Prob. 14.1.4, p. 575, Artin

El problema: encontrar los campos intermedios de una exstensión bicuadrática, sin usar el Teorema Fundamental de la Teoría de Galois.

Solución. Primero, demostramos que si $F \subset K$ es una extensión cuadrática, entonces (1) $K = F[\delta]$ para algun $\delta \in K$ con $\delta^2 \in F$; (2) para todo $\epsilon \in K$, si $\epsilon^2 \in F$ entonces $\epsilon \in F$ o $\epsilon = b\delta$ para algun $b \in F$.

Demostración: (1) Sea $\alpha \in K \setminus F$, entonces $1, \alpha$ es una base de K sobre F, por lo que $\alpha^2 = a + b\alpha$ para algunos $a, b \in F$. Luego $\delta := \alpha - b/2$ satisface $\delta^2 = a + b^2/4 \in F$, $\alpha = \delta + b/2 \in F[\delta] \implies K = F[\delta]$. (2) Sea $\epsilon = a + b\delta$ con $a, b \in F \implies \epsilon^2 = a^2 + b^2\delta^2 + 2ab\delta \in F \iff 2ab = 0 \iff a = 0$ o $b = 0$. Si $b = 0 \implies \epsilon \in F$ y si $a = 0 \implies \epsilon = b\delta$. (Ver problema 14.1.9.)

Ahora sea $F \subset K$ una extensión bicuadrática, i.e., $K = F[\alpha, \beta]$ con $\alpha^2, \beta^2 \in F$ y $[K : F] = 4$. Si L es un campo intermedio, distinto de F o K, entonces $[L : F]$ divide a $[K : F] \implies [L : F] = 2$, por lo que $L = F[\delta]$ para algun $\delta \in K$, con $\delta^2 \in F$. Considerando la extensión cuadrática $F[\alpha] \subset F[\alpha, \beta] = F[\alpha][\beta]$, tenemos entonces que $\delta \in F[\alpha]$ o $\delta = c\beta$ para algun $c = a + b\alpha \in F[\alpha]$ con $a, b \in F$. En el 1er caso $L = F[\delta] = F[\alpha]$. En el 2ndo caso, $\delta^2 = c^2\beta^2 = (a^2 + 2ab\alpha + b^2\alpha^2)\beta^2 \in F \iff 2ab = 0 \iff a = 0$ o $b = 0$. Si $a = 0 \implies \delta = b\alpha\beta \in F[\alpha\beta] \implies F[\delta] = F[\alpha\beta]$. Si $b = 0 \implies \delta = a\beta \in F[\beta] \implies F[\delta] = F[\beta]$. Así que tenemos tres campos intermedios posibles: $F[\alpha], F[\beta], F[\alpha\beta]$. $\square$