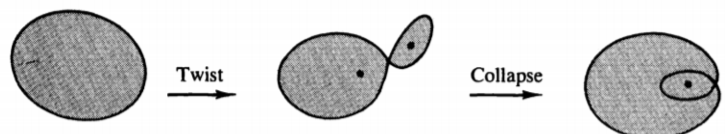
Teorema de Borsuk-Ulam

Usaremos los siguientes resultados:

Ejercicio 1.5.7 Sea $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ una sucesión de mapeos suaves entre variedades y sea $W \subset Z$ subvariedad. Suponga que $g \pitchfork W$. Muestre que $f \pitchfork g^{-1}(W)$ si y sólo si $g \circ f \pitchfork W$.

Teorema (Índice - Frontera). Sea X una variedad compacta, conexa de dimensión $n-1$ y sea $f : X \to \mathbb{R}^n$ un mapeo suave. Suponga que X es la frontera de D, una variedad compacta con frontera. Sea $F : D \to \mathbb{R}^n$ un mapeo suave que extiende f; esto es, $\partial F = f$. Suponga que z es un valor regular de F que no pertenece a la imagen de f. Entonces, $F^{-1}(z)$ es un conjunto finito y $W_2(f, z) = \#F^{-1}(z) \mod 2$.

Esto es, f "enreda" X alrededor de z tanto como F "le pega a" z, $\mod 2$.



$W_2(f, z) = \# F^{-1}(Z) \bmod 2 = 0$

Figure 2-21

El objetivo de este texto será demostrar el siguiente teorema:

Teorema de Borsuk-Ulam. Sea $f : S^k \to \mathbb{R}^{k+1} \backslash \{0\}$ suave tal que

$$-f(x) = f(-x), \qquad \forall x \in S^k.$$

Entonces, $W_2(f, 0) = 1$.

Informalmente, cualquier mapeo $S^k \to \mathbb{R}^{k+1} \backslash \{0\}$ simétrico alrededor del origen, debe enrolla S^k una cantidad impar de veces alrededor del origen.

Solución. Procederemos por inducción sobre $k \in \mathbb{N}$. El caso para $k = 1$ lo mostraremos al final (o de ejercicio). Suponga que el Teorema es cierto para $k - 1$ con $k > 1$. Sea $f : S^k \to \mathbb{R}^{k+1} \backslash \{0\}$ un mapeo suave simétrico. Consideraremos S^{k-1} el ecuador de S^k encajado con las coordenadas

$$S^{k-1} \hookrightarrow S^k$$
$$(x_1, \ldots, x_k) \to (x_1, \ldots, x_k, 0)$$

Idea vaga.

- Calcularemos $W_2\,(f, 0)$ contando con qué frecuencia la imagen de f intersecta una recta $l \subset \mathbb{R}^{k+1}$.
- Elegiendo l disjunta de la imagen bajo f del ecuador S^{k-1}. Por hipótesis de inducción, f enrolla el ecuador alrededor de l un número impar de veces.
- Finalmente, calcularemos la intersección de la imagen de f con l aprovechando que conocemos el comportamiento de f en el ecuador. (Teorema de Índice-Frontera)

Sea $g : S^{k-1} \to \mathbb{R}^{k+1} \backslash \{0\}$ definida por $g = f\big|_{S^{k-1}}$ y considere los mapeos dirección

$$\frac{f}{|f|} : S^k \to S^k, \qquad \frac{g}{|g|} : S^{k-1} \to S^k.$$

Por el Teorema de Sard existe $\vec{v} \in S^k$ valor regular de ambos mapeos.

Observación $\vec{v}$ es valor regular de ambos mapeos si y sólo si $-\vec{v}$ es valor regular de ambos mapeos:

En efecto, pues las derivadas en puntos de la preimagen de $\vec{v}$ sólo difieren por un signo $-f_x(w) = f_{-x}(w)$.

Escribe: Definimos $l = \{t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$. Veamos que cumple lo que nos interesa:

(1) Propiedad 1. $\vec{v}$ es valor regular de $\frac{g}{|g|} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im } g \cap l = \emptyset$.

