1er parcial

4 oct 2019

I. Cierto o Falso (40 pts)

Contesta 10 de los siguientes 13 incisos (si resuelves mas se cuenta los mejores 10). En caso de "Cierto" solo hay que dar una explicación breve de 1-2 frases (no hay que dar una demostración completa; puedes usar cualquier teorema que conoces, si lo anuncias bien). En caso de "Falso" basta dar un contraejemplo.

1. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{12}+5]$ (igualdad de subconjuntos de $\mathbb{R}$).
2. $\mathbb{Q}[x]/(5x^2)$ es un campo.
3. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una raiz de un polinomio en $\mathbb{Q}[x]$ de grado 5. Entonces $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\}$ es una base de $\mathbb{Q}[\alpha]$.
4. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una raiz de un polinomio irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ de grado 5. Entonces $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\}$ es una base de $\mathbb{Q}[\alpha]$.
5. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dos raices distintas de un polinomio en $\mathbb{Q}[x]$ de grado 5. Entonces $\mathbb{Q}[\alpha]$, $\mathbb{Q}[\beta]$ son campos isomorfos.
6. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dos raices distintas de un polinomio irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ de grado 5. Entonces $\mathbb{Q}[\alpha]$, $\mathbb{Q}[\beta]$ son campos isomorfos.
7. $\mathbb{Q}[x]/(x^3)$ es un campo.
8. Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathbb{Q}[\alpha] \subset \mathbb{C}$ es un campo.
9. Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraico, $\mathbb{Q}[\alpha] \subset \mathbb{C}$ es un campo.
10. Cualquier dos extensiones finitas de un campo del mismo grado son isomorfas.
11. Cualquier dos extensiones finitas de un campo finito del mismo grado son isomorfas.
12. Todo ángulo es trisectable con compas y regla.
13. Todo polinomio irreducible de grado 10 en $\mathbb{Q}[x]$ tiene 10 raices distintas en $\mathbb{C}$.

II. Problemas adicionales.

Hay que dar demostraciones completas para todos los incisos).

1. (15 pts)
   Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una raiz de $x^3 + 3x + 1$.
   a) Demuestra: $\mathbb{Q}[\alpha] \subset \mathbb{C}$ es un subcampo.
   b) Calcula la dimensión de $\mathbb{Q}[\alpha]$ sobre $\mathbb{Q}$.
   c) Es posible expresar a $(1+\alpha)^{-1}$ como un polinomio en α? En caso que sí, encuentra tal polinomio.
2. (40 pts)
   a) Demuesta: Todo campo finito es de orden p^r para algún entero positivo r y primo p.
   b) Demuesta: $x^3 - x + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
   c) Construya un campo finito F_{27} de orden 27.
   d) Encuentra un generador α del grupo multiplicativo F_{27}^* (los elementos no nulos de F_{27}).