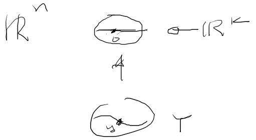
Thm: cada var. de dim $k$ se ~~es~~ puede encajar en $\mathbb{R}^{2k+1}$.

?

Un encaje $X \to Y$ es un difeo ~~a~~ con una subvar de $Y$.

$Z \subset Y$ una subvar. de dim $k$

$Y$ una var. es un subconj de un euclideano $\mathbb{R}^n$, que loc. difeo a $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$




pasos en la demo de TEW.

**PASO 1** (SARD) • Se consigue una inmersión $X^k \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{2k+1}$ inyectiva.

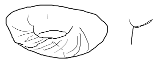
$\forall x \in X \; (df)_x : T_x X \to T_{f(x)} \mathbb{R}^{2k+1} = \mathbb{R}^{2k+1}$

Porque esta no es un encaje?!

**PASO 2** (compacidad) • Esto sí es un encaje cuando $X$ es compacto. (porqué?)

Ejemplo: de una var. no-compacta $X = \mathbb{R}$ con una inmersión $X \to Y \leftarrow$ de dim 2 que inyectiva, pero no es un encaje; de hecho la imagen no es una subvariedad

La imagen es densa en $Y$.




$Y \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}^2$

$\{(z_1, z_2) \mid |z_1| = |z_2| = 1\}$

inyectivo?

$(e^{it_1}, e^{i\alpha t_1}) = (e^{it_2}, e^{i\alpha t_2})$

$f : \mathbb{R} \to Y$, $f(t) = (e^{it}, e^{i\alpha t})$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

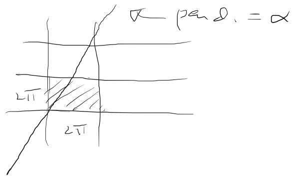
$t_2 = t_1 + n \cdot 2\pi \implies \frac{\Delta t}{2\pi} = \frac{t_2 - t_1}{2\pi} = n \in \mathbb{Z}$

$\alpha t_2 = \alpha t_1 + m \cdot 2\pi \quad \alpha \cdot \frac{\Delta t}{2\pi} = \alpha \cdot n = m \in \mathbb{Z}$

si $n \neq 0 \implies \alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

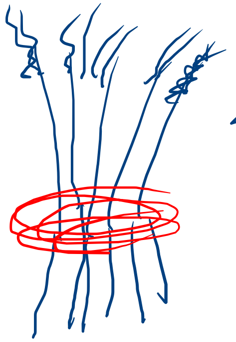
$\implies n = 0 \implies \Delta t = 0$.

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi} Y$, $(t_1, t_2) \to (e^{it_1}, e^{it_2})$




**PASO 3** (partición de unidad): para var. no compactas.

bundle < haz / fibrado — fibration

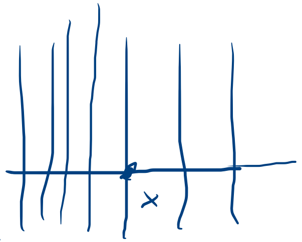


→ trigos

el haz tang. = el fibrado tang
= the tang. bundle.

$TX = \coprod_{x \in X} T_x X$,

$X = \mathbb{R}$



$T\mathbb{R}^1 \cong \mathbb{R}^2$

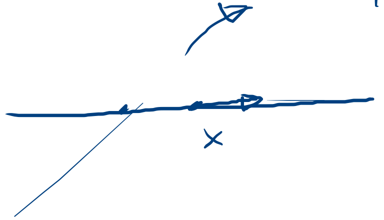
$(x, v) \mapsto (x, v)$.

$v \in \mathbb{R}^1$

$\boxed{\text{Campo vectorial}}$

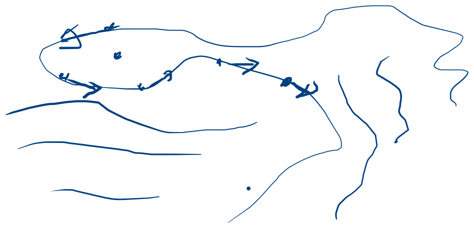
$v : X \to TX$

$v(x) \in T_x X$



$\mathbb{R} = X$

$\boxed{\mathbb{R}^2}$



"haz"
(fibrado)

$F \xrightarrow{\pi} X$

$x \in X$, $\pi^{-1}(x)$ la fibra de $F$ sobre $x$.

haz tang.

$TX \xrightarrow{\pi} X$, $\pi^{-1}(x) = T_x X$.

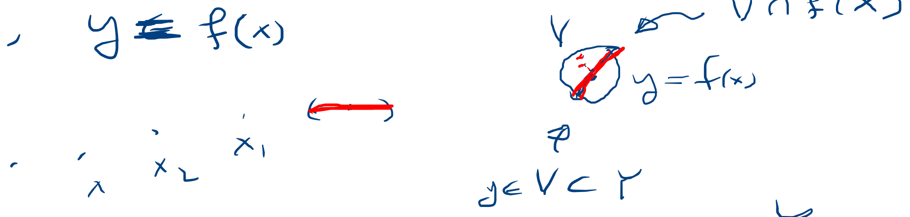
<u>Pregunta</u>: $X \xrightarrow{f} Y$ un inmersión inyectiva.

Si $X$ es compacto $\Longrightarrow$ $f$ es un encaje.

<u>PORQUE</u>?

<u>obs</u>: basta demostrar que $f(X)$ es una subvar. $df_x : T_x X^k \xrightarrow{\text{iso}} T_{f(y)} Y^n$

Teo de inmersión: localmente es cierto. (TFI) o sea, $y = f(x)$




Basta demostrar que existe una vec. de $V$ de $y = f(x)$ $\subset Y$

t.q. $f(X) \cap V$ es difeo a $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$.
loc.

esto lo tenemos para una vec. $U \ni x$

El problema se reduce a tiene una sucesión $x_i$, t.q. $f(x_i) \to f(x)$, $x_i \notin U$.

<u>Afirmación</u>: para ~~X compacto~~ f propio esto no va a suceder, ~~porque~~ para $\forall X$ compacto (f es un mapa "<u>propio</u>" = "preimagen de compacto es compacto")

<u>no propio</u>: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = \text{sen}(x)$

Ver en el libro en sección 3.