$ es un paraboloide hiperbólico que no tiene punto máximo ni mínimo sino que tiene un *punto silla de montar* (o simplemente, *punto silla*) en el origen (ver la Fig. 3.1).

Se ve que los puntos máximo y mínimo de una función diferenciable se encuentran sobre la frontera del dominio o se tienen que buscar entre sus puntos críticos. Para decidir si, en realidad, un punto crítico es un máximo o mínimo se requiere una investigación especial. En la p. 349 se encontrarán las condiciones que son suficientes para asegurar que un punto crítico es al menos un extremo relativo.

El *valor máximo* M de una función $f(x, y)$ es el mayor de todos los valores alcanzados por f en los puntos de su dominio R. Los puntos máximos de f son aquellos para los cuales $f(x, y) = M$.[1] De modo semejante, los *valores críticos* o *estacionarios* de f son aquellos que alcanza en los puntos críticos o estacionarios.

b. Ejemplos

1. La función

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad (x^2 + y^2 < 1)$$

tiene las derivadas parciales

$$u_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \qquad u_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

y éstas se anulan en el origen. Aquí se tiene un máximo, porque en todos los demás puntos (x, y) en la vecindad del origen la cantidad $1 - x^2 - y^2$ en el radicando es menor que la que se tiene en el origen.

2. Se desea construir el triángulo para el cual el producto de los senos de los tres ángulos sea máximo; es decir, se desea encontrar el máximo de la función

$$f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x + y)$$

en la región $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$, $0 \leqq x + y \leqq \pi$. Como f es positiva en el interior de esta región, su valor máximo es positivo. Sobre la frontera de la región, donde se cumple el signo de igualdad en al

[1] A veces se usa el término "máximo" en una forma un tanto ambigua, refiriéndose ya sea al valor máximo o a un punto argumento (x, y) donde f toma su valor máximo.

menos una de las desigualdades que la definen, se tiene $f(x, y) = 0$, de modo que el valor máximo se debe encontrar en el interior.

Si se igualan las derivadas a 0 se obtienen las dos ecuaciones

$$\cos x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos(x+y) = 0,$$

$$\operatorname{sen} x \cos y \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos(x+y) = 0.$$

Supuesto que $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$, $0 < x + y < \pi$, éstas dan $\tan x = \tan y$, o bien, $x = y$. Si se sustituye este valor en la primera ecuación se obtiene la relación $\operatorname{sen} 3x = 0$; de aquí que $x = \pi/3$, $y = \pi/3$ es el único punto estacionario y el triángulo requerido es equilátero.

3. Tres puntos P_1, P_2, P_3, con coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), y (x_3, y_3), respectivamente, son los vértices de un triángulo acutángulo. Se desea encontrar un cuarto punto P con coordenadas (x, y) tal que la suma de sus distancias a P_1, P_2, y P_3 sea la menor posible. Esta suma de distancias es una función continua de x y y, y en algún punto P interior a un círculo grande que encierre al triángulo tiene un valor mínimo. Este punto P no puede estar en un vértice del triángulo, porque entonces el pie de la perpendicular bajada desde cualquiera de los otros dos vértices a su lado opuesto correspondería a una suma menor de las distancias. Nuevamente, P no puede estar sobre la circunferencia del círculo, si ésta está lo suficientemente alejada del triángulo. Con las distancias r_i definidas por

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

se desea minimizar la función

$$f(x, y) = r_1 + r_2 + r_3,$$

la cual es diferenciable en todo punto excepto en P_1, P_2, y P_3. Se sabe que en el punto P las derivadas parciales con respecto a x y a y deben anularse. Por tanto, derivando f se obtienen las condiciones

$$\frac{x - x_1}{r_1} + \frac{x - x_2}{r_2} + \frac{x - x_3}{r_3} = 0,$$

$$\frac{y - y_1}{r_1} + \frac{y - y_2}{r_2} + \frac{y - y_3}{r_3} = 0$$

para P. De acuerdo con estas ecuaciones, los tres vectores coplanares

$$\left(\frac{x_1 - x}{r_1}, \frac{y_1 - y}{r_1}\right), \quad \left(\frac{x_2 - x}{r_2}, \frac{y_2 - y}{r_2}\right), \quad \left(\frac{x_3 - x}{r_3}, \frac{y_3 - y}{r_3}\right)$$

tienen el vector suma **0.** También, cada uno de estos vectores tiene longitud unitaria. Cuando se les da el punto inicial común P sus puntos finales forman un triángulo equilátero; es decir, cada vector se hace coincidir con el que le sigue haciéndolo girar un ángulo de $\frac{2}{3}\pi$ (Fig. 3.27). Como estos tres vectores tienen las mismas direcciones que los tres vectores desde P hacia P_1, P_2, P_3, se deduce que cada uno de los tres lados del triángulo debe subtender el mismo ángulo $\frac{2}{3}\pi$ en el punto P.

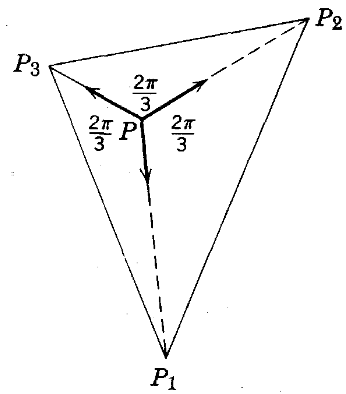

Figura 3.27

Ejercicios 3.7b

1. Encontrar los puntos estacionarios de las funciones siguientes, y establecer su naturaleza:
   (a) $f(x, y) = y^2(\operatorname{sen} x - x/2)$
   (b) $f(x, y) = \cos(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)$
   (c) $f(x, y) = y^x$
   (d) $f(x, y) = x/y$
   (e) $f(x, y) = ye^{-x^2}$.

2. Determinar los máximos y mínimos de la función

$$(ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2} \qquad (0 < a < b).$$

3. Encontrar los valores de x, y que hagan estacionaria a

$$2x^3 + (x - y)^2 - 6y$$

4. La suma de las longitudes de las 12 aristas de un bloque rectangular es a; la suma de las áreas de las 6 caras es $a^2/25$. Calcular las longitudes de las aristas cuando es máximo el exceso del volumen del bloque sobre el de un cubo cuya arista es igual a la menor arista del bloque.
5. Encontrar los puntos estacionarios y establecer su naturaleza, para la función.

$$f(x, y, z) = x^2(y-1)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2.$$

6. De acuerdo con las presentes normas postales en los Estados Unidos, se puede transportar un bulto rectangular con longitudes de sus lados iguales a x, y, z pulgadas, con $x \leqq y \leqq z$ sólo si $2(x+y)+z \leqq 100$. Encontrar el volumen máximo de un bulto transportable bajo esta condición. [Sugerencia. Hágase $z = 100 - 2(x+y)$.]
7. Minimizar la suma de los cuadrados de las distancias de un punto $\mathbf{X}$ a n puntos dados.

c. Máximos y mínimos con condiciones subsidiarias

El problema de determinar los máximos y mínimos de funciones de varias variables frecuentemente se presenta en una forma diferente. Por ejemplo, es posible que se desee hallar el punto de una superficie dada $\phi(x, y, z) = 0$ más próximo al origen. Entonces se tiene que minimizar la función

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

donde, empero, las cantidades x, y, z ya no son tres variables *independientes* sino que están relacionadas a través de la ecuación de la superficie $\phi(x, y, z) = 0$ como una condición subsidiaria. De hecho, tales máximos y mínimos con condiciones subsidiarias no representan un problema fundamentalmente nuevo. Así, en el ejemplo sólo se requiere resolver una de las variables, digamos z, como una función de las otras dos, para reducir el problema al de determinar los valores estacionarios de una función de las dos variables independientes x, y.

No obstante, es más conveniente y también más elegante expresar las condiciones para un valor estacionario en una forma simétrica, en la cual no se da preferencia a ninguna de las variables.

Un caso típico sencillo lo presenta el problema de *encontrar los valores estacionarios de una función $f(x, y)$, cuando las dos variables x, y no son mutuamente independientes sino que están relacionadas por medio de una condición subsidiaria*

$$\phi(x, y) = 0.$$

Con el fin de tener una visión geométrica, supóngase primero que la condición subsidiaria se representa, como en la Fig. 3.28, por una curva en el plano x, y sin singularidades y que, además, la familia de curvas $f(x, y) = c =$ constante cubre una porción del plano, como en la figura. Entre las curvas de la familia que se cortan con la curva

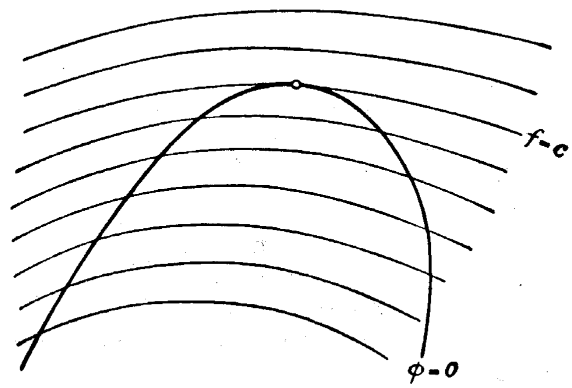

Figura 3.28 Valor extremo de f con la condición subsidiaria $\phi = 0$.

$\phi = 0$, se tiene que encontrar aquella para la cual la constante c es máxima o mínima. Conforme se describe la curva $\phi = 0$, se cruzan las curvas $f(x, y) = c$, y en general, c cambia monótonamente; en el punto en donde se invierte el sentido en el que se recorre la escala c, se puede esperar tener un valor extremo. En la Fig. 3.28 se ve que ésto ocurre para la curva de la familia que toca a la curva $\phi = 0$. Las coordenadas del punto de contacto serán los valores requeridos $x = \xi$, $y = \eta$ correspondientes al valor extremo de $f(x, y)$. Si las dos curvas $f =$ constante y $\phi = 0$ se tocan, tienen la misma tangente. De donde, en el punto $x = \xi$, $y = \eta$, se cumple la relación proporcional

$$f_x : f_y = \phi_x : \phi_y;$$

o bien, si se introduce la constante de proporcionalidad λ, se satisfacen las dos ecuaciones

$$f_x + \lambda\phi_x = 0$$
$$f_y + \lambda\phi_y = 0$$

Estas, junto con la ecuación

$$\phi(x, y) = 0,$$

sirven para determinar las coordenadas (ξ, η) del punto de contacto y también la constante de proporcionalidad λ.

