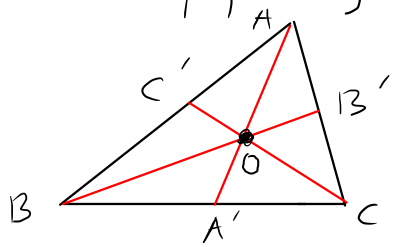
III (4). Las 3 medianas de cualquier triangulo son concurrentes
[el punto de int. divide cada mediana en una prop. 2 : 1]

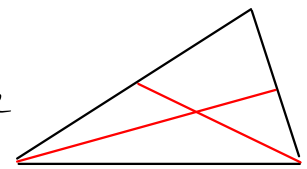
Dos demostraciones

1) geom. euclid.

2) geom. analítica

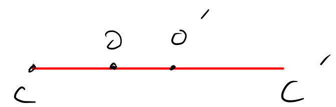


1) Lema: el pto. de int. de dos medianas divide cada una en prop. 2 : 1 (el seg. largo de cada med. toca el vértice)



$\boxed{\text{Lema} \Rightarrow \text{problema.}}$

Sea $O = CC' \cap BB'$.
Ent. $|CO| = 2|C'O|$. (lema).
Sea $O' = CC' \cap AA'$.
Ent. $|CO'| = 2|C'O'|$. (lema)
$\Rightarrow O = O'$.



$O \neq O' \Rightarrow \frac{|CO|}{|C'O|} \neq \frac{|CO'|}{|C'O'|}$

Dem. del lema:

$\cdot\ \frac{|AC'|}{|AB|} = \frac{|AB'|}{|AC|} \left(= \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \Delta AC'B' \sim \Delta ABC$ (LAL)

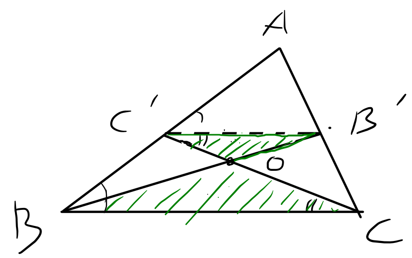
$\Rightarrow \cdot |BC| = 2|C'B'|$

$\cdot\ C'B' \parallel BC$

$\Rightarrow \measuredangle B'C'C = \measuredangle C'CB$

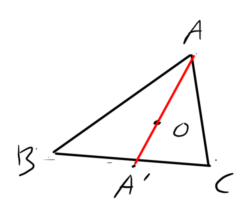
$\Rightarrow \Delta C'B'O \sim \Delta CBO$

$\Rightarrow \frac{|CO|}{|OC'|} = \frac{|BC|}{|C'B'|} = 2$. ∎



Dem 2: Sea $O = (A+B+C)/3$.

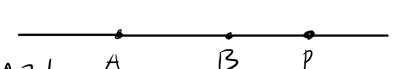
P.D. O es el punto de int. de las medianas.
Sea A' la int. de la recta que pasa por A, O con BC.
Basta demo que $|BA'| = |A'C|$, o sea $A' = (B+C)/2$. (completar)



$P = \frac{3}{2}B - \frac{1}{2}A$

$|PA| = \|P - A\| = \|\frac{3}{2}B - \frac{1}{2}A - A\|$
$= \|\frac{3}{2}(B - A)\| = \frac{3}{2}\|B - A\| = \frac{3}{2}|AB|$

$P = tA + (1-t)B$

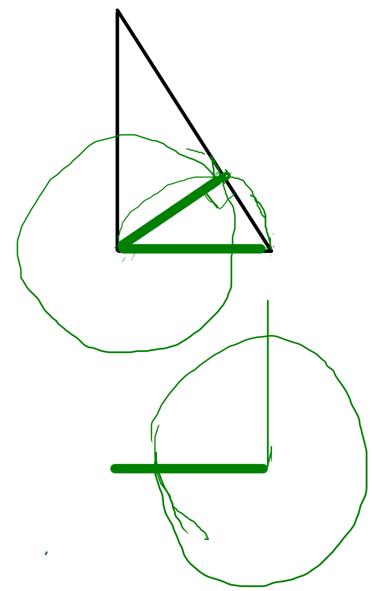


Sea $A' = \frac{3}{2}O - \frac{1}{2}A \overset{?}{=} \frac{B+C}{2}$

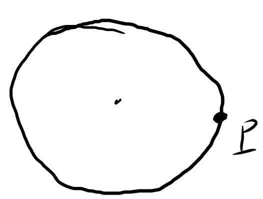
$\cancel{\frac{3}{2}}(A+B+C)/\cancel{3} - \frac{A}{2} \overset{?}{=} \frac{B}{2} + \frac{C}{2}$

(6) Un triángulo rectángulo, dados (a) su hipotenusa y uno de sus catetos, (b) su hipotenusa y uno de sus ángulos agudos, (c) uno de sus catetos y la altura a la hipotenusa.

