Problema 11, p. 491 del libro de Artin

El problema pide demostrar que para todo grupo finito abeliano A y un homomorfismo no trivial $\varphi : A \to \mathbb{C}^*$ se tiene que $\sum_{a\in A} \varphi(a) = 0$.

En el curso dimos una demostración usando que un grupo abeliano finito es un producto de grupos cíclicos. Pero resulta que el inciso es cierto para un grupo finito general, *no necesariamente abeliano*. Primero lo demostramos para un grupo cíclico, $A = \{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$. Si φ no es trivial entonces $n > 1$ y $z := \varphi(\alpha) \neq 1$, por lo que

$$\sum_{a\in A} \varphi(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\alpha^i) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\alpha)^i = \sum_{i=0}^{n-1} z^i = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 0.$$

Para A general (finito), si φ no es trivial entonces existe un elemento $\alpha \in A$ tal que $\varphi(\alpha) \neq 1$. Denontamos por H el subgrupo (cíclico) generado por α, así que $\sum_{h\in H} \varphi(h) = 0$. Luego, A se parte en clases de equivalencia mod H, $A = H \cup \alpha_2 H \cup \alpha_3 H \cup \ldots \cup \alpha_m H$, para algunos $\alpha_2, \alpha_3 \ldots, \alpha_m \in A$, donde $m = |A|/|H|$, por lo que

$$\sum_{a\in A} \varphi(a) = \sum_{h\in H} \varphi(h) + \sum_{h\in H} \varphi(\alpha_2 h) + \sum_{h\in H} \varphi(\alpha_3 h) + \ldots + \sum_{h\in H} \varphi(\alpha_m h) =$$

$$= (1 + \varphi(\alpha_2) + \varphi(\alpha_3) + \ldots + \varphi(\alpha_m)) \left(\sum_{h\in H} \varphi(h) \right) = 0. \qquad \square$$

Nota: El resultado es un caso especial de las *relaciones de ortoganlidad de Schur* (ver Teorema (5.9) del cap. 9 de Artin).