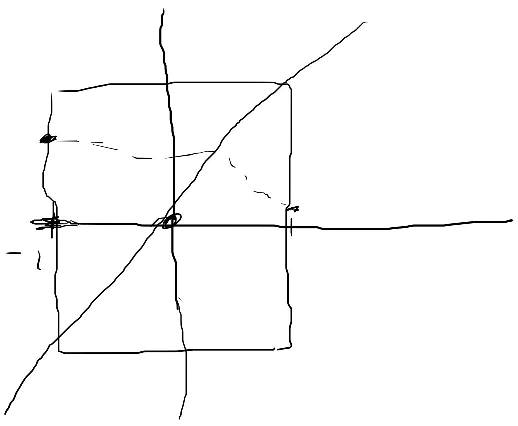
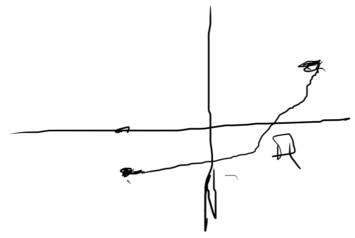
Teo. de Brouwer de punto fijo: Sea $f: B^n \to B^n$ una función continua. Ent. existe un punto fijo, $x \in B$, $f(x) = x$. $B^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}$.





para n=1: aplicar el TVI a $f(x) - x$

Dem: si f no tiene p.f

$g: B^n \to S^{n-1}$

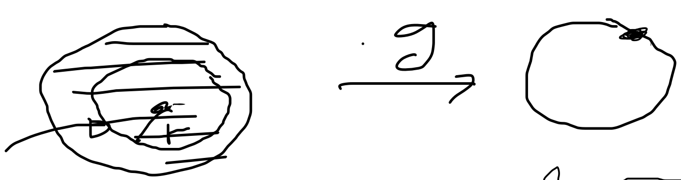
$g|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$

$\boxed{\text{Esto es imposible}}$

Dem para $n=2$ para f contin. usando π_1.

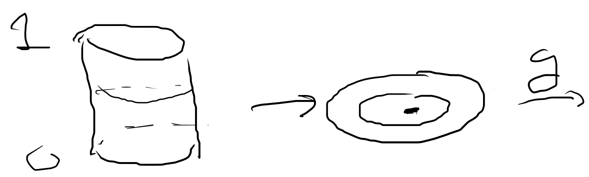
$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

$\pi_1(B^2) = \{e\}$



S^1_r

$(g_1)_*: \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z}$ $\qquad g_r = g|_{S^1_r}$



$(g_0)_*: \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$ $\qquad g_1 \sim g_0$

$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ ... (demo. similar).

grupo conmutativo para $n > 1$.

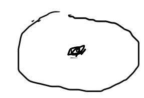
Nuestra demo. para f suave $\Longrightarrow$ g suave,
parte de un inciso mucho más general:

H^2

<u>Teo:</u> no se puede "retraer" (retract) una var. con frontera compacta a su frontera.

<u>Def:</u> "retracción" $X \xrightarrow{r} Y \subset X$ $\quad r|_X = id_X$.

<u>Ejemplo:</u> $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
$x \mapsto x/_{\|x\|}$

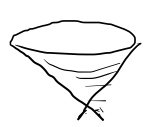


<u>Def:</u> var. con frontera es loc. difeo a
semi-espacio $H^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n \geq 0\}$

no consideramos

"var. con esquina"

var. con pico.



var. con puntos cónicos.

la frontera.

$\longrightarrow \mathbb{R}^n$

Def. valor reg. de mapa suave $f : X \to Y \ni y$, $\partial f = f|_{\partial X}$

si $\forall x \in f^{-1}(y)$, $df_x : T_x X \to T_y Y$ $\quad \partial X \neq \emptyset \quad \partial Y = \emptyset$

es sobre si: $x \in \operatorname{int} X := X \setminus \partial X$, $[d(\partial f)]_x : T_x(\partial X) \to T_y Y$ sea sobre (y es punto reg de ∂f)

OJO: $X \to \partial X$, para var. (con frontera) es intrínseco $\quad C \subset X$

$\mathbb{R}$

$\partial^{top}_{\mathbb{R}} [0,1] = \{0,1\}$

$\partial^{top}_{\mathbb{R}^2} (0,1) = (0,1)$

$\partial (0,1) = \emptyset$.

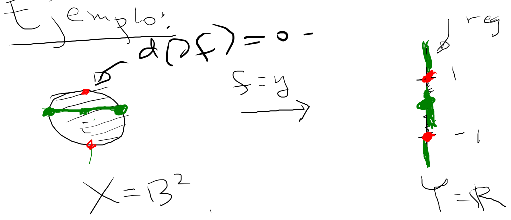
$\partial C = \bar{C} \cap \overline{X \setminus C}$

$[0,1] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$

$\partial_{\mathbb{R}} [0,1] = \{0,1\}$

$\partial_{\mathbb{R}^2} [0,1] = [0,1]$.

Ejemplo: $d(\partial f) = 0$.



∂f

5 mnts receso

Que ~~punto~~ valores son regulares

1:35 – 1:40 Receso.

Dem. del teo. de retracción:

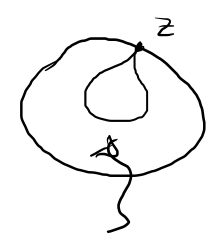
Sea $f : X \to \partial X$ una retracción.

$\underset{\text{Sard}}{\Longrightarrow}$ sea $z \in \partial X$ un valor reg.

$\underset{\text{TFI}}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(z)$ es una subvar. de dim 1, con frontera en ~~con~~ ∂X $\underset{\text{ret.}}{\Longrightarrow}$ $\partial(f^{-1}(z)) = \{z\}$.

TFI si y es reg. $\Rightarrow$ $f^{-1}(y) \subset X$ es una subvar con frontera $f^{-1}(y) \cap \partial X$

~~pero~~ $\underset{\substack{\text{clasif.}\\ \text{de 1-var.}\\ \text{con } \partial}}{\Longrightarrow}$ no puede haber una 1-var. con 1 solo punto en la frontera



esto no es una 1-var. con ∂.

Teo de clasif. de 1 var.: S^1, $[0,1]$ (compactos, conexos)

no conexos, compactos, unión finita de estos.

$[0,1)$ $\cong$ H^1

$\#\partial\left(\begin{smallmatrix}\text{var cpt}\\ \text{de dim 1}\end{smallmatrix}\right) = \text{par}$.

para viernes: 2 prob. con * de 2.1 (+ 2 prob. opc. a tu elección de 2.2).