Este argumento puede fallar, por ejemplo, cuando la curva $\phi = 0$ tiene un punto singular (digamos una cúspide, como en la Fig. 3.29) en el punto (ξ, η) en el cual encuentra a una curva $f = c$, con la c más grande o más pequeña posible. En este caso, sin embargo, se tienen las dos condiciones

$$\phi_x(\xi, \eta) = 0 \qquad \text{y} \qquad \phi_y(\xi, \eta) = 0.$$

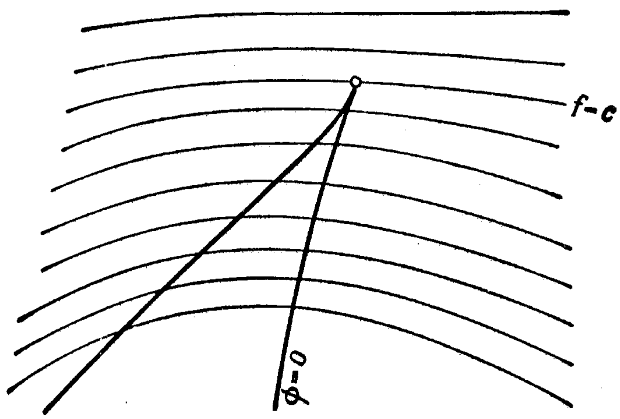

Figura 3.29 Valor extremo en un punto singular de $\phi = 0$

Se ha llegado intuitivamente a la regla que sigue, la cual se probará en la subsección siguiente:

Para que pueda ocurrir un valor extremo de la función $f(x, y)$ *con la condición subsidiaria* $\phi(x, y) = 0$, *en el punto* $x = \xi$, $y = \eta$, *donde no se anulan simultáneamente* $\phi_x(\xi, \eta)$ *y* $\phi_y(\xi, \eta)$ *debe existir una constante de proporcionalidad* λ *tal que se satisfagan las dos ecuaciones*

$$f_x(\xi, \eta) + \lambda\phi_x(\xi, \eta) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y(\xi, \eta) + \lambda\phi_y(\xi, \eta) = 0 \tag{67c}$$

junto con la ecuación

$$\phi(\xi, \eta) = 0. \tag{67d}$$

Este se conoce como *método de Lagrange de los multiplicadores indeterminados* y el factor λ es el *multiplicador de Lagrange*.

Se observa que esta regla da tantas ecuaciones para la determinación de las cantidades ξ, η, y λ como incógnitas existen. Por lo tanto, se ha remplazado el problema de encontrar las posiciones de los valores extremos (ξ, η) por un problema en el que existe una incógnita adicional, λ, pero en el que se tiene la ventaja de la completa simetría. Normalmente, la regla de Lagrange se expresa del modo siguiente:

Para encontrar los valores extremos de la función $f(x, y)$ sujeta a la condición subsidiaria $\phi(x, y) = 0$, a $f(x, y)$ se le agrega el producto de $\phi(x, y)$ y un factor desconocido λ independiente de x y y, y se escriben las condiciones necesarias conocidas,

$$f_x + \lambda\phi_x = 0, \qquad f_y + \lambda\phi_y = 0,$$

para un valor extremo de $F = f + \lambda\phi$. En conjunción con la condición subsidiaria $\phi = 0$, éstas sirven para determinar las coordenadas del punto extremo y la constante de proporcionalidad.

Como un ejemplo, encontremos los valores extremos de la función

$$u = xy$$

sobre el círculo con radio unitario y centro en el origen, es decir, con la condición subsidiaria

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

De acuerdo con la regla dada, derivando $xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ con respecto a x y a y se encuentra que, en los puntos estacionarios, tienen que satisfacerse las dos ecuaciones

$$y + 2\lambda x = 0$$

$$x + 2\lambda y = 0$$

Además, se tiene la condición subsidiaria

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Resolviendo, se obtienen los cuatro puntos

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \eta = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\xi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \eta = -\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \eta = -\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\xi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \eta = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

Los dos primeros puntos dan un valor máximo $u = \frac{1}{2}$, y los dos segundos, un valor mínimo $u = -\frac{1}{2}$, para la función $u = xy$. Que los dos primeros realmente dan el valor máximo y los dos segundos el valor mínimo de la función u, se deduce a partir del hecho de que sobre la circunferencia la función debe tomar un valor máximo y un valor mínimo (ver la p. 376), puesto que la circunferencia es cerrada y acotada.

Ejercicios 3.7c

1. Resolver el Ejercicio 6 de la Sección 3.7b como un problema de maximizar el volumen sujeto a la condición $2(x + y) + z = 100$.
2. Minimizar la función $z = x^2y^2$ sujeta a la condición $x + y = 1$.
3. Maximizar la función $z = \cos \pi (x + y)$ sujeta a la condición $x^2 + y^2 = 1$.
4. En el plano, minimizar la suma de los cuadrados de las distancias de un punto $\mathbf{X}$ a n puntos dados, sujeta a la condición de que $\mathbf{X}$ está sobre una recta dada (comparar con la Sección 3.7b, Ejercicio 7).
5. Si $C = f(a, b)$ es un máximo o mínimo verdadero de $f(x, y)$ sujeto a la condición $\phi(x, y) = C'$, demostrar que, en general, $C' = \phi(a, b)$ es un máximo o mínimo verdadero de $\phi(x, y)$ sujeto a la condición $f(x, y) = C$.

d. *Demostración del método de los multiplicadores indeterminados en el caso más sencillo*

Como es de esperar, se llega a una demostración analítica del método de los multiplicadores indeterminados, reduciéndolo al caso conocido de los valores extremos "libres". Se supondrá que en un punto extremo no se anulan simultáneamente las dos derivadas parciales $\phi_x(\xi, \eta)$ y $\phi_y(\xi, \eta)$; para se específicos, supóngase que $\phi_y(\xi, \eta) \neq 0$. Entonces, por el teorema de la función implícita (p. 266), en una vecindad de este punto la ecuación $\phi(x, y) = 0$ determina a y de modo único como una función continuamente diferenciable de x, digamos $y = g(x)$. Si se sustituye esta expresión en $f(x, y)$, la función

$$f(x, g(x))$$

debe tener un valor extremo libre en el punto $x = \xi$. Para ésto se debe cumplir la ecuación

$$f'(x) = f_x + f_y g'(x) = 0$$

en $x = \xi$. Además, la función $y = g(x)$ definida implícitamente satisface la relación $\phi_x + \phi_y g'(x) = 0$ idénticamente. Si se multiplica esta ecuación por $\lambda = -f_y/\phi_y$ y se le suma a $f_x + f_y g'(x) = 0$, se obtiene

$$f_x + \lambda\phi_x = 0,$$

y, por la definición de λ, se cumple la ecuación

$$f_y + \lambda\phi_y = 0$$

Esto establece el método de los multiplicadores indeterminados.

Esta demostración hace resaltar la importancia de la hipótesis de que las derivadas ϕ_x y ϕ_y no se anulan simultáneamente en el punto (ξ, η). Si ambas derivadas se anulan, la regla falla, como muestra el ejemplo que sigue. Se desea hacer que la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sea un mínimo, sujeta a la condición

$$\phi(x, y) = (x - 1)^3 - y^2 = 0.$$

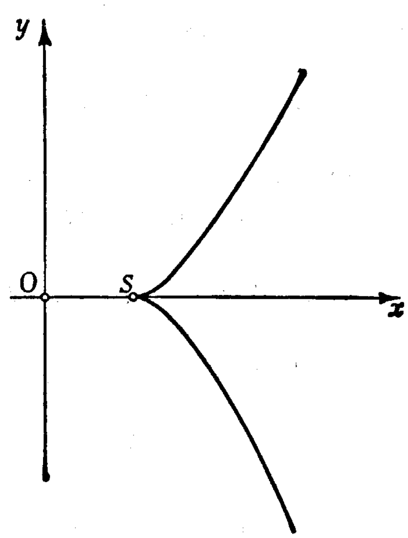

Figura 3.30 La curva $(x - 1)^3 - y^2 = 0$.

En la Fig. 3.30, la distancia más corta del origen a la curva $(x-1)^3 - y^2 = 0$ obviamente está dada por la recta que une el origen con la cúspide S de la curva (fácilmente puede probarse que el círculo unitario con centro en el origen no contiene a otro punto de la curva).
Las coordenadas de S —es decir, $x = 1$ y $y = 0$— satisfacen las ecuaciones $\phi(x, y) = 0$ y $f_y + \lambda\phi_y = 0$, sin importar el valor que se le asigne a λ, pero

$$f_x + \lambda\phi_x = 2x + 3\lambda(x-1)^2 = 2 \neq 0.$$

El método de los multiplicadores indeterminados se puede enunciar en una forma ligeramente diferente, la cual es particularmente conveniente para la generalización. Se ha visto que la anulación de la diferencial de una función $F(x, y)$ en un punto dado es una condición necesaria para que un valor extremo de la función ocurra en ese punto. Para el problema presente, de modo semejante, se puede hacer la siguiente afirmación:

Para que la función $f(x, y)$ tenga un valor extremo en el punto (ξ, η) sujeto a la condición subsidiaria $\phi(x, y) = 0$, la diferencial df debe anularse en ese punto, donde se considera que las diferenciales dx y dy no son independientes sino que están sujetas a la ecuación

$$d\phi = \phi_x\, dx + \phi_y\, dy = 0 \tag{67e}$$

deducida de $\phi = 0$. Supóngase que en el punto (ξ, η) las diferenciales dx y dy satisfacen la ecuación

$$df = f_x(\xi, \eta)\, dx + f_y(\xi, \eta)\, dy = 0 \tag{67f}$$

siempre que satisfagan la ecuación $d\phi = 0$. Multiplicando la ecuación (67e) por un número λ y sumándola a (67f), se obtiene

$$(f_x + \lambda\phi_x)\, dx + (f_y + \lambda\phi_y)\, dy = 0.$$

Si se determina λ de modo que

$$f_y + \lambda\phi_y = 0, \tag{67g}$$

como es posible en virtud de la hipótesis de que $\phi_y \neq 0$, se concluye que $(f_x + \lambda\phi_x)\, dx = 0$, y, como la diferencial dx en (67e) puede elegirse arbitrariamente, digamos igual a 1, se tiene

(67h) $$f_x + \lambda\phi_x = 0.$$

Recíprocamente, las relaciones (67g, h) con cualquier λ implican, por supuesto, que $df = 0$ siempre que $d\phi = 0$.