En efecto, como $\dim\left(S^{k-1}\right) < \dim\left(S^k\right)$, la única forma de que $\vec{v}$ sea valor regular de $\frac{g}{|g|} : S^{k-1} \to S^k$ es cuando no está en su imagen. Y por la observación anterior, tampoco $-\vec{v}$ estará en su imagen.

(2) Propiedad 2. $\vec{v}$ es valor regular de $\frac{f}{|f|} \quad \Leftrightarrow \quad f \pitchfork l$.

Demostraremos que

$$\vec{v} \text{ es valor regular de } \frac{f}{|f|} \quad \Leftrightarrow \quad f \pitchfork r_+ \text{ y } f \pitchfork r_-,$$

donde

$$r_+ = \{t\vec{v} : t \geq 0\} \quad \text{y} \quad r_- = \{-t\vec{v} : t \geq 0\}.$$

Note que $l = r_+ \cup r_-$, por lo que se sigue lo que queremos demostrar. Porque si $x \in f^{-1}(l)$ entonces $x \in f^{-1}(r_+)$ o $x \in f^{-1}(r_-)$

Veamos el caso de r_+, el de r_- es análogo. Considere $h : \mathbb{R}^{k+1} \backslash \{0\} \to S^k$ definido por $h(x) = x/|x|$. Luego, $f/|f| = h \circ f$. Por el Ejercicio 1.5.7 basta demostrar que

(a) $r_+ = h^{-1}(\vec{v})$ y

(b) $h \pitchfork \{\vec{v}\}$, o lo que es equivalente, $\vec{v}$ es valor regular de h.

Primero veamos (a). Mostraremos las dos contenciones:

Sea $x \in r_+$, entonces $x = t\vec{v}$ para algún $t \geq 0$. Luego

$$h(x) = \frac{t\vec{v}}{|t||\vec{v}|} = \vec{v},$$

pues $t \geq 0$ y $\vec{v} \in S^k$. Así que $x \in h^{-1}(\vec{v})$.

Por otra parte, suponga que $x \in h^{-1}(\vec{v})$, esto significa que

$$\vec{v} = h(x) = \frac{x}{|x|} \quad \Leftrightarrow \quad x = |x|\vec{v} \in r_+.$$

Ahora veamos (b). Queremos mostrar que

$$dh_x : T_x(\mathbb{R}^{k+1} \backslash \{0\}) \to T_{\vec{v}}(S^k)$$

es sobre para toda $x \in h^{-1}(\vec{v})$. Por (a), $x \in h^{-1}(\vec{v})$ es equivalente $x \in r_+$.

Note que para cualquier $x \in r_+$, $\vec{v}$ es la dirección de x. Por lo tanto, h es constante para $x \in r_+$. Luego, $\dim(\ker dh_x) = 1$. Además, $\dim\left(T_x(\mathbb{R}^{k+1}\backslash\{z\})\right) = k+1$, luego por el Teorema de Rango-Nulidad, se sigue que

$$\dim(\mathrm{Im}(dh_x)) = k = \dim\left(T_{\vec{v}}(S^k)\right)$$

y por lo tanto, dh_x es sobre.

¿Cómo nos sirve esta elección de l? Vamos a usar las Propiedades 1 y 2 para calcular $W_2(f, 0)$. Por definición

$$W_2(f, 0) = \deg_2\left(\frac{f-0}{|f-0|}\right) = \deg_2\left(\frac{f}{|f|}\right) = \#\left(\frac{f}{|f|}\right)^{-1}(\vec{v}) \mod 2.$$

Ahora, por definición de l,

$$\begin{aligned} f^{-1}(l) &= \{x \in S^k : f(x) \in l\} \\ &= \left\{x \in S^k : \frac{f(x)}{|f(x)|} = \pm\vec{v}\right\} \\ &= \left(\frac{f}{|f|}\right)^{-1}(\vec{v}) \bigsqcup \left(\frac{f}{|f|}\right)^{-1}(-\vec{v}). \end{aligned}$$

Y por simetría

$$\#\left(\frac{f}{|f|}\right)^{-1}(\vec{v}) \mod 2 = \#\left(\frac{f}{|f|}\right)^{-1}(-\vec{v}) \mod 2.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \#f^{-1}(l) &= \#\left(\frac{f}{|f|}\right)^{-1}(\vec{v}) + \#\left(\frac{f}{|f|}\right)^{-1}(-\vec{v}) \\ \Leftrightarrow \quad 2\#\left(\frac{f}{|f|}\right)^{-1}(\vec{v}) &= \#f^{-1}(l) \end{aligned}$$

Por lo anterior, basta calcular $\#f^{-1}(l)$.

