Práctica para el 1er parcial

I. Afirmaciones "triviales" (cada afirmación requiere un argumento rápido de 1-2 frases).

1. $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \mathbb{Q}[2\sqrt{5} - 3]$.
2. El polinomio $x^2 - p$ no tiene raices en el campo $\mathbb{Q}[\sqrt{q}]$ (p, q son primos distintos). Por lo tanto $\mathbb{Q}[\sqrt{q}] \neq \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$.
3. Sea $F \subset K$ una extensión de campos . Si $a, b \in K$ y $a \in F[b]$, entonces $F[a] \subset F[b]$.
4. $\mathbb{Q}[\sqrt{8}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (igualdad de subconjuntos de $\mathbb{R}$).
5. $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2)$ es un campo isomorfo a $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Encuentra un isomorfismo.
6. Si $p(x)$ es un polinomio irreducible de grado n sobre F entonces las clases de equivalencia de $1, x, \ldots, x^{n-1}$ modulo $(p(x))$ forman una base del espacio vectorial $F[x]/(p(x))$ sobre F.
7. El número de las n-simas raices de unidad en $\mathbb{C}$ de orden n es $\phi(n)$ (el número de los enteros entre 1 y n que son primos relativos a n).
8. $\mathbb{Q}[x]/(x^2)$ no es un campo.
9. Todo polinomio de grado impar en $\mathbb{R}[x]$ es reducible sobre $\mathbb{R}$.
10. Los campos $\mathbb{Q}[\sqrt{5}], \mathbb{Q}[\sqrt{10}], \mathbb{Q}[\sqrt{15}]$ no son isomorfos.
11. Sea $p(x) = x^6 - 7x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 42x - 14$.
    a) Si $\alpha \in \mathbb{C}$, $p(\alpha) = 0$ entonces $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] \leq 6$.
    b) $p(\sqrt{7}) = 0$.
    c) $g(x) := p(x)/(x^2 - 7) \in \mathbb{Q}[x]$.
    d) $g(x)$ es irreducible.
    e) Si $g(\alpha) = 0$ entonces $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 6$.
12. $[\mathbb{Q}[\sqrt{14}, \sqrt{6}] : \mathbb{Q}] = 4$.
13. La expresión $[\mathbb{Q}[\sqrt{14}], \sqrt{6}] : \mathbb{Q}[\sqrt{2}]]$ no tiene sentido.
14. $[\mathbb{Q}[\sqrt{\sqrt{3 + \sqrt{2}} - 4}] : \mathbb{Q}] \in \{2, 4, 8\}$.
15. Sea $\zeta_3 = e^{2\pi i/3}, \alpha = \sqrt[3]{11}$. Los campos $\mathbb{Q}[\alpha], \mathbb{Q}[\zeta_3 \alpha]$ son distintos pero isomorfos.
16. La descomposición de $x^6 - 4x^3 + 2x^2 - 12$ en irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ no es $(x^3 - 2x + 2)(x^2 - 3)(x^2 + x + 2)$.
17. La descomposición de $x^6 - 4x^3 + 2x^2 - 12$ en irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ no es $(x^4 - 2x + 3)(x^2 - 4)$.
18. La descomposición de $x^6 - 4x^3 + 2x^2 - 12$ en irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ no es $(x^3 - 2x + 2\sqrt{3})(x^3 + x^2 - 2\sqrt{3})$.
19. Sea $F \subset K$ es una extensión de campos. Si $\alpha \in K$ es algebraico, entonces α^2 tambien lo es. Si $f(x), g(x) \in F[x]$ son los polinomio mínimos de α, α^2 sobre F (respectivamente) entonces $deg(g) \leq deg(f)$.
20. Si $[F[\alpha] : F] = 6$, $[F[\beta] : F] = 4$, entonces $[F[\alpha, \beta] : F]$ es 12 o 24.
21. Si $[F[\alpha] : F] = 14$, $[F[\beta] : F] = 9$, entonces $[F[\alpha, \beta] : F] = 126$.
22. $x^2 - 2$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$, y por lo tanto sobre qualquier extensión de grado 5 de $\mathbb{Q}$.
23. El polinomio $x^4 - x + 3694$ no tiene raices mod 3, y por lo tanto ni en $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$.
24. Si α es una raiz de $x^3 - 2x^2 + \sqrt{-5}x + 4\sqrt{-5}$ entonces $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] \leq 6$.
25. Sea $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$. Entonces ζ_3, ζ_5 son construibles con compas y regla, y por lo tanto ζ_{15} tambien.
26. Dados $0, 1, \zeta_9$, se puede construir un poligono regular con 45 lados.
27. Sea $f(x)$ un polinomio de grado 3 sobre F cuyos 3 raices (en alguna extensión de F) son $\alpha, \beta, -\alpha\beta$. Entonces $f(x)$ es reducible.
28. Si $a, b \in F$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0$, entonces $F[\sqrt{a} + \sqrt{b}] = F[\sqrt{a}] + F[\sqrt{b}]$.
29. Todo campo de característica 7 contiene un subcampo isomorfo a F_7.
30. Todo campo de característica 0 contiene un subcampo isomorfo a $\mathbb{Q}$.

