Tarea núm. 4

(para entregar el jueves 12 feb)

Repaso de división de polinomios

Si dividimos un polinomio $p(x)$ por otro polinomio $q(x)$ el resultado (el "cociente") es un polinomio $h(x)$ más un *resíduo* $r(x)$, un polinomio gradcon o menor que el grado de $q(x)$. Esto significa que

$$p(x) = h(x)q(x) + r(x).$$

Si el residuo $r(x) = 0$ decimos que $q(x)$ *divide* a $p(x)$.

Un caso especial importante es cuando $q(x)$ es *lineal* (de grado 1), o sea de la forma $q(x) = ax + b$. En este caso el resíduo es una constante, digamos c (un número, un polinomio de grado 0, o el número 0), por lo que tenemos

$$p(x) = h(x)(ax + b) + c.$$

Ahora resulta que hay un atajo (un truco) que nos permite encontrar el resíduo c *sin hacer la división*. Primero resolvemos $ax + b = 0$. La solución es $x = -b/a$. Sustituimos $-b/a$ en los dos lados y obtenemos $p(-b/a) = c$.

Conclusión ("el Teorema del Resíduo"): $ax + b$ divide al polinomio $p(x)$, o sea $p(x) = h(x)(ax + b)$ para algun polinomio $h(x)$ (o $ax + b$ es un *factor* de $p(x)$), justo cuando $-b/a$ es una *raíz* de $p(x)$, $p(-b/a) = 0$.

Los Problemas

1. En cada inciso, divide $p(x)$ por $q(x)$ y escriba el resultado como
   $p(x) =$ (cociente) $\cdot\, q(x)+$ residuo.

   Ejemplo: $p(x) = x^3 + 4x^2 + x - 4$, $q(x) = x^2 - 1$.
   Solución: haciendo la división, nos da cociente $x + 4$ y resíduo $2x$.
   Respuesta: $x^3 + 4x^2 + x - 4 = (x^2 - 1)(x + 4) + 2x$.

   a) $p(x) = -x^3 - 6x^2 + 2x - 4$, $q(x) = x - 1$.
   b) $p(x) = 3x^4 + 4x^3 - 32x^2 - 5x - 20$, $q(x) = 3x^3 - 8x^2 - 5$.
   c) $p(x) = x + 4$, $q(x) = x^2 + 1$.
   d) $p(x) = x^4 + x^2 + 1$, $q(x) = x^2 - x + 1$.
   e) $p(x) = 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 18$, $q(x) = 2x^2 - 3$.
   f) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 4$, $q(x) = x + 1$.

2. En cada caso, determina *sin hacer la división*, el residuo de la división de $p(x)$ por $q(x)$,

   Ejemplo: $p(x) = -x^3 - 6x^2 + 2x - 4$, $q(x) = x - 1$. (El primer inciso del problema anterior).
   Solución: Resolviendo $x - 1 = 0$ da $x = 1$. Luego $p(1) = -1 - 6 + 2 - 4 = -9$. Respuesta: El residuo de la división de $-x^3 - 6x^2 + 2x - 4$ por $x - 1$ es -9.

   a) $p(x) = x^4 + 2x + 1$, $q(x) = 2x - 1$.
   b) $p(x) = x^4 + 2x + 1$, $q(x) = x + 1$.
   c) $p(x) = 2x^3 - 7x + 11$, $q(x) = x - 3$.
   d) $p(x) = 2x^3 - 7x + 11$, $q(x) = x$.
   e) $p(x) = x - 5$, $q(x) = 3x + 4$.
   f) $p(x) = 8$, $q(x) = 5x + 2$.

3. (Opcional) Al dividir un polinomio $p(x)$ por $x^2 - 4$ el resíduo es $-2x + 1$. Determina el resíduo al dividir $p(x)$ por $x + 2$.

4. (Reto, opcional) ¿Para qué valores de n, $x^2 - 1$ divide a $x^n - 1$?