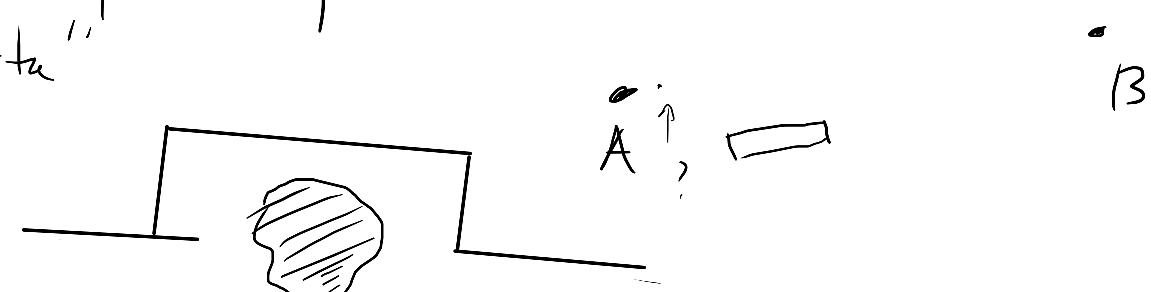
c) usar la $\underline{\text{III}}$ (12)



Reto:



- Construir con regla (sola!) la tang. a un círculo dado en un punto dado.
- Trazar la recta por dos puntos dado con regla "corta"

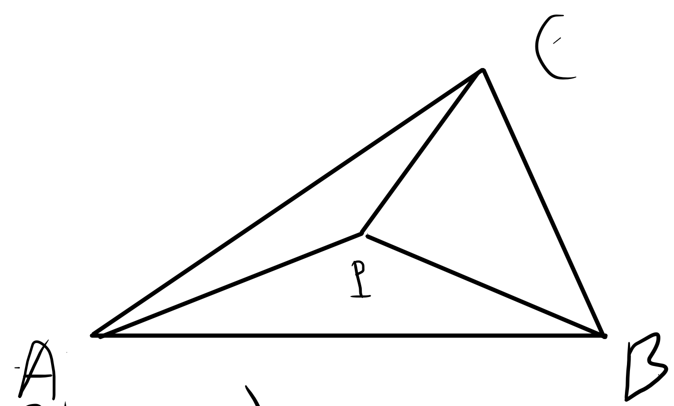


- extender una recta dada por el otro lado de un obstaculo con pura regla.

"Cuadruple armónico"

Punto de Steiner (mat. suizo de 19C).

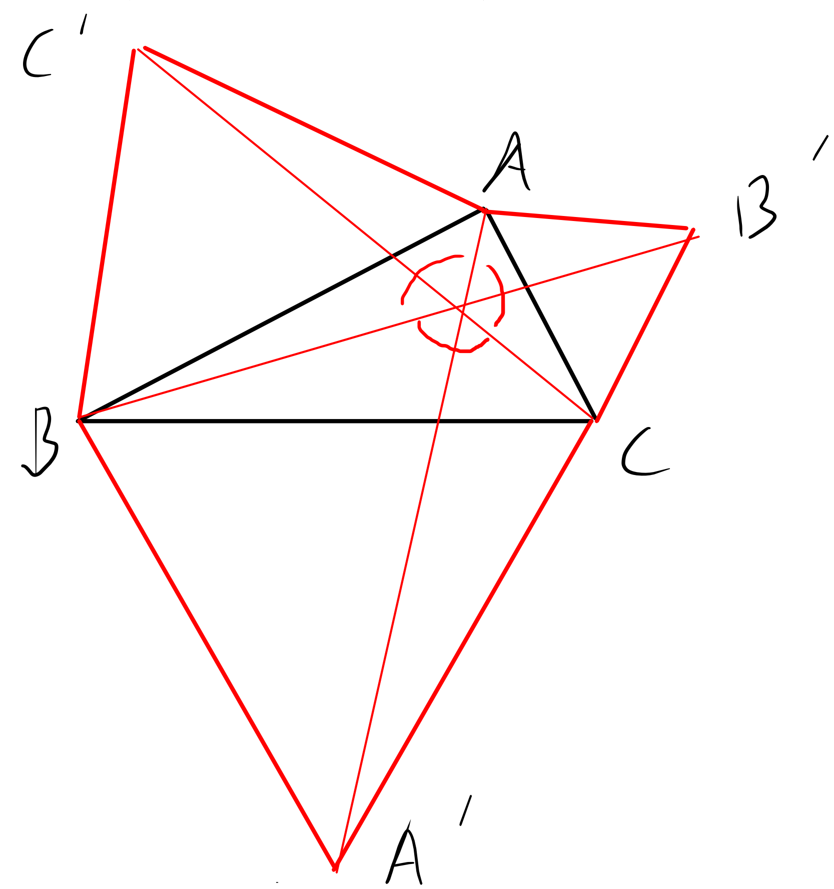
<u>Meta</u>: minimizar la suma $PA + PB + PC$, con A, B, C dados.



<u>Teo</u>: El punto óptimo ("pto de Steiner") satisface $\measuredangle APB = \measuredangle BPC = \measuredangle CPA = 120°$.

<u>Constr</u>: (Napaleon)

Construye Δ equi. lat. sobre los lados y conecta a los vertices del Δ original. ent. las 3 rectas AA', BB', CC' son concurrentes y el punto de int es el punto de Steiner.



<u>Ref</u>: Courant + Robbins "Qué son las matemáticas"