II. Cierto o Falso.

1. Existe un campo con 81 elementos.
2. Todos los campos con 81 elementos son isomorfos.
3. El número de polinomios irreducibles sobre un campo finito es finito.
4. Todo polinomio irreducible de grado n sobre un campo F tiene n raices distintas en alguna extensión de F.
5. Cualquier dos extensiones de un campo con el mismo grado (finito) son isomorfas.
6. Cualquier dos extensiones de un campo finito con el mismo grado (finito) son isomorfas.
7. Todo los campos finitos con el mismo número de elementos son isomorfos.
8. La derivada de un polinomio de grado 7 (con coeficientes en un campo) tiene grado 6.
9. Sea $h(x) \in F[x]$ el máximo común divisor de dos polinomios $f(x), g(x)$ con coeficientes en un campo F (es el polinomio mónico de máximo grado que divide a $f(x)$ y $g(x)$). Entonces para cualquer extensión K de F, el máximo común divisor de $f(x), g(x)$ en $K[x]$ sigue siendo $h(x)$.

10.* $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/17}) \subset \mathbb{C}$ contiene un subcampo de grado 4 sobre $\mathbb{Q}$.

11. Si K/F es una extensión finita entonces todo elemento de K es algebraico sobre F.
12. Una extensión K/F es finita si todo elemento de K es algebraico sobre F.

13.* Para toda extensión K/F de grado 4 existe un campo intermedio $F \subset L \subset K$ tal que L/F es de grado 2.

14.* Una extensión finita de $\mathbb{Q}$ contiene un número finito de raices de 1.

III. Problemas adicionales.

1. $x^3 + 9x + 6$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz. Encuentra el inverso de $1 + \alpha$ en $\mathbb{Q}[\alpha]$.
2. $x^3 + x + 1$ es irreducible sobre F_2. Sea α una raíz en una extensión de F_2. Calcula las potencias de α en $F_2[\alpha]$.
3. Encuentra los $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x^5 - nx - 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.
4. Todo campo finito de característica p es de orden p^r para algún entero positivo r.
5. Sean $g(x) = x^2 = x + 1$ y $h(x) = x^3 - x + 1$. Encuentra campos de 4, 8, 9 y 27 elementos adjuntando raíces de los polinomios $g(x)$ y/o $h(x)$ a los campos F_2 y/o F_3. Encuentra en cada caso un generador del grupo muliplicativo del campo.
6. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Calcula $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$. Encuentra el polinomio mínimo de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.
7. Sea $F \subset F[\alpha]$ una extensión de campos, con α de grado impar sobre F. Entonces $F(\alpha) = F(\alpha^2)$.
8. Encuentra todos los polinomios irreducibles en $F_2[x]$ de grados 1, 2 y 4 y demuestra que su producto es $x^{16} - x$.
9. Sea p un primo y $q = p^r$. Demuestra que $x^{q-1} - 1 = \prod_{\alpha \in F_q^\times} (x - \alpha)$ y que $\prod_{\alpha \in F_q^\times} \alpha = -1$.
10. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ son subcampos no isomorfos de $\mathbb{R}$.
11. Determina los polinomios mínimos de $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ y de $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ sobre $\mathbb{Q}$.
12. * Encuentra los ángulos α entre 0 y 180 grados que se pueden trisectar con compas y regla.
13. * Definición: una extensión K/F es *radical* si existen $a_1, \ldots, a_n \in K$ tal que $K = F(a_1, \ldots, a_n)$ y tal que para todo $i = 1, \ldots, n$, una potencia de a_i está en $F(a_1, \ldots, a_{i-1})$ (para $i = 1$ se pide que una potencia de a_1 esté en F). Si $F \subset L \subset K$ y K es una extensión radical de F entonces K es una extensión radical de L.