Ejercicios 3.7d

1. Describir la apariencia de la superficie $z = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$, para el multiplicador de Lagrange λ y la ecuación restrictiva $\phi = 0$

e. Generalización del método de los multiplicadores indeterminados

El método de los multiplicadores indeterminados se puede extender a un mayor número de variables y también a un mayor número de condiciones subsidiarias. Consideraremos un caso especial que incluya todas las características esenciales. Se buscarán los valores extremos de la función

(68a) $$u = f(x, y, z, t),$$

cuando las cuatro variables x, y, z, t satisfagan las dos condiciones subsidiarias

(68b) $$\phi(x, y, z, t) = 0, \quad \psi(x, y, z, t) = 0.$$

Se supondrá que en el punto (ξ, η, ζ, τ) la función f toma un valor que es un valor extremo cuando se compara con los valores en todos los puntos vecinos que satisfacen las condiciones subsidiarias. Se requiere que, en la vecindad del punto $P = (\xi, \eta, \zeta, \tau)$, dos de las variables, digamos z y t, se puedan representar como funciones de las otras dos, x y y, por medio de las ecuaciones (68b). Con el fin de asegurar que puedan hallarse tales soluciones $z = g(x, y)$ y $t = h(x, y)$ supóngase que en el punto P el jacobiano

(68c) $$\frac{d(\phi, \psi)}{d(z, t)} = \phi_z\psi_t - \phi_t\psi_z$$

no es cero (ver la p. 313). Sustitúyanse ahora las funciones

$$z = g(x, y) \qquad \text{y} \qquad t = h(x, y)$$

en la función $u = f(x, y, z, t)$, para obtener una función de las dos variables independientes x y y; esta función debe tener un valor extremo libre en el punto $x = \xi$, $y = \eta$; es decir, sus dos derivadas parciales deben anularse en ese punto. Por lo tanto, se deben cumplir las dos ecuaciones

(69a) $$f_x + f_z \frac{\partial z}{\partial x} + f_t \frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

(69b) $$f_y + f_z \frac{\partial z}{\partial y} + f_t \frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

Para calcular, a partir de las condiciones subsidiarias, las cuatro derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$ que ocurren aquí, se pueden escribir las dos parejas de ecuaciones

(69c) $$\phi_x + \phi_z \frac{\partial z}{\partial x} + \phi_t \frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

(69d) $$\psi_x + \psi_z \frac{\partial z}{\partial x} + \psi_t \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

y

(69e) $$\phi_y + \phi_z \frac{\partial z}{\partial y} + \phi_t \frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

(69f) $$\psi_y + \psi_z \frac{\partial z}{\partial y} + \psi_t \frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

y resolverlas para las incógnitas $\partial z/\partial x, \ldots, \partial t/\partial y$; ésto es posible porque el jacobiano $d(\phi, \psi)/d(z, t)$ no se anula. Por tanto, el problema se resolvería.

En lugar de lo anterior preferimos conservar la simetría formal, procediendo como sigue. Se determinan dos números λ y μ de tal manera que las dos ecuaciones

(70a) $$f_z + \lambda\phi_z + \mu\psi_z = 0,$$

(70b) $$f_t + \lambda\phi_t + \mu\psi_t = 0$$

se satisfacen en el punto donde ocurre el valor extremo. Es posible la determinación de estos multiplicadores λ y μ, dado que se ha supuesto que el jacobiano $d(\phi, \psi)/d(z, t)$ es diferente de cero. Si se multiplican las ecuaciones (69c, d) por λ y μ, respectivamente, y se suman a la ecuación (69a), se tiene

$$f_x + \lambda\phi_x + \mu\psi_x + (f_z + \lambda\phi_z + \mu\psi_z)\frac{\partial z}{\partial x} + (f_t + \lambda\phi_t + \mu\psi_t)\frac{\partial t}{\partial x} = 0.$$

De aquí que, por la definición (70a, b) de λ y μ,

$$f_x + \lambda\phi_x + \mu\psi_x = 0.$$

De modo semejante, si se multiplican las ecuaciones (69e, f) por λ y μ, respectivamente, y se les suma a la ecuación (69b), se obtiene la otra ecuación

$$f_y + \lambda\phi_y + \mu\psi_y = 0.$$

Así se llega al resultado siguiente: *si el punto* (ξ, η, ζ, τ) *es un extremo de* $f(x, y, z, t)$ *sujeto a las condiciones subsidiarias*

$$\phi(x, y, z, t) = 0, \tag{71a}$$

$$\psi(x, y, z, t) = 0, \tag{71b}$$

y si en ese punto $d(\phi,\psi)/d(z,t)$ *no es cero, entonces existen los dos números* λ *y* μ *tales que, en el punto* (ξ, η, ζ, τ) *se satisfacen las ecuaciones*

$$f_x + \lambda\phi_x + \mu\psi_x = 0, \tag{72a}$$

$$f_y + \lambda\phi_y + \mu\psi_y = 0, \tag{72b}$$

$$f_z + \lambda\phi_z + \mu\psi_z = 0, \tag{72c}$$

$$f_t + \lambda\phi_t + \mu\psi_t = 0, \tag{72d}$$

y las condiciones subsidiarias (71*a*, *b*).

Estas últimas condiciones son perfectamente simétricas. Ha desaparecido de ellas todo rastro de énfasis especial sobre las dos variables x y y, y pudieron haberse obtenido igualmente bien (72a, b, c, d) si, en lugar de suponer que $\partial(\phi, \psi)/\partial(z, t) \neq 0$, simplemente se hubiera supuesto que cualquiera de los jacobianos $\partial(\phi, \psi)/\partial(x, y)$, $\partial(\phi, \psi)/\partial(x, z)$, . . ., $\partial(\phi, \psi)/\partial(z, t)$ no se anulaba, de modo que, en la vecindad del punto en cuestión, una cierta pareja de las cantidades x, y, z, t (no necesariamente z y t) pudieran expresarse en términos de la otra pareja. Por supuesto, por esta simetría de las ecuaciones se ha pagado un precio; además de las incógnitas ξ, η, ζ, τ, ahora también se tienen λ y μ. En lugar de cuatro incógnitas ahora se tienen seis, determinadas por las seis ecuaciones anteriores.

Exactamente de la misma manera, se puede enunciar y probar el método de los multiplicadores indeterminados para un número arbitrario de variables y un número arbitrario de condiciones subsidiarias. La regla general es como sigue:

Si en una función

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *no son independientes sino que están relacionadas por las m condiciones subsidiarias* $(m < n)$

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots \\ \phi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

entonces se introducen m multiplicadores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *y se igualan a 0 las derivadas de la función*

$$F = f + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \cdots + \lambda_m\phi_m$$

con respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *cuando* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *son constantes. Las ecuaciones*

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

así obtenidas[1], *junto con las m condiciones subsidiarias*

$$\phi_1 = 0, \ldots, \phi_m = 0,$$

representan un sistema de $m + n$ *ecuaciones para las* $m + n$ *cantidades desconocidas* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. *Estas ecuaciones deben ser satisfechas en cualquier punto extremo de f, a menos que todos los jacobianos de las m funciones* $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ *con respecto a m de las variables* $x_1, \ldots, x_n$ *tengan el valor 0.*

Se observa que esta regla nos proporciona un elegante método formal para determinar los puntos donde ocurren los valores extremos; sin embargo simplemente constituye una condición necesaria. Aún faltan por investigar las circunstancias bajo las cuales los puntos que se encuentran por medio del método de los multi-

[1]Las cuales son idénticas a las correspondientes a un extremo "libre" de la función auxiliar *F*.

plicadores en realidad corresponden a un máximo o a un mínimo de la función. No consideraremos esta cuestión; su discusión nos llevaría muy lejos. Como en el caso de los valores extremos libres, cuando se aplica el método de los multiplicadores indeterminados normalmente se sabe de antemano que existe un extremo en el interior del dominio de f. Si el método determina el punto de manera única y no se presenta el caso excepcional (todos los jacobianos iguales a 0) en punto alguno de la región bajo consideración, entonces se puede tener la seguridad de que realmente se ha encontrado el punto en donde ocurre el valor extremo.

Ejercicios 3.7e

1. Interpretar geométricamente el problema de minimizar $u = f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $\phi(x, y, z) = 0$
2. Dar un ejemplo de un problema de la forma: extremizar $f(x, y, z)$ sujeta a las restricciones $\phi(x, y) = 0$, $\psi(y, z) = 0$. Interpretar ésto geométricamente.

f. Ejemplos

1. Como primer ejemplo, intentemos encontrar el máximo de la función $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$, sujeto a la condición subsidiaria $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$. Sobre la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, la función debe tomar un valor máximo, puesto que la superficie es un conjunto acotado y cerrado. De acuerdo con la regla, se forma la expresión

$$F = x^2y^2z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - c^2)$$

y, derivando, se obtiene

$$2xy^2z^2 + 2\lambda x = 0,$$

$$2x^2yz^2 + 2\lambda y = 0,$$

$$2x^2y^2z + 2\lambda z = 0.$$

Se pueden excluir las soluciones con $x = 0, y = 0$, ó $z = 0$, porque en estos puntos la función toma su menor valor: cero. Las otras soluciones de la ecuación son $x^2 = y^2 = z^2$, $\lambda = -x^4$. Usando la condición subsidiaria se obtienen los valores

$$x = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}, \qquad y = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}, \qquad z = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}$$

para las coordenadas requeridas.

En todos estos puntos la función toma el mismo valor $c^6/27$, el cual, en consecuencia, es el máximo. De aquí que cualquier triada de números satisface la relación

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leqq \frac{c^2}{3} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3},$$

la cual afirma que *la media geométrica de los tres números no negativos* x^2, y^2, z^2 *nunca es mayor que su media aritmética.*

De modo sumejante se prueba, para un número arbitrario de reales positivos, que la media geométrica nunca es mayor que la media aritmética.[1]

2. Como un segundo ejemplo se tratará de encontrar el triángulo (de lados x, y, z) con perímetro dado $2s$ y la mayor área posible. Por la conocida fórmula de Herón, el cuadrado del área está dado por

$$f(x, y, z) = s(s - x)(s - y)(s - z).$$

Por lo tanto, se desea el máximo de esta función sujeta a la condición subsidiaria

$$\phi = x + y + z - 2s = 0,$$

donde x, y, z están restringidas por las desigualdades

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x + y \geqq z,\ x + z \geqq y,\ y + z \geqq x.$$

Sobre la frontera de esta región cerrada (es decir, donde una de estas desigualdades se convierte en una ecuación), siempre se tiene $f = 0$. Consecuentemente, el valor mayor de f ocurre en el interior y es un máximo. Se forma la función

$$F(x, y, z) = s(s - x)(s - y)(s - z) + \lambda(x + y + z - 2s),$$

y, derivando, se obtienen las tres condiciones

$$-s(s - y)(s - z) + \lambda = 0, \qquad -s(s - x)(s - z) + \lambda = 0,$$

$$-s(s - x)(s - y) + \lambda = 0.$$

[1]Para otra demostración, ver el Volumen I, Problema 13, p. 109, o el Problema 11, p. 318.

Igualando las tres expresiones se obtiene $x = y = z = 2s/3$; es decir, la solución es un triángulo equilátero.

