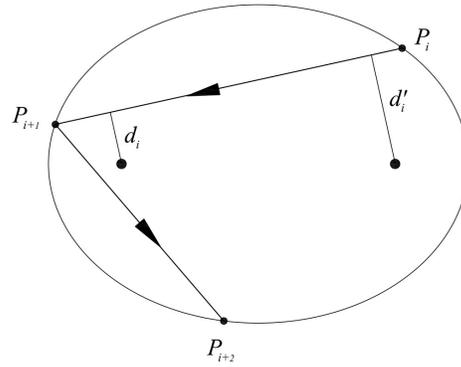


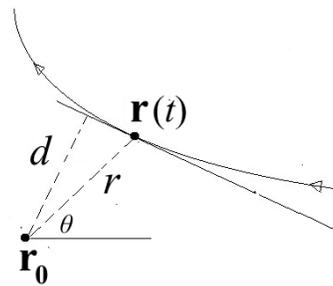
RETO: BILLARES ELÍPTICOS

Una pelota rebota dentro de una mesa de billar elíptica (se refleja de las paredes). Sean P_1, P_2, P_3, \dots los puntos sucesivos de la elipse en donde rebota la pelota (en orden cronológico). Demuestra que el producto de las distancias de los focos de la elipse al segmento $P_i P_{i+1}$ no depende de i . Esto es, en el dibujo a la derecha, $d_i d'_i = \text{const.}$



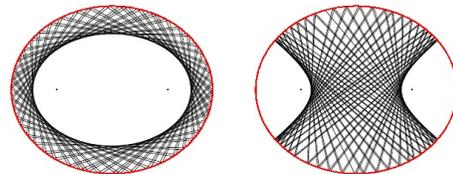
Comentarios:

1. Para un objeto (con masa=1) que sigue una trayectoria $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ en el plano, su *momento angular* con respecto a un punto fijo \mathbf{r}_0 se define por $\ell = r\dot{\theta}$, donde $r = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|$ y θ es el ángulo entre el vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ y un vector fijo, digamos $(1, 0)$. Demuestra que $|\ell| = dv$, donde d es la distancia de \mathbf{r}_0 a la recta tangente a la trayectoria en $\mathbf{r}(t)$ y $v = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|$ (la rapidez del objeto). El signo de ℓ indica el sentido de la rotación del objeto alrededor de \mathbf{r}_0 (en contra la manecillas del reloj para $\ell > 0$, con la manecillas del reloj para $\ell < 0$).



2. Demuestra: el producto de las distancias de la tangente a una elipse a sus focos es constante (no depende del punto de la elipse en donde se toma la tangente). Formula y demuestra afirmaciones análogas para la hipérbola y la parábola.

3. Concluye: el producto de los momentos angulares $\ell_1 \ell_2$ de una pelota de billar, rebotando en una mesa de billar elíptica, con respecto a los focos de la elipse, es constante (no depende de t). Luego, si $\ell_1 \ell_2 > 0$ la trayectoria de la pelota es tangente en todo momento a una elipse confocal (una elipse ubicada dentro de la mesa y con los mismos focos; si $\ell_1 \ell_2 < 0$ la trayectoria es tangente a una hipérbola confocal.



4. ¿Qué pasa cuando $\ell_1 \ell_2 = 0$?

5. ¿Puedes encontrar la ley de conservación correspondiente para una pelota que rebota entre las dos ramas de una hipérbola?