2. Encuentra el foco y la directriz de la parábola $y = x^2$.

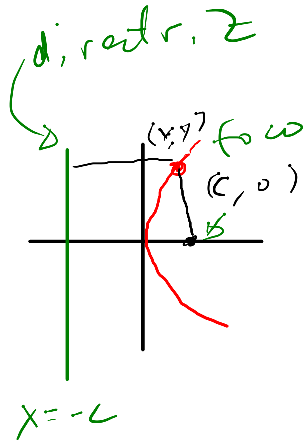
Forma estandar

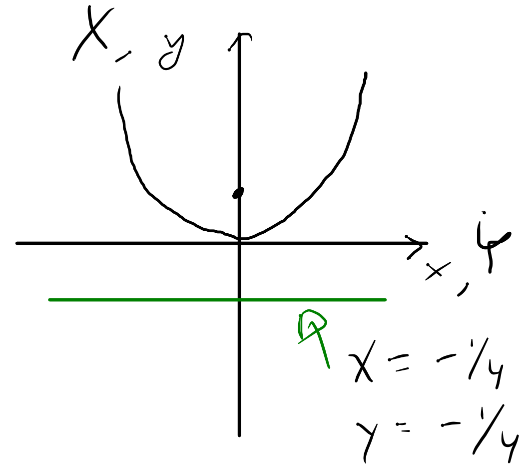
$$x + c = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} = (x-c)^2 + y^2$$

$$= \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} + y^2$$

$$\boxed{y^2 = 4cx}$$





$$\begin{cases} x = y \\ y = x \end{cases} \Longrightarrow y^2 = x = 4\left(\tfrac{1}{4}\right)x$$

$(x, y) = (1/4, 0)$ es el foco!

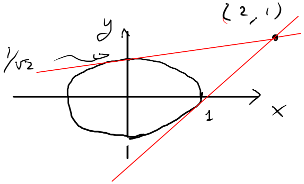
$(x, y) = (0, 1/4)$

Resp: foco: $x = 0, y = \frac{1}{4}$

directriz: $y = -1/4$.

4. Encuentra las ecuaciones de las tangentes a la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ que pasan por $(2, 1)$.

$x^2 + \left(\frac{y}{1/\sqrt{2}}\right)^2 = 1$



$y = mx + b$

$1 = m \cdot 2 + b \Rightarrow b = 1 - 2m$

$$\begin{cases} y = mx + 1 - 2m = m(x-2) + 1 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

tangente $\Leftrightarrow$ hay única solución.

$x^2 + 2\left[m(x-2)+1\right]^2 = 1$

$x^2 + 2\left[m^2(x-2)^2 + 2m(x-2) + 1\right] - 1 = 0$

$x^2 + 2\left[m^2x^2 - 4xm^2 + 4m^2 + 2mx - 4m + 1\right] - 1$

$(2m^2+1)x^2 + (-8m^2+4m)x + 8m^2 - 8m + 1 = 0$

$\underbrace{(2m^2+1)}_{a}x^2 + \underbrace{4m(1