3. A continuación se probará la desigualdad

$$uv \leqq \frac{1}{\alpha} u^{\alpha} + \frac{1}{\beta} v^{\beta} \tag{73a}$$

para toda $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ y toda $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tales que $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

Evidentemente, la desigualdad es válida si alguna de las cantidades u o v se anula. Por lo tanto, nos podemos restringir a los valores de u y v tales que $uv \neq 0$. Si la desigualdad se cumple para una pareja de números u, v, también se cumple para todos los números $ut^{1/\alpha}$, $vt^{1/\beta}$ donde t es un número positivo arbitrario. Por lo tanto, sólo es necesario considerar los valores de u, v para los cuales $uv = 1$. De aquí que se tiene que demostrar que la desigualdad

$$\frac{1}{\alpha} u^{\alpha} + \frac{1}{\beta} v^{\beta} \geqq 1$$

se cumple para todos los números positivos u, v tales que $uv = 1$.

Para hacerlo, se resuelve el problema de encontrar el mínimo de

$$\frac{1}{\alpha} u^{\alpha} + \frac{1}{\beta} v^{\beta}$$

sujeto a la condición subsidiaria $uv = 1$. Obviamente, este mínimo existe y ocurre en un punto (u, v), donde $u \neq 0$, $v \neq 0$. Como consecuencia, existe un multiplicador $-\lambda$ para el cual se tiene

$$u^{\alpha-1} - \lambda v = 0 \qquad \text{y} \qquad v^{\beta-1} - \lambda u = 0.$$

Multiplicando por u y v, respectivamente, estas ecuaciones dan inmediatamente $u^{\alpha} = \lambda$, $v^{\beta} = \lambda$. Tomados con $uv = 1$, los últimos resultados implican que $u = v = 1$. Por lo tanto, el valor mínimo de

$$\frac{1}{\alpha} u^{\alpha} + \frac{1}{\beta} v^{\beta}$$

es $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Es decir, queda demostrada la proposición de que

$$\frac{1}{\alpha} u^{\alpha} + \frac{1}{\beta} v^{\beta} \geqq 1$$

cuando $uv = 1$.

Si en la desigualdad (73a) se remplazan u y v por

$$u = u_i \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \qquad \text{y} \qquad v = v_i \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^{\beta}\right)^{1/\beta},$$

respectivamente, donde $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n$ son números no negativos arbitrarios y por lo menos un u y un v no son cero, y si se suma sobre $i = 1, \ldots, n$, se obtiene la *desigualdad de Hölder:*

$$\text{(73b)} \qquad \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^{\beta}\right)^{1/\beta}.$$

Esta se cumple para cualesquiera $2n$ números u_i, v_i donde $u_i \geqq 0$, $v_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; no todos los u ni todos los v son cero; y los índices α, β son tales que $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$. La desigualdad de Cauchy-Schwarz es el caso especial $\alpha = \beta = 2$ de la desigualdad de Hölder.

4. Finalmente, busquemos el punto sobre la superficie cerrada

$$\phi(x, y, z) = 0$$

que se encuentre a la distancia mínima del punto fijo (ξ, η, ζ). Si la distancia es un mínimo su cuadrado también es un mínimo; en consecuencia, considérese la función

$$F(x, y, z) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 + \lambda\phi(x, y, z).$$

Derivando se obtienen las condiciones

$$2(x - \xi) + \lambda\phi_x = 0, \quad 2(y - \eta) + \lambda\phi_y = 0, \quad 2(z - \zeta) + \lambda\phi_z = 0,$$

o, en otra forma,

$$\frac{x - \xi}{\phi_x} = \frac{y - \eta}{\phi_y} = \frac{z - \zeta}{\phi_z}.$$

Estas ecuaciones afirman que el punto fijo (ξ, η, ζ) se encuentra sobre la normal a la superficie en el punto (x, y, z) correspondiente a la distancia extrema. Por lo tanto, para ir a lo largo de la trayectoria más corta desde un punto hasta una superficie (diferenciable), el movimiento debe ser en una dirección normal a la superficie. Por supuesto, se requiere una discusión adicional para decidir si se ha encontrado un máximo o un mínimo, o ninguno de los dos. Considérese, por ejemplo un punto dentro de una superficie esférica. Los puntos a la distancia extrema están en los extremos del diámetro que pasa por el punto dado; la distancia a uno de estos puntos es un mínimo, la distancia al otro es un máximo.

Ejercicios 3.7f

1. Encontrar la distancia más corta entre el plano $Ax + By + Cz = D$ y el punto (a, b, c).

Encontrar las distancias mayor y menor desde un punto sobre la elipse $x^2/4 + y^2/1 = 1$ a la recta $x + y - 4 = 0$.

3. Demostrar que el valor máximo de la expresión

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{ex^2 + 2fxy + gy^2} \qquad (eg - f^2 > 0)$$

es igual a la mayor de las raíces de la ecuación en λ;

$$(ac - b^2) - \lambda(ag - 2bf + ec) + \lambda^2(eg - f^2) = 0.$$

4. Calcular los valores máximos de las expresiones siguientes:

(a) $\dfrac{x^2 + 6xy + 3y^2}{x^2 - xy + y^2}$

(b) $\dfrac{x^4 + 2x^3y}{x^4 + y^4}$.

5. Encontrar los valores de a y b para la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ de menor área que contenga al círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ en su interior.
6. ¿Cuál punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ está a la mayor distancia del punto $(1, 2, 3)$?
7. Hallar el punto (x, y, z) del elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ para el cual

(a) $A + B + C$

(b) $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$,

es un mínimo, donde A, B, C denotan las intersecciones del plano tangente en (x, y, z), donde $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, con los ejes coordenados.

8. Hallar el paralelepípedo rectangular de mayor volumen inscrito en el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.
9. Encontrar el rectángulo de perímetro máximo inscrito en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
10. Hallar el punto de la elipse $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ para el cual la tangente se encuentra a la distancia máxima del origen.
11. Probar que la longitud l del eje mayor del elipsoide

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 1$$

está dada por la mayor raíz real de la ecuación

$$\begin{vmatrix} a-\frac{1}{l^2} & d & e \\ d & b-\frac{1}{l^2} & f \\ e & f & c-\frac{1}{l^2} \end{vmatrix}$$

12. (a) Maximizar $x^a y^b z^c$, donde a, b, c son constantes positivas, sujeta a la condición $x^k + y^k + z^k = 1$, donde x, y, z son no negativos y $k > 0$.
    (b) A partir del resultado de la parte (a) deducir la siguiente desigualdad para cualesquiera seis números reales positivos:

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a \left(\frac{v}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c \leqq \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}$$

13. Sea $P_1P_2P_3P_4$ un cuadrilátero convexo. Encontrar el punto O para el cual la suma de las distancias a P_1, P_2, P_3, P_4 es un mínimo.
14. Encontrar el cuadrilátero con lados a, b, c, d dados que encierre el área máxima.

Apéndice

A.1 Condiciones suficientes para los valores extremos

En la teoría de los máximos y mínimos del capítulo precedente nos contentamos con encontrar las condiciones necesarias para la ocurrencia de un valor extremo. En muchos casos que se presentan en la práctica, puede determinarse la naturaleza del punto "estacionario" así encontrado a partir de la naturaleza especial del problema, que nos permite decidir si se trata de un máximo o de un mínimo. Sin embargo, es importante tener condiciones generales *suficientes* para la ocurrencia de extremos relativos. Aquí se desarrollarán esos criterios para el caso típico de dos variables independientes.

Si se considera un punto (x_0, y_0) en el cual la función es estacionaria, es decir, un punto en el cual ambas derivadas parciales de la función se anulan, ocurre un valor extremo si y sólo si la expresión

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

tiene el mismo signo para todos los valores lo suficientemente pequeños de h y k. Si se desarrolla esta expresión por el teorema de Taylor, con residuo de tercer orden, y se aplican las ecuaciones $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$, se obtiene

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}) + \varepsilon\rho^2,$$

donde $\rho^2 = h^2 + k^2$ y ε tiende a cero con ρ.

Esto sugiere que, en una vecindad lo suficientemente pequeña del punto (x_0, y_0), el comportamiento de la diferencia funcional $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ está determinado esencialmente por la expresión

$$Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2,$$

donde, por brevedad, se ha puesto

$$a = f_{xx}(x_0, y_0), \ b = f_{xy}(x_0, y_0), \ c = f_{yy}(x_0, y_0).$$

Para estudiar el problema de los valores extremos se debe investigar esta expresión cuadrática homogénea o forma cuadrática Q en h y k. Se supondrá que los coeficientes a, b, c no se anulan todos. En el caso excepcional en que todos se anulan, el cual no consideraremos, se debe empezar con una serie de Taylor que se extienda hasta términos de orden superior.

En relación con la forma cuadrática Q, existen tres casos diferentes posibles:

1. La forma es *definida*. Es decir, cuando h y k toman todos sus valores Q toma valores de un solo signo y sólo se anula para $h = 0$, $k = 0$. Se dice que la forma es *definida positiva,* o bien, *definida negativa* según este signo sea positivo o negativo. Por ejemplo, la expresión $h^2 + k^2$, la cual se obtiene cuando $a = c = 1$, $b = 0$, es definida positiva, mientras que la expresión $-h^2 + 2hk - 2k^2 = -(h - k)^2 - k^2$ es definida negativa.

2. La forma es *indefinida*. Es decir, puede tomar valores de signo diferente; por ejemplo, la forma $Q = 2hk$, la cual tiene el valor 2 para $h = 1, k = 1$ y el valor -2 para $h = -1$, $k = 1$.

3. La tercera posibilidad es que la forma se anule para valores de h, k que no sean $h = 0$, $k = 0$, pero en caso contrario tome valores de un solo signo; por ejemplo, la forma $(h + k)^2$, que se anula para todas las parejas de valores h, k tales que $h = -k$. Tales formas se llaman *semidefinidas*.

La forma cuadrática $Q = ah^2 + 2bhk + ck^2$ es definida si y sólo si su *discriminante* $ac - b^2$ satisface la condición

$$ac - b^2 > 0;$$

entonces es definida positiva si $a > 0$ (de modo que también $c > 0$); de lo contrario, es definida negativa.

Para que la forma sea indefinida es necesario y suficiente que

$$ac - b^2 < 0,$$

mientras que el caso semidefinido se caracteriza por la ecuación[1]

$$ac - b^2 = 0.$$

Ahora se probarán las proposiciónes siguientes. Si la forma cuadrática $Q(h, k)$ es definida positiva, el valor estacionario que toma para $h = 0$, $k = 0$ es un mínimo relativo incluso un mínimo relativo *estricto*). Si la forma es definida negativa, el valor estacionario es un *máximo* relativo. Si la forma es indefinida no se tiene máximo ni mínimo; el punto es un *punto silla de montar*. De donde, el carácter definido de la forma Q es una condición suficiente para un valor extremo, mientras que el carácter indefinido de Q excluye la posibilidad de un valor extremo. No se considerará el caso semidefinido, el cual conduce a discusiones complicadas.

