19 ago 2020

Topología diferencial = Topología + Cálculo

$\Uparrow$ TFI

- smooth map
- difeomorphism
- k manifold (2) — nuestra (Milnor) / estandar (wiki..)
- submanifold

Variedad = manifold (variety)

$$X \xrightarrow{f} Y$$

Def

Una variedad (suave)

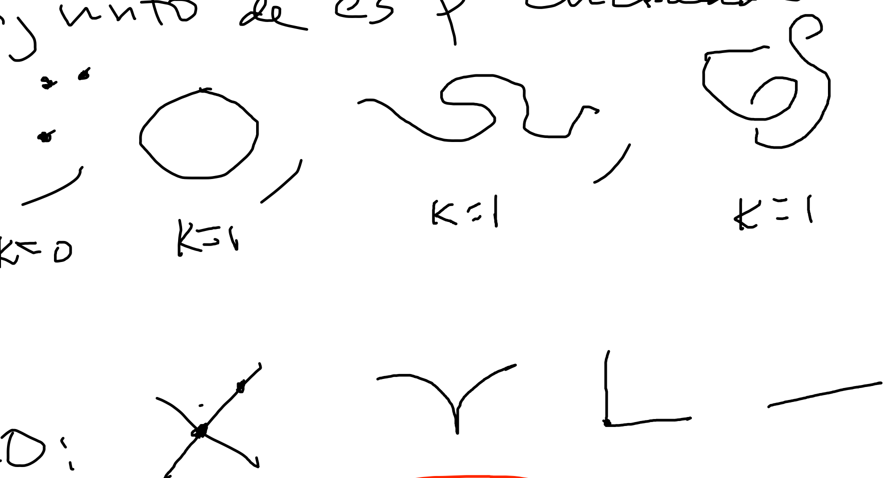
un cierto subconjunto de esp euclidiano

$X^k \subset \mathbb{R}^n$

Sí: $k=0$, $k=1$, $k=1$, $k=1$

ejemplos + contraejemplos

NO:



Defi función suave (C^∞)

$f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ — cualquier subconjunto

$f: U \to \mathbb{R}$, U abierto en $\mathbb{R}^n$, tiene derivadas parciales de todo orden

definición de "suave" de cálculo dif.

si es la restricción de una función suave de una vecindad de X

$\tilde{f}: U \to \mathbb{R}$, $U \supset X$, $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

eg: $\left.\frac{1}{x^2+y^2}\right|_X$, $(0,0) \notin X$, es suave.

Def.

Difeo: una función suave (entre conj) con inversa suave.

$X \xrightarrow{f} Y$

top

f biy.

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ homeo.

NO. contraeg.

Ejemplo de variedad

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

no son homeomorfos ya que uno es compacto otro no

$[0, 2\pi) \xrightarrow{f} S^1$

$e^{2\pi i\theta} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

Ej: un homeo. $X \to Y$ suave no difeo

$f \qquad y = x^3$

$f^{-1} \qquad x = \sqrt[3]{y}$

Hay condiciones sobre X, Y t.q. toda biy $X \to Y$ es aut. homeo.

Reto: cuales?

Pista: uno Hausd. otro compacto.

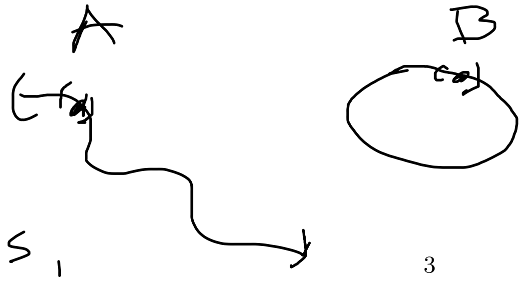
$X \longrightarrow Y$

cpct $\qquad$ Hausdorff

$\boxed{\text{Def:}}$ $X \subset \mathbb{R}^N$ es k-var si es $\boxed{\text{localmente}}$ difeo. a $\mathbb{R}^k$

X, Y son loc. difeo si
$X \subset \mathbb{R}^N$, $Y \subset \mathbb{R}^{N'}$ $\forall x \in X, y \in Y$
exist. vec. $x \in U \subset X$
$y \in V \subset Y$
un difeo $U \to V$
$x \mapsto y$.

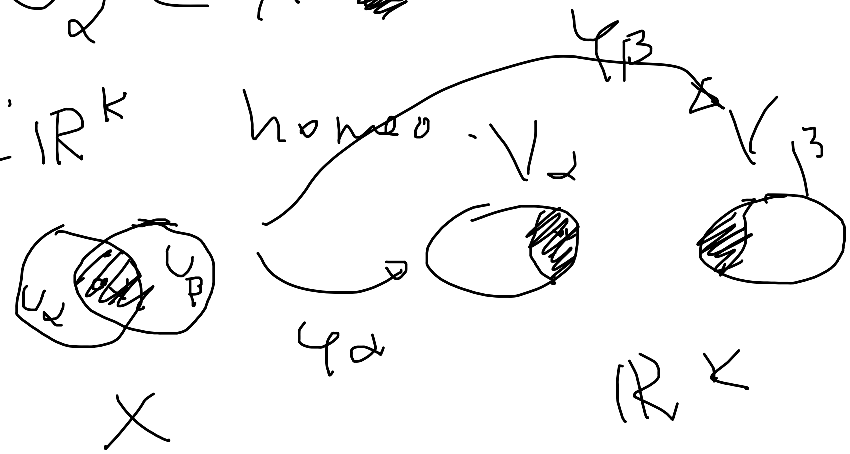
Var. dif. (definición intrínsica)



X = esp. top. Haus.

$X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $U_\alpha \overset{ab}{\subset} X$

$\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^k$ homeo.



t.q. $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}\big|_{V_{\alpha\cap\beta}}$ sea suave

para todo α, β.