Teorema de la Función Inversa Generalizado, caso no-compacto.

Amaranta Martínez De La Rosa

Topología Diferencial 1
Prof. Gil-Bor

Departamento de Matemáticas, UG
21 de Octubre de 2020

Antecedentes

En la Sección de Inmersiones, el Ejercicio 10 presenta una primera generalización del Teorema de la Función Inversa para el caso compacto:

Teorema: Generalización de TFI caso compacto.

Sean X, Y variedades, $Z \subset X$ subvariedad compacta y $f : X \to Y$ un mapeo suave que es inyectivo Z. Si para toda $x \in Z$,

$$(df)_x : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$$

es un isomorfismo; entonces f mapea Z de manera difeomorfa. Más aún, f mapea una vecindad de Z en X de manera difeomorfa en una vecindad de $f(Z)$.

Objetivo

Ejercicio 14 de la Sección del Encaje de Whitney:

Teorema: Generalización de TFI caso no-compacto.

Sean X, Y variedades, $Z \subset X$ subvariedad y $f : X \to Y$ un mapeo suave. Si para toda $x \in Z$,

$$(df)_x : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$$

es un isomorfismo; y si f mapea Z de manera difeomorfa sobre $f(Z)$. Entonces, f mapea una vecindad de Z en X de manera difeomorfa en una vecindad de $f(Z)$.

Truco: Particiones de la unidad

Teorema: existencia de particiones de la unidad.

Sea X un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^N$. Para cualquier cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de X, existe una sucesión de funciones suaves $\{\theta_i : X \to \mathbb{R}\}$ en X, llamada *particion de la unidad* asociada a la cubierta abierta $\{U_\alpha\}$, con las siguientes propiedades:

a. $0 \leq \theta_i(x) \leq 1$ para toda $x \in X$ y θ_i.
b. Cada $x \in X$ tiene una vecindad en la cual todas salvo una cantidad finita de las funciones θ_i son identicamente cero.
c. Cada función θ_i es identicamente cero excepto en un conjunto cerrado contenido en uno de los U_α.
d. Para cada $x \in X$, $\sum_i \theta_i(x) = 1$.

Mostraremos primero el Ejercicio 13:

Lema

Una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de una variedad X es *localmente finita* si cada punto de X tiene una vecindad que intersecta sólo una cantidad finita de estos U_α. Muestre que cualquier cubierta abierta $\{V_\alpha\}$ admite un refinamiento localmente finito $\{U_\alpha\}$.

Demostración. Sean X una variedad y $\{V_\alpha\}$ una cubierta abierta de X. Sea $\{\theta_i\}$ la partición de la unidad asociada a la cubierta. Sea

$$U_i = \theta_i^{-1}((0,\infty)).$$

Lema

1. $\{U_i\}$ es una cubierta abierta de X: Como θ_i es suave, U_i es abierto. Además, para cada $x \in X$ existe alguna i tal que $\theta_i(x) > 0$, luego $x \in U_i$ para alguna i.
2. $\{U_i\}$ es un refinamiento de $\{V_\alpha\}$: Cada θ_i es identicamente cero excepto en algún cerrado totalmete contenido en una V_α, luego $U_i \subset V_\alpha$ para alguna α.
3. $\{U_i\}$ es localmente finito: Cada $x \in X$ tiene una vecindad en la cual todas salvo una cantidad finita de las θ_i son identicamente cero, por lo tanto en esta vecindad intersecta una cantidad finita de las U_i.

Demostración del Teorema: Ideas

Esquema de la demostración:

1. Encontrar inversas locales $g_i : U_i \to X$, donde $\{U_i\}$ es una colección localmente finita de abiertos de Y que cubren $f(Z)$.
2. Definir
$$W = \{y \in U_i : g_i(y) = g_j(y) \text{ siempre que } y \in U_i \cap U_j\}.$$
Los mapeos g_i "se juntan"para formar una inversa suave $g : W \to X$.
3. Demostrar que W contiene una vecindad de $f(Z)$.

Sea $z \in Z$, como $df_z : T_z(X) \to T_{f(z)}(Y)$ es isomorfismo, existe una vecindad $A_z \subset X$ de z tal que $f|_{A_z}$ es difeomorfismo.

Sea $V_z = f(A_z)$. Entonces, $\{V_z : z \in Z\}$ es una cubierta abierta de $f(Z)$.

Por el Lema, podemos elegir un refinamiento localmente finito, digamos $\{U_i\}$. Para cada U_i, existe una inversa local $g_i : U_i \to X$ de f (posiblemente hay varias inversas locales en U_i, usa el axioma de elección para elegir una).

Demostración del Teorema: 2

Definimos

$$W = \{y \in U : U \in \{U_i\},\ g_i(y) = g_j(y) \text{ siempre que } y \in U_i \cap U_j\}.$$

Note que $f(Z) \subset W$, pues f es difeomorfismo en Z. Sea

$$g : W \to X, \quad g(y) = g_i(y) \text{ para cualquier } i$$

Esta es la inversa de f en W. Está bien definida pues

$$g(y) = g_i(y) = g_j(y) \quad \text{siempre que } y \in U_i \cap U_j.$$

Basta mostrar que W contiene un abierto que contiene a $f(Z)$.
Sea $y \in f(Z)$, por finitud local, sólo hay una cantidad finita de U_i's que contienen a y, digamos $U_1, \ldots, U_n$.

Sea

$$U = U_1 \cap \cdots \cap U_n.$$

Si $U \subset W$ terminamos, pues cada punto en $f(Z)$ tiene una vecindad (U) contenida en W.

Demostración del Teorema: 3-2

Si U no está contenido en W, para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ definimos

$$C_{ij} = \overline{\{y \in U_i \cap U_j : g_i(y) \neq g_k(y)\}} \quad \text{y}$$

$$C = \bigcup_{i,\, j} C_{ij}$$

Como C es la unión finita de cerrados, es cerrado. Entonces,

$$U' = U_1 \backslash C$$

es abierto en Y. Además, $U' \subset W$ por definición de W y de C.

Demostración del Teorema: 3-2

Finalmente veamos que $y \in U'$; es decir, que $y \notin C$.
Sea $z \in Z$ tal que $y = f(z)$. Note que

$$g_i(y) = z = g_j(y) \qquad \text{para toda } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Como df_z es isomorfismo, por el TFI existe una vecindad V de z tal que $f|_V$ es difeomorfismo. Luego, para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$g_i(f(x)) = x = g_j(f(x)) \quad \text{para toda } x \in V \cap g_1(U_1) \cap \cdots \cap g_n(U_n).$$

Por lo tanto,

$$f(V) \cap U_k \cap U_1 \cap \ldots U_n$$

es un abierto que no está contenido en ninguno de los C_{ij} y contiene a y.
Así, $U' \subset W$ es una vecindad de y.

Referencias

Guillemin & Pollak, Differential Topology:
Capítulo 1, Secciones 3 y 8.