Con el fin de probar la primera proposición, se observa que si Q es una forma definida positiva, existe un número positivo m independiente de h y k tal que[2]

$$Q \geqq 2m(h^2 + k^2) = 2m\rho^2.$$

Por lo tanto,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} Q(h, k) + \varepsilon\rho^2 \geqq (m + \varepsilon)\rho^2.$$

[1] Estas condiciones se obtienen fácilmente como sigue. $a = 0$, o bien $c = 0$, en cuyo caso se debe tener $b \neq 0$ y la forma es, como ya se hizo notar, indefinida; por lo tanto, el criterio se cumple para este caso; de lo contrario, debe tenerse, digamos, $a \neq 0$. se puede escribir

$$ah^2 + 2bhk + ck^2 = a\left[\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{ca - b^2}{a^2}k^2\right].$$

Obviamente, esta forma es definida si $ca - b^2 > 0$, y entonces tiene el mismo signo que a. Es semidefinida si $ca - b^2 = 0$, porque entonces se anula para todos los valores de h, k que satisfagan la ecuación $h/k = -b/a$, pero para todos los demás valores tiene el mismo signo. Es indefinida si $ca - b^2 < 0$, porque entonces toma valores de signo diferente cuando k se anula y cuando $h + (b/a)k$ se anula.

[2] Para observar ésto considérese el cociente $Q(h, k)/(h^2 + k^2)$ como una función de las dos cantidades $u = h/\sqrt{h^2 + k^2}$ y $v = k/\sqrt{h^2 + k^2}$. Entonces $u^2 + v^2 = 1$, y la forma se convierte en una función continua de u y v, la cual debe tener un valor mínimo $2m$ sobre el círculo $u^2 + v^2 = 1$. Obviamente, este valor satisface las condiciones dadas; no es cero, porque u y v nunca se anulan simultáneamente sobre el círculo.

Si ahora se elige ρ tan pequeño que el número ε sea menor en valor absoluto que $\frac{1}{2}m$, obviamente se tiene

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \geqq \frac{m}{2}\rho^2 > 0.$$

De donde, para esta vecindad del punto (x_0, y_0) el valor de la función en todo punto es mayor que $f(x_0, y_0)$, excepto, por supuesto, en el propio (x_0, y_0). De la misma manera, cuando la forma es definida negativa, el punto es un máximo.

Por último, si la forma es indefinida existe un par de valores (h_1, k_1) para los cuales Q es negativa y otra pareja (h_2, k_2) para los cuales Q es positiva. Por lo tanto, se puede encontrar un número positivo m tal que

$$Q(h_1, k_1) < -2m\rho_1^2,$$

$$Q(h_2, k_2) > 2m\rho_2^2.$$

Si ahora se pone $h = th_1$, $k = tk_1$, $\rho^2 = h^2 + k^2$, $(t \neq 0)$ — es decir, si se considera un punto $(x_0 + h, y_0 + k)$ sobre la recta que une a (x_0, y_0) con $(x_0 + h_1, y_0 + k_1)$— entonces, a partir de $Q(h, k) = t^2Q(h_1, k_1)$ y $\rho^2 = t^2\rho_1^2$, se tiene

$$Q(h, k) < -2m\rho^2.$$

De donde, eligiendo una t lo suficientemente pequeña (y la ρ correspondiente), la expresión $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ puede hacerse negativa. Sólo es necesario elegir t tan pequeña que, para $h = th_1$, $k = tk_1$, el valor absoluto de la cantidad ε sea menor que $\frac{1}{2}m$. Para tal conjunto de valores se tiene $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) < -m\rho^2/2$, de modo que el valor $f(x_0 + h, y_0 + k)$ es menor que el valor estacionario $f(x_0, y_0)$. De la misma manera, llevando a cabo el proceso correspondiente para el sistema $h = th_2$, $k = tk_2$, se encuentra que en una vecindad arbitrariamente pequeña de (x_0, y_0) existen puntos en los que el valor de la función es mayor que $f(x_0, y_0)$. Así, no se tiene máximo ni mínimo sino que, en lugar de ello, se tiene lo que se conoce como un valor silla.

Si $a = b = c = 0$ en el punto estacionario, la forma cuadrática se anula idénticamente, y en el caso semidefinido esta discusión no se puede aplicar. Obtener condiciones suficientes para estos casos conduciría a conclusiones complicadas.

Así, se tiene la regla siguiente para distinguir máximos y mínimos: *En un punto* (x_0, y_0) *donde las derivadas parciales se anulan,*

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0,$$

y la desigualdad

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

se cumple, la función f *tiene un valor extremo relativo. Este es un máximo relativo si* $f_{xx} < 0$ *(y, consecuentemente,* $f_{yy} < 0$*), y un mínimo relativo si* $f_{xx} > 0$*. Si, por otra parte,*

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0,$$

el valor estacionario no es máximo ni mínimo. El caso

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$$

queda indeciso.

Estas condiciones tienen una interpretación geométrica sencilla. Las condiciones necesarias $f_x = f_y = 0$ afirman que el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ es horizontal. Si en realidad se tiene un valor extremo, entonces en la vecindad del punto en cuestión el plano tangente no se intersecta con la superficie. En el caso de un punto silla, por el contrario, el plano corta a la superficie en una curva que tiene varias ramas en el punto. Esto quedará claro después de la discusión de los puntos singulares en la Sección A.3.

Como ejemplo, busquemos los valores extremos de la función

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + ax + by.$$

Si se igualan las primeras derivadas a 0, se obtienen las ecuaciones

$$2x + y + a = 0, \quad x + 2y + b = 0,$$

las cuales tienen la solución $x = \frac{1}{3}(b - 2a), y = \frac{1}{3}(a - 2b)$. La expresión

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 3$$

es positiva, como también lo es $f_{xx} = 2$. Por lo tanto, la función tiene un mínimo en el punto en cuestión.

La función

$$f(x, y) = (y - x^2)^2 + x^5$$

tiene un punto estacionario en el origen. Allí, la expresión $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ se anula y el criterio falla. Sin embargo, se ve fácilmente que la función no tiene un valor extremo allí porque en la vecindad del origen la función toma tanto valores positivos como negativos.

Por otra parte, la función

$$f(x, y) = (x - y)^4 + (y - 1)^4$$

tiene un mínimo en el punto $x = 1$, $y = 1$, aunque la expresión $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ se anula allí. Porque

$$f(1 + h, 1 + k) - f(1, 1) = (h - k)^4 + k^4,$$

y esta cantidad es positiva cuando $\rho \neq 0$.

Ejercicios A.1

1. Encontrar y caracterizar los valores extremos de las funciones:
   (a) $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$
   (b) $f(x, y) = \cos(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) + x^2$
   (c) $f(x, y) = x \cosh y - y^2$.

2. Si $\phi(a) = k \neq 0$, $\phi'(a) \neq 0$, y x, y, z satisfacen la relación $\phi(x)\phi(y)\phi(z) = k^3$, probar que la función $f(x) + f(y) + f(z)$ tiene un máximo cuando $x = y = z = a$, siempre que
$$f'(a)\left(\frac{\phi''(a)}{\phi'(a)} - \frac{\phi'(a)}{\phi(a)}\right) > f''(a).$$

3. Sea $P_1P_2P_3$ un triángulo plano con sus tres ángulos menores que 120°. Probar, por medio del criterio de la p. 402, o bien, del Ejercicio 6 que sigue, que en el punto P interior a $P_1P_2P_3$ tal que $\angle P_2PP_3 = \angle P_3PP_1 = \angle P_1PP_2 = 120°$, la suma $PP_1 + PP_2 + PP_3$ es realmente un mínimo (ver el Ejemplo 3, p. 380).
4. ¿Dónde ocurre el mínimo de la suma $PP_1 + PP_2 + PP_3$ si en el triángulo del ejercicio 3 el ángulo $P_2P_1P_3$ es mayor que, o igual a, 120°?
5. (a) Probar que, si todos los símbolos denotan cantidades positivas, el valor estacionario de $lx + my + nz$ sujeto a la condición $x^p + y^p + z^p = c^p$ es $c(l^q + m^q + n^q)^{1/q}$, donde $q = p/(p - 1)$.
   (b) Demostrar que el valor es un máximo o un mínimo según que $p \gtrless 1$.
6. Generalizar la investigación de la Sección A.1 a funciones de n variables, probando los resultados siguientes. Sea $f(x_1, \ldots, x_n)$ continuamen-

te diferenciable por tres veces en la vecindad de un punto estacionario $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$, es decir, un punto donde $f_{x_1} = f_{x_2} = f_{x_n} = 0$. Considérese la segunda diferencial total de f en el punto x^0, $d^2f^0 = \sum_{i,k=1}^{n} f_{x_ix_k}{}^0\, dx_i\, dx_k$; ésta es una forma cuadrática en las variables $dx_1, \ldots, dx_n$. Si esta forma cuadrática es no degenerada, es decir, si

$$D = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}{}^0 & \cdots & f_{x_1x_n}{}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}{}^0 & \cdots & f_{x_nx_n}{}^0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces d^2f^0 puede ser (1) definida positiva, (2) definida negativa o (3) indefinida. Probar que estos casos posibles corresponden respectivamente a las siguientes propiedades de f en el punto x^0: (1) f tiene un mínimo, (2) tiene un máximo, (3) f no tiene mínimo ni máximo.

7. Investigar los puntos estacionarios de $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, donde las variables satisfacen las relaciones

$$(1) \qquad \phi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \phi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (m < n);$$

se puede suponer que se han encontrado valores numéricos para las variables y los multiplicadores λ_μ tales que $F = f + \lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_m\phi_m$ satisface las ecuaciones

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,$$

y tales que el jacobiano de $\phi_1, \ldots, \phi_m$ con respecto a las variables $x_1, \ldots, x_m$ no es 0. Para aplicar el criterio del Ejercicio 6 se puede proceder como sigue: considerando a $x_{m+1}, \ldots, x_n$ como las variables independientes, al derivar (1) se pueden obtener las primeras y segundas diferenciales de $x_1 \ldots, x_m$ como funciones de $x_{m+1}, \ldots, x_n$ y, finalmente, introducir estos valores en

$$(3) \qquad d^2f = \sum_{i,k=1}^{n} f_{x_ix_k}\, dx_i\, dx_k + f_{x_1}\, d^2x_1 + \cdots + f_{x_m}\, d^2x_m.$$

Probar la segunda regla que sigue, que no comprende el cálculo de las segundas diferenciales $d^2x_1, \ldots, d^2x_m$: considerando a $x_1, \ldots, x_n$ como variables independientes, tómese

$$d^2F = \sum F_{x_ix_k}\, dx_i\, dx_k = d^2f + \lambda_1 d^2\phi_1 + \cdots + \lambda_m\, d^2\phi_m;$$

calcúlense $dx_1, \ldots, dx_m$ a partir de las ecuaciones

$$d\phi_\mu = \phi_{\mu x_1}\, dx_1 + \cdots + \phi_{\mu x_n}\, dx_n = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

e introdúzcanse estos valores en d^2F, obteniéndose así una forma cuadrática δ^2F en las variables $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$. Si esta forma cuadrática es no degenerada, entonces f tiene, respectivamente, un mínimo, un máximo o ninguno de éstos, según que d^2f sea definida positiva, definida negativa o indefinida.