Ahra, por simetría, podemos calcular esto en el **hemisferio superior**

$$S^k_+ = \{x \in S^k : x_{k+1} \geq 0\}.$$

Definimos $f_+ = f\big|_{S^k_+} : S^k_+ \to S^k$. Por la Propiedad 1, $\mathrm{Im}\, g \cap l = \emptyset$; esto es, l no se intersecta con la imagen del ecuador (no vamos a contar puntos dos veces abajo). Aunado a que tenemos simetría, obtenemos

$$\#f^{-1}(l) = 2\#f_+^{-1}(l) \quad \Leftrightarrow \quad W_2(f, 0) = \#f_+^{-1}(l) \mod 2.$$

Observación. (¿A dónde vamos?) Note que S^k_+ es una variedad con frontera $\partial S^k_+ = S^{k-1}$. Luego, queremos aplicar el **Teorema de Índice-Frontera** a f_+ y a $g = \partial f_+$ para poder usar la hipótesis de inducción. Pero no nos quedan las dimensiones:

$$f_+ : S^k_+ \to \mathbb{R}^{k+1}\backslash\{0\} \quad \text{y} \quad \dim\left(S^k_+\right) = k, \quad \dim\left(\mathbb{R}^{k+1}\backslash\{0\}\right) = k+1.$$

Así que no podemos usar ni el teorema ni la hipótesis de inducción (necesitamos de codominio un espacio euclideano de dimensión k).

¿Cómo arreglamos esto? La clave será el complemento ortogonal de $l \subset \mathbb{R}^{k+1}$, que denotaremos por V. Note que es un espacio euclideano de dimensión k. Claro que no es $\mathbb{R}^k$, pero esto se arregla eligiendo una base adecuada.

Para finalizar el argumento, considere

$$\pi : \mathbb{R}^{k+1} \to V$$

la proyección orotgonal de $\mathbb{R}^{k+1}$ sobre V. Así, $\pi^{-1}(0) = l$. Ahora, como g es simétrico y π es lineal,

$$\pi \circ g : S^{k-1} \to V$$

también es simétrico:

$$(\pi \circ g)(-x) = \pi(g(-x)) = \pi(-g(x)) = -\pi(g(x)) = -(\pi \circ g)(x).$$

Además, $\pi \circ g$ nunca se anula, pues la imagen de g nunca intersecta l. Después de elegir una base adecuada podemos considerar $V \sim \mathbb{R}^k$ y así

$$\pi \circ f_+ : S_+^k \to \mathbb{R}^k \quad \text{y} \quad \pi \circ g : S^{k-1} \to \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$$

Así, por hipótesis de inducción

$$W_2\left(\pi \circ g, 0\right) = 1.$$

Para finalizar, recordemos que $f \pitchfork l$, por lo que $f_+ \pitchfork l$ y además, $l = \pi^{-1}\{0\}$. Así, por el Ejercicio 1.5.7

$$f_+ \pitchfork \pi^{-1}(0) \quad \Leftrightarrow \quad (\pi \circ f_+) \pitchfork \{0\}.$$

Así, 0 es valor regular de $\pi \circ f_+$ y por el **Teorema de Índice-Frontera** obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= W_2\left(\pi \circ g, 0\right) \\ &= \#(\pi \circ f_+)^{-1}(0) \mod 2 \\ &= \#(f_+)^{-1}(\pi^{-1}(0)) \mod 2 \\ &= \#(f_+)^{-1}(l) \mod 2 \\ &= W_2\left(f, 0\right). \end{aligned}$$

■

Este teorema tiene muchos corolarios interesantes, algunos de ellos son:

Corolario 1. Si $f : S^k \to \mathbb{R}^{k+1} \backslash \{0\}$ es simétrica alrededor del origen. Entonces, f intersecta cada recta que pasa por el origen al menos una vez.