8. En el problema de encontrar el máximo de $f = x_1x_2 \cdots x_n$ sujeto a la condición $\phi = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a = 0\ (a > 0)$, la regla de los multiplicadores indeterminados da un valor estacionario de f en el punto $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = a/n$. Aplicar la regla del Ejercicio 7, en lugar de la consideración del máximo absoluto, para demostrar que f tiene un valor máximo en este punto.
9. Aplicar el criterio del Ejercicio 7 para probar que entre todos los triángulos de perímetro constante el triángulo equilátero tiene el área máxima (ver la p. 394).

A.2 Números de puntos críticos relacionados con los índices de un campo vectorial

Evidentemente, por el teorema fundamental (ver la p. 144), una función continua $f(x, y)$ definida en un conjunto R cerrado y acotado tiene un punto máximo y un punto mínimo en R. Si un punto máximo o mínimo (x_0, y_0) es un punto interior de R y si f es diferenciable en (x_0, y_0), entonces (x_0, y_0) es un punto crítico de f. En algunos casos esta observación nos permite deducir la existencia de al menos un punto crítico de f. Por ejemplo, si el conjunto R consiste de un conjunto S abierto y acotado y su frontera B, y si f es constante sobre B y diferenciable en S, entonces f tiene al menos un punto crítico en S. Esta es precisamente una extensión del *teorema de Rolle* (ver el Volumen I, p. 175) a funciones de varias variables, y se prueba en la misma forma: la función f tiene puntos máximos y mínimos. Si todos éstos se encuentran sobre la frontera B, donde f es constante, entonces los valores máximo y mínimo de f coinciden; entonces f también es constante en S y todo punto de S es crítico. De aquí que, por lo menos, existe un punto crítico de f en S.

En el caso de funciones de una sola variable independiente se cuenta con más información acerca del número de puntos críticos de un cierto tipo. Los máximos y mínimos relativos *se alternan* (ver el Volumen I, p. 239). De aquí que, cuando más, los números totales de máximos y de mínimos relativos de una función en un intervalo difieren en 1. Esto no es cierto para las funciones de dos variables definidas en un conjunto R del plano. No obstante, existe una relación (intuitivamente menos obvia) entre los números totales de extremos relativos y de puntos silla en el interior de R y los valores de f sobre la frontera de R. Con el fin de plantear esta relación, primero tiene que considerarse el *campo del gradiente* de f e introducir la noción de índice de una curva cerrada con respecto a un campo vectorial.

Supóngase que f es continua y que tiene primeras derivadas continuas en el conjunto R del plano x, y. Entonces, en cada punto de R, f determina las dos cantidades

$$u = f_x(x, y), \quad v = f_y(x, y). \tag{74}$$

Estas se pueden interpretar como las componentes de un cierto vector, el *gradiente* de f. Los gradientes en los diversos puntos de R forman un *campo vectorial.* Los puntos críticos de R son aquellos en donde el gradiente se anula. En todos los demás puntos el vector gradiente tiene una dirección determinada de modo único, descrita, por ejemplo, por sus *cosenos directores*

$$\xi = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \qquad \text{y} \qquad \eta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

(ver el Volumen I, p. 383). Evidentemente, ξ y η son funciones continuas de (x, y) en todo punto no crítico de R. Puede ponerse

$$\xi = \cos\theta, \quad \eta = \operatorname{sen}\theta,$$

donde, sin embargo, el ángulo θ — la *inclinación* del vector (u, v)— sólo está determinado hasta múltiplos enteros de 2π. En general, no es posible seleccionar un valor definido para θ que varíe continuamente con (x, y). Por otra parte, la diferencial

$$\begin{aligned} d\theta &= d \arc \tan \frac{v}{u} = \frac{u\,dv - v\,du}{u^2 + v^2} \\ &= \frac{(uv_x - vu_x)dx + (uv_y - vu_y)dy}{u^2 + v^2} \end{aligned} \tag{75}$$

está definida sin ambigüedad para todo punto no crítico (x, y) de R.

Sea ahora C una curva cerrada orientada que se encuentra en R y no pasa por punto crítico alguno de f. Se define el *índice de Poincaré* de C con respecto al campo vectorial, como el número

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \int_C d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{u\,dv - v\,du}{u^2 + v^2}. \tag{76}$$

Si C está dada paramétricamente por

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (a \leqq t \leqq b),$$

donde ϕ y ψ tienen los mismos valores en los dos puntos extremos del intervalor de t y donde la orientación de C corresponde al sentido de la t creciente, entonces el índice de C está dado por la integral

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \left(\frac{u}{u^2 + v^2} \frac{dv}{dt} - \frac{v}{u^2 + v^2} \frac{du}{dt} \right) dt.$$

Como después de recorrer la curva C se regresa al mismo punto (x, y), los valores para θ correspondientes a $t = a$ y $t = b$ sólo pueden diferir en un múltiplo de 2π. De aquí que I_C siempre es un entero. Este entero cuenta el número total de rotaciones en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj llevadas a cabo por el vector (u, v) a medida que se recorre la curva c en el sentido indicado por su orientación.[1] Por supuesto, I_C cambia de signo cuando se cambia la orientación de C. Como ejemplo considérese la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Aquí, el gradiente

$$(u, v) = (2x, 2y)$$

en cualquier punto (x, y) tiene la dirección del radio vector que emana del origen. Supóngase que se usa un sistema coordenado derecho. Para una curva cerrada C que no pasa por el origen, el índice

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

mide el número total de vueltas en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj realizadas por el radio que parte del origen, al recorrer toda la curva C. Esta es exactamente la fórmula, deducida en el Volumen I (p. 434), para el número de veces que la curva C rodea el origen.

Generalmente, en los puntos donde u y v no se anulan simultáneamente la diferencial $d\theta$ de la ecuación (75) satisface la condición de integrabilidad

[1]Para la definición de "índice" no es necesario que el campo vectorial sea el campo de un gradiente.

$$\left(\frac{uv_x - vu_x}{u^2 + v^2}\right)_y = \left(\frac{uv_y - vu_y}{u^2 + v^2}\right)_x,$$

la cual puede verificarse directamente y, por supuesto, sólo refleja la relación

$$\left[\left(\text{arc tan}\frac{v}{u}\right)_x\right]_y = \left[\left(\text{arc tan}\frac{v}{u}\right)_y\right]_x,$$

la cual se cumple sin importar la posible multiformidad de la función arc tan (v/u). *Por el teorema fundamental acerca de las integrales de línea* (ver la p. 135 y la p. 127), *se concluye que* $I_C = 0$ *si* C *es la frontera de un subconjunto simplemente conexo de* R *que no contiene puntos críticos de* f.

De modo más general, considérese un conjunto R múltiplemente conexo con un cierto número de curvas frontera cerradas $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Supóngase que el sistema coordenado x, y es derecho, como se acostumbra. Asimismo, que cada C_i está orientada de tal manera que al recorrerla en el sentido correspondiente a su orientación R queda a la izquierda. Supóngase que R puede dividirse en los conjuntos simplemente conexos R_k, por medio de arcos auxiliares apropiados que unan a las diversas C_i (ver la Fig. 3.31). Considérese que f no tiene puntos críticos en R. Entonces,

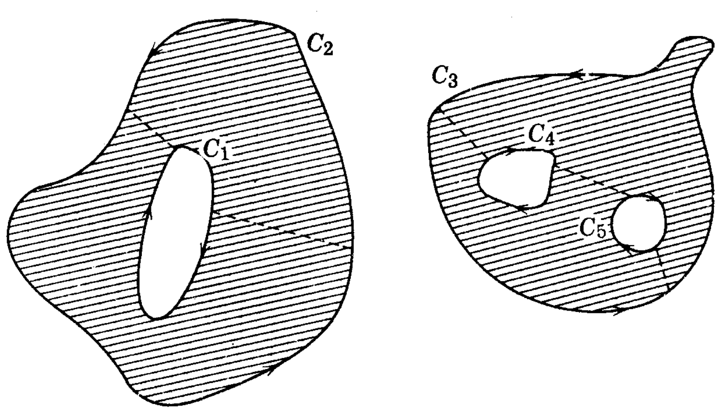

Figura 3.31 Región múltiplemente conexa con curvas frontera C_i, orientadas positivamente, dividida en conjuntos simplemente conexos.

$$\int d\theta = 0$$

cuando se extiende sobre la frontera de cualquiera de los R_k recorrida en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Formando la suma de las integrales sobre las fronteras de todos los R_k, se ve que las contribuciones de los arcos auxiliares se cancelan (ver la p. 124) y se encuentra que

$$0 = \sum_i \int_{C_i} d\theta.$$

Empero, ésto significa que

$$\sum_{i=1} I_{C_i} = 0 \tag{77}$$

si las C_i son curvas cerradas que forman la frontera de un conjunto R libre de puntos críticos de f, y con un sentido de orientación que deja a R a la izquierda.

Como consecuencia se obtiene el teorema: *existe al menos un punto crítico en R, siempre que la suma de los índices de las curvas frontera de R (orientadas como se explicó) sea diferente de cero.*

Se obtiene una información más precisa acerca del número de puntos críticos en R, si se supone que f tiene segundas derivadas continuas en R, que f tiene sólo un número finito de puntos críticos $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$, y que, en cada punto crítico, el discriminante

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}{}^2$$

no se anula. Entonces todos los puntos críticos son máximos o mínimos relativos correspondientes a $D > 0$, o bien, puntos silla correspondientes a $D < 0$ (ver la p. 402). Supóngase que R nuevamente está limitado por las curvas simples cerradas y orientadas $C_1, \ldots, C_n$ que no pasan por ninguno de los puntos críticos de f. Puede cortarse una pequeña vecindad de cada punto crítico (x_k, y_k), limitada por una curva γ_k. Queda un conjunto limitado por las curvas $C_1, \ldots, C_n$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ que no contiene puntos críticos de f. Dando a cada γ_k la orientación contraria al movimiento de las manecillas del reloj, por (77) se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} I_{C_i} - \sum_{k=1}^{N} I_{\gamma_k} = 0. \tag{78}$$

Ahora bien, el índice de una de las curvas γ_k que limita a un conjunto que contiene a un solo punto crítico (x_k, y_k) depende precisamente del *tipo* de ese punto, como se demostrará.

Sea γ_k un pequeño círculo

$$x = x_k + r\cos t, \quad y = y_k + r\operatorname{sen} t$$

de radio r y centro en el punto crítico (x_k, y_k). Por el teorema de Taylor, sobre γ_k se tiene

$$\text{(79a)} \quad \begin{aligned} u = f_x(x, y) &= (x - x_k)f_{xx}(x_k, y_k) + (y - y_k)f_{xy}(x_k, y_k) + \cdots \\ &= r(a\cos t + b\operatorname{sen} t) + O(r^2) \end{aligned}$$

$$\text{(79b)} \quad \begin{aligned} v = f_y(x, y) &= (x - x_k)f_{xy}(x_k, y_k) + (y - y_k)f_{yy}(x_k, y_k) + \cdots \\ &= r(b\cos t + c\operatorname{sen} t) + O(r^2), \end{aligned}$$

donde se puso

$$a = f_{xx}(x_k, y_k), \quad b = f_{xy}(x_k, y_k), \quad c = f_{yy}(x_k, y_k).$$

Para averiguar cuántas veces el vector (u, v) gira en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj a medida que t varía desde 0 hasta 2π), se observa que el punto en el plano con coordenadas (u, v) (es decir, el punto cuyo vector de posición tiene las componentes u, v) describe aproximadamente la elipse E con representación paramétrica

$$\text{(80)} \qquad u = r(a\cos t + b\operatorname{sen} t), \quad v = r(b\cos t + c\operatorname{sen} t).$$

Esta elipse tiene su centro en el origen y la ecuación no paramétrica

$$(cu - bv)^2 + (av - bu)^2 = r^2(ac - b^2)^2.$$

Es evidente que el punto (u, v) describe la elipse E dada en (80) exactamente una vez, conforme t crece desde 0 hasta 2π, de modo que el índice de γ_k sin duda es $+1$, o bien, -1, dependiendo del sentido, contrario o en el mismo del movimiento de las manecillas del reloj, de E correspondiente a la t creciente. Ahora bien, la aplicación lineal

$$u = r(au + bv), \quad v = r(bu + cv)$$

evidentemente lleva al círculo

$$u = \cos t, \quad v = \operatorname{sen} t$$

del plano u, v (donde el crecimiento de t corresponde al sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj sobre el círculo) hacia E. Dado que el sentido de las curvas se conserva o se invierte, de acuerdo con el signo del jacobiano $r^2(ac - b^2)$ de la aplicación (ver la p. 307), se ve que

$$I_{\gamma_k} = \operatorname{sgn}(ac - b^2) = \operatorname{sgn}[f_{xx}(x_k, y_k)f_{yy}(x_k, y_k) - f_{xy}{}^2(x_k, y_k)]$$
$$= \operatorname{sgn} D(x_k, y_k).^1$$

De (78) se deduce que

$$\sum_{i=1}^{n} I_{C_i} = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{sgn} D(x_k, y_k).$$

Como se observó con anterioridad, sgn $D(x_k, y_k) = +1$ cuando el punto crítico (x_k, y_k) es un máximo o un mínimo relativo, y sgn $D(x_k, y_k) = -1$, cuando es un punto silla. Denotemos por M_0, M_1, M_2, respectivamente, los números de mínimos, de puntos silla y de máximos en R. El resultado obtenido se convierte en la *identidad de Poincaré*.[1]

$$\sum_{i=1}^{N} I_{C_i} = M_0 - M_1 + M_2. \tag{81}$$

En palabras, *el exceso del número de máximos y mínimos relativos de f en R sobre el número de puntos silla es igual a la suma de los índices de las curvas frontera de R con respecto al campo del gradiente de f, donde cada curva frontera está orientada de modo que R quede a la izquierda.*

El resultado es particularmente sencillo cuando f es constante a lo largo de cada curva frontera C_i de R. Entonces el vector gradiente de f es perpendicualr a C (ver la p. 279) y tiene la dirección de la normal exterior o interior de C_i. Si no se tiene punto crítico alguno de f sobre C_i y ésta es una curva suave simple cerrada, la dirección del gradiente varía continuamente y no puede saltar en punto al-

[1]Se puede obtener el mismo resultado analíticamente, observando que, por las fórmulas (79a, b),

$$\lim_{r\to 0} I_{\gamma_k} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_k} \frac{u\,dv - v\,du}{u^2 + v^2}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ac - b^2}{(a\cos t + b\operatorname{sen} t)^2 + (b\cos t + c\operatorname{sen} t)^2}\,dt.$$

La integral se puede evaluar explícitamente (ver el Volumen I, p. 294) y tiene el valor 2π sgn $(ac - b^2)$.

[1]Las fórmulas correspondientes para las funciones de más de dos variables independientes son las de M. Morse.

guno de C_i desde la dirección de la normal exterior hacia la de la normal interior o viceversa. Es evidente entonces que el vector gradiente gira exactamente una vez a lo largo de C_i y en el mismo sentido que el vector tangente a C_i, con el cual el gradiente forma un ángulo fijo. De donde, $I_{C_i} = +1$ cuando C_i tiene el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, y -1 cuando el sentido es el mismo. Fácilmente se ve que con la convención tomada acerca de la orientación de las curvas frontera de R, una curva frontera C_i tiene la orientación del sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj cuando forma la frontera "externa" de una de las partes no conexas que constituyen a R, y tiene orientación en el sentido de ese movimiento si limita a uno de los "hoyos" en R (ver la Fig. 3.31). Se concluye que, para f constante sobre las curvas frontera,

$$M_0 - M_1 + M_2 = N_0 - N_1, \tag{82}$$

donde N_0 es el número de componentes conexas de R y N_1 es el número total de hoyos en R (la "conectividad" de R).

Tómese, por ejemplo, el caso en donde R es un disco circular. Aquí, $N_0 = 1, N_1 = 0$, y, por tanto, para f constante sobre la frontera,

$$M_0 - M_1 + M_2 = 1.$$

Aquí se encuentra que *el número total de puntos críticos en el interior de R es*

$$M_0 + M_1 + M_2 = 1 + 2M_1$$

y de aquí que, evidentemente, es un número impar. Es más, si el número $M_0 + M_2$ de extremos relativos de f es mayor que 1, entonces f tiene al menos un punto silla en R.

Para un anillo circular R, se tiene

$$N_0 = 1, \quad N_1 = 1,$$

y, por tanto, para f constante sobre cada curva frontera,

$$M_0 - M_1 + M_2 = 0.$$

Tómese el caso en donde f tiene el *mismo* valor constante sobre cada una de las dos curvas frontera. Entonces f es constante en todo punto o toma su máximo o mínimo en el interior de R. Si se postula que f

sólo tiene puntos críticos con $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$, se excluye el caso de f constante. Entonces se concluye que $M_0 + M_2 > 0$ y, de aquí, que $M_1 > 0$. Por tanto, *una función en un anillo circular que se anula en todo punto sobre la frontera, tiene por lo menos un punto crítico con* $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \leqq 0$ *en el interior.*

Ejercicios A.2

1. Dar un ejemplo de una función continua f que tenga una singularidad en el origen de índice
   (a) -1;
   (b) -2;
   (c) $-n$, donde n es un número natural.
2. Dar un ejemplo de una función f (no se requiere que sea continua) que tenga una singularidad en el origen de índice
   (a) 2;
   (b) n, donde n es un número natural.
3. Sea R una región convexa cerrada en el plano x, y limitada por una curva convexa cerrada C con una tangente que gira contínuamente.
   Sea
   $$\xi = f(x, y), \quad \eta = g(x, y)$$
   una aplicación contínuamente diferenciable de R hacia sí misma. Probar que la aplicación tiene por lo menos un "punto fijo" en R, es decir, que existe un punto (x, y) en R tal que
   $$x = f(x, y), \quad y = g(x, y).$$
   El teorema análogo del punto fijo en n dimensiones se debe a Brouwer. [Sugerencia. Considérese el campo de vectores con componentes $u = f(x, y) - x$, $v = g(x, y) - y$.]

A.3 Puntos singulares de curvas planas

En la p. 282 se vió que, en general, una curva $f(x, y) = 0$ tiene una singularidad en un punto $x = x_0$, $y = y_0$ tal que se cumplen las tres ecuaciones

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

Para estudiar sistemáticamente estos puntos singulares supóngase que en la vecindad de (x_0, y_0) la función $f(x, y)$ tiene derivadas continuas hasta el segundo orden y que, en ese punto, no todas las segundas derivadas se anulan. Desarrollando en una serie de Taylor hasta los términos de segundo orden se obtiene la ecuación de la curva en la forma

$$2f(x, y) = (x - x_0)^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) f_{xy}(x_0, y_0) \\ + (y - y_0)^2 f_{yy}(x_0, y_0) + \varepsilon\rho^2 = 0,$$

donde se ha puesto $\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ y ε tiende a 0 con ρ.

Usando un parámetro t, la ecuación de la recta general que pasa por el punto (x_0, y_0) puede escribirse en la forma

$$x - x_0 = at, \quad y - y_0 = bt,$$

donde a y b son dos constantes arbitrarias que puede suponerse se eligen de modo que $a^2 + b^2 = 1$. Para determinar el punto de intersección de esta recta con la curva $f(x, y) = 0$, se sustituyen estas expresiones en el desarrollo anterior para $f(x, y)$. Así, para el punto de intersección se obtiene la ecuación

$$a^2 t^2 f_{xx} + 2abt^2 f_{xy} + b^2 t^2 f_{yy} + \varepsilon t^2 = 0.$$

Una primera solución es $t = 0$, es decir, el propio punto (x_0, y_0) como es obvio. Sin embargo, es digno de hacerse notar que el primer miembro de la ecuación es divisible entre t^2, de modo que $t = 0$ es una *raíz doble* de la ecuación. Por esta razón, en ocasiones a los puntos singulares también se les da el nombre de *puntos dobles* de la curva. Si se elimina el factor t^2, queda la ecuación

$$a^2 f_{xx} + 2abf_{xy} + b^2 f_{yy} + \varepsilon = 0.$$

Ahora se desea saber si es posible que la recta se interseque con la curva en otro punto que tienda a (x_0, y_0) a medida que la recta tiende hacia alguna posición límite particular. Por supuesto, esa posición límite de una secante es lo que se conoce como tangente. Para discutir ésto, se observa que a medida que un punto tiende a (x_0, y_0) la cantidad t tiende a 0 y, por lo tanto, ε también tiende a 0. Si la ecuación anterior todavía tiene que ser satisfecha, la expresión $a^2 f_{xx} + 2abf_{xy} + b^2 f_{yy}$ también debe tender a 0, es decir, para la posición límite de la recta debe tenerse

$$a^2 f_{xx} + 2abf_{xy} + b^2 f_{yy} = 0.$$

Esta ecuación nos da una condición cuadrática que determina la razón a/b, la cual fija la pendiente de una tangente.

Si el discriminante de la ecuación es negativo, es decir, si

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0,$$

se obtienen dos tangentes reales distintas. La curva tiene un *punto doble,* o *nodo,* como el que exhibe la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) =$ en el origen, o la estrofoide $(x^2 + y^2)(x - 2a) + a^2x = 0$ en el punto $x_0 = a$, $y_0 = 0$.