Solución. Sea l una recta en $\mathbb{R}^{k+1}$ que pasa por el origen. Si f nunca le pega a l, $\# f^{-1}(l) = 0$ y $f \pitchfork l$.

Repitiendo la prueba usando f y l obtenemos

$$W_2\left(f, 0\right) = \# f^{-1}\left(l\right) = 1,$$

que es una contradicción. ■

Corolario 2. Cualesquiera k funciones suaves e impares $f_1, \ldots, f_k : S^k \to \mathbb{R}$ deben tener un cero común.

Solución. Procederemos por contradicción. Suponga que no tienen cero común las f_i's, entonces el mapeo

$$f := (f_1, \dots, f_k, 0) : S^k \to \mathbb{R}^{k+1} \backslash \{0\}.$$

está bien definida, y además es suave. Así, por el corolario anterior aplicado a f y la recta $l = \{x_{k+1} = 0\}$, obtenemos que f intersecta l al menos una vez. Esto es, existe $x \in S^k$ tal que $f(x) \in l$. Por lo tanto, x es un cero común de $f_1, \dots, f_k$. ■

Corolario 3. Para cualesquiera k funciones suaves $g_1, \dots, g_k : S^k \to \mathbb{R}$, existe algún punto $p \in S^k$ tal que $g_i(p) = g_i(-p)$ para toda i.

Solución. Sean $f_i : S^k \to \mathbb{R}$ definidas por $f_i(x) = g_i(x) - g_i(-x)$ para $i = 1, \dots, k$. Note que cada f_i es suave e impar:

$$f_i(-x) = g_i(-x) - g_i(x) = -f_i(x).$$

Luego, por el corolario anterior, existe $p \in S^k$ tal que $f_i(p) = 0$ para toda i. Esto es $g_i(p) = g_i(-p)$. ■

Corlario. (Clima) En cualquier momento, existen dos lugares en el mundo (antipodales), que tienen el mismo clima (misma temperatura y presión atmosférica).

Solución. Estamos suponiendo que la presión y temperatura son funciones suaves. Hacer que g_1 mida la temperatura, g_2 la presión y usar el corolario anterior. ■

El siguiete teorema es equivalente al Teorema de Borsuk-Ulam.

Teorema. Si $f : S^k \to S^k$ es un mapeo suave tal que

$$f(x) = f(-x), \qquad \forall x \in S^k.$$

Entonces, $\deg_2(f) = 1$.

Solución. Veamos que ambos teoremas son equivalentes.

Suponga que se cumple el Teorema de Borsuk-Ulam. Sea $f : S^k \to S^k$ suave que manda puntos antipodales en puntos antipodales. Si consideramos $f : S^k \to S^k \subset \mathbb{R}^{k+1} \backslash \{0\}$, entonces $|f(x)| = 1$ para cualquier $x \in S^k$. Además, por TBU tenemos que

$$1 = W_2(f, 0) = \deg_2\left(\frac{f}{|f|}\right) = \deg_2(f).$$

Ahora, suponga que se cumple el enunciado de arriba. Sea $f : S^k \to \mathbb{R}^{k+1} \backslash \{0\}$ suave y simétrica. Entonces el mapero dirección

$$\frac{f}{|f|} : S^k \to S^k$$

está bien definido, es suave porque $|f|$ no se anula y simétrico. Por hipótesis concluimos que

$$1 = \deg_2\left(\frac{f}{|f|}\right) = W_2(f, 0).$$

■

Caso base en la inducción de la demostración de TBU. Para demostrar el caso base use el teorema equivalente al de Borsuk-Ulam y muestre el siguiente ejercicio:

Cualquier mapeo $f : S^1 \to S^1$ que manda puntos antiódales en puntos antipodales tiene $\deg_2(f) = 1$.

Use el Ejercicio 2.5.8:

(a) Sea $f : S^1 \to S^1$ cualquier mapeo suave. Muestre qie existe un mapeo suave $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(\cos t, \sin t) = (\cos g(t), \sin g(t)),$$

y que satisface $g(2\pi) = g(0) + 2\pi q$, para algún entero q.

(b) Muestre que $\deg_2(f) = q \mod 2$.