Si el discriminante se anula, es decir, si

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0,$$

se obtienen dos tangentes coincidentes; entonces es posible que dos ramas de la curva se toquen o que la curva tenga un *cúspide*.[1]

Por último, si

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0,$$

no hay tangente (real) en lo absoluto. Esto ocurre, por ejemplo, en el caso de los llamados *puntos aislados* de una curva algebraica. Estos son puntos en los cuales se satisface la ecuación de la curva pero en cuya vencindad ningún otro punto de la curva se encuentra.

La curva $(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = a^4 + b^4$ es un ejemplo de ésto. Los valores $x = 0$, $y = 0$ satisfacen la ecuación, pero para todos los demás valores en la región $|x| < a\sqrt{2}$, $|y| < b\sqrt{2}$, el primer miembro es menor que el segundo.

Se ha omitido el caso en el que se anulan todas las derivadas de segundo orden. Este caso conduce a consideraciones complicadas y no lo investigaremos. A través de uno de tales puntos pueden pasar varias ramas de la curva, o pueden ocurrir singularidades de otros tipos.

Por último, mencionaremos brevemente la relación entre lo que se ha discutido aquí y la teoría de los máximos y mínimos. Debido a que las primeras derivadas se anulan, la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en un punto estacionario (x_0, y_0) es sencillamente

$$z - f(x_0, y_0) = 0.$$

[1] En este caso la curva no necesita tener una singularidad en lo absoluto; por ejem- $f(x, y) = (x - y)^2$ en el origen.

¡Por lo tanto, la ecuación

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = 0$$

nos da la proyección sobre el plano x,y de la curva de intersección del plano tangente con la superficie, y se ve que el punto (x_0, y_0) es un punto singular de esta curva. Si este es un punto aislado, en una cierta vecindad el plano tangente no tiene otro punto en común con la superficie y la función $f(x, y)$ tiene un máximo o un mínimo en el punto (x_0, y_0) (ver la p. 402). Si, no obstante, el punto singular es un punto múltiple, el plano tangente corta a la superficie en una curva con dos ramas y (x_0, y_0) es un punto silla. Estas observaciones nos conducen precisamente a las condiciones suficientes que se encontraron con anterioridad en la Sección A.1.

Ejercicios A.3

1. Encontrar los puntos singulares de las curvas siguientes y discutir su naturaleza:

   (a) $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0, c \neq 0$

   (b) $x^2 + y^2 - 2x^3 - 2y^3 + 2x^2y^2 = 0$

   (c) $x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 = 0$

   (d) $x^5 - x^4 + 2x^2y - y^2 = 0.$

A.4 Puntos singulares de superficies

De manera semejante, puede discutirse un punto singular de una superficie $f(x, y, z) = 0$, es decir, un punto para el cual

$$f = 0, \quad f_x = f_y = f_z = 0.$$

Sin pérdida de generalidad se puede tomar el punto como el origen O. Si se escribe

$$f_{xx} = \alpha, \quad f_{yy} = \beta, \quad f_{zz} = \gamma, \quad f_{xy} = \lambda, \quad f_{yz} = \mu, \quad f_{xz} = \nu,$$

para los valores en este punto, se obtiene la ecuación

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\lambda xy + 2\mu yz + 2\nu xz = 0,$$

para un punto (x, y, z) que se encuentra sobre una tangente a la superficie en O.

Esta ecuación representa un cono cuadrático que toca a la superficie en el punto singular (en lugar del plano tangente en un punto ordinario de la superficie), si se supone que no todas las cantidades $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ se anulan y que la ecuación anterior tiene soluciones reales que no sean $x = y = z = 0$.

Ejercicios A.4

1. Usando los resultados del Ejercicio 6 de A.1, examinar el comportamiento de una superficie en la vecindad de un punto singular.

A.5 Relación entre la representación de Euler y la de Lagrange del movimiento de un fluido

Sean (a, b, c) las coordenadas de una partícula en el instante $t = 0$ en un medio continuo (líquido o gas) en movimiento. Entonces el movimiento se puede representar por medio de las tres funciones

$$x = x(a, b, c, t),$$
$$y = y(a, b, c, t),$$
$$z = z(a, b, c, t),$$

o en términos de un vector de posición, $\mathbf{X} = \mathbf{X}(a, b, c, t)$. La velocidad y la aceleración están dadas por las derivadas con respecto al tiempo t. De donde el vector velocidad es $\dot{\mathbf{X}}$ con componentes $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, y el vector aceleración es $\ddot{\mathbf{X}}$ con componentes $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$, las cuales todas aparecen como funciones de la posición inicial (a, b, c) y del parámetro t. Para cada valor de t se tiene una transformación de las coordenadas (a, b, c) que pertenecen a los diferentes puntos del medio continuo en movimiento, hacia las coordenadas (x, y, z) en el instante t. Esta se conoce como *representación de Lagrange del movimiento.* Otra representación, introducida por Euler, se basa en el conocimiento de tres funciones

$$u(x, y, z, t), \ v(x, y, z, t), \ w(x, y, z, t)$$

que representan las componentes $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ de la velocidad $\mathbf{X}$ del movimiento en el punto (x, y, z), en el instante t.

Con el fin de pasar de la primera representación a la segunda, se tiene que usar la primera representación para calcular a, b, c como funciones de x, y, z, y t y sustituir estas expresiones en las expresiones para $\dot{x}(a, b, c, t), \dot{y}(a, b, c, t), \dot{z}(a, b, c, t)$:

$$u(x, y, z, t) = \dot{x}(a(x, y, z, t),\ b(x, y, z, t),\ c(x, y, z, t), t), \ldots .$$

A continuación se obtienen las componentes de la aceleración a partir

$$\dot{x}(a, b, c, t) = u(x(a, b, c, t),\ y(a, b, c, t),\ z(a, b, c, t), t), \ldots ,$$

derivando con respecto a t, para a, b, c fijas:

$$\ddot{x} = u_x\dot{x} + u_y\dot{y} + u_z\dot{z} + u_t, \ldots$$

o bien,

$$\ddot{x} = u_x u + u_y v + u_z w + u_t,$$

$$\ddot{y} = v_x u + v_y v + v_z w + v_t,$$

$$\ddot{z} = w_x u + w_y v + w_z w + w_t.$$

En la mecánica de un medio continuo es fundamental la ecuación siguiente, que relaciona las representaciones de Euler y de Lagrange:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = u_x + v_y + w_z = \frac{\dot{D}}{D},$$

donde

$$D(x, y, z, t) = \frac{d(x, y, z)}{d(a, b, c)}$$

es el jacobiano que caracteriza a la transformación.

El lector puede completar la demostración de ésto y el teorema correspondiente en dos dimensiones, usando las diversas reglas para la derivación de funciones implícitas (ver la p. 299).

Ejercicios A.5

1. ¿Cuál es la interpretación física de las relaciones $u_t = v_t = w_t = 0$.
2. Interpretar las relaciones

$$\ddot{x} = u_x u + u_y v + u_z w + u_t,$$

$$\ddot{y} = v_x u + v_y v + v_z w + v_t,$$

$$\ddot{z} = w_x u + w_y v + w_z w + w_t.$$

físicamente; reescríbanse estas relaciones usando notación vectorial.

A.6 Representación tangencial de una curva cerrada y la desigualdad isoperimétrica

Una familia de rectas con parámetro α se puede dar por medio de

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p(\alpha) = 0, \cdot \cdot \cdot \cdot, \tag{83}$$

donde p(α) denota una función que es continuamente diferenciable por dos veces y periódica de período 2π (aquí p representa la distancia de la recta de la familia con dirección normal α, al origen). La envolvente C de estas rectas es una curva cerrada que satisface (83) y la ecuación adicional

$$-x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha - p'(\alpha) = 0.$$

De aquí que

$$\begin{aligned} x &= p \cos \alpha - p' \operatorname{sen} \alpha \\ y &= p \operatorname{sen} \alpha + p' \cos \alpha \end{aligned} \tag{84}$$

es la representación paramétrica de C (siendo α el parámetro). La fórmula (83) da la ecuación de las tangentes de C y se conoce como *ecuación tangencial*[1] de C; $p(\alpha)$ es la llamada *función soporte* de C.

Dado que

$$x' = -(p + p'') \operatorname{sen} \alpha, \qquad y' = (p + p'')\cos \alpha,$$

inmediatamente se tienen las expresiones que siguen para la longitud L y el área A y C:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\alpha = \int_0^{2\pi} (p + p'')d\alpha = \int_0^{2\pi} p\, d\alpha$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (xy' - yx')d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (p + p'')p\, d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2)d\alpha,$$

puesto que $p'(\alpha)$ también es una función de período 2π.[2]

[1] La representación de C en la forma (84) es válida para cualquier curva convexa cerrada cuya curvatura sea finita y positiva y varíe contínuamente a lo largo de C.

[2] Como, obviamente, $p(\alpha) + c$ es la función soporte de la curva paralela que se encuentra a una distancia c de C, las fórmulas para el área y la longitud de una curva paralela (ver el Volumen I, p. 437, Ejercicio 7, y su solución en A. Blank: *Problems in Calculus and Analysis*, p. 188) se deducen fácilmente a partir de estas expresiones.

De ésto se deduce la *desigualdad isoperimétrica*

$$L^2 \geqq 4\pi A,$$

donde sólo se cumple el signo de igualdad para el círculo. Esto también se puede expresar por medio de la proposición: *entre todas las curvas cerradas de longitud dada, el círculo tiene el área máxima.*

Para la demostración se aplica el desarrollo de Fourier de $p(\alpha)$ (Volumen I, p. 594),

$$p(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\alpha + b_\nu \operatorname{sen} \nu\alpha);$$

entonces

$$p'(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu(b_\nu \cos \nu\alpha - a_\nu \operatorname{sen} \nu\alpha),$$

de modo que (aplicando las relaciones de ortogonalidad del Volumen I, p. 593) se tiene

$$L = \pi a_0,$$

$$A = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a_0{}^2}{2} - \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu^2 - 1)(a_\nu{}^2 + b_\nu{}^2)\right).$$

De donde,

$$A \leqq \frac{\pi a_0{}^2}{4} = \frac{L^2}{4\pi};$$

En particular, $A = L^2/4\pi$ sólo si $a_\nu = b_\nu = 0$ para $\nu \geqq 2$; es decir, $p(\alpha) = a_0/2 + a_1 \cos \alpha + b_1 \operatorname{sen} \alpha$. La última ecuación define un círculo, como se prueba fácilmente a partir de (84).

Ejercicios A.6

1. Encontrar las ecuaciones de las envolventes, sus longitudes y áreas encerradas, para cada una de las familias de rectas que siguen:
   (a) $(x + 2) \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha + 2 = 0$
   (b) $x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha = 0.$
2. Comparar las fórmulas para el área y la longitud. ¿Pueden existir curvas de longitud arbitrariamente grande que encierren un área arbitrariamente pequeña?
3. ¿Puede representarse cualquier curva cerrada como la envolvente de las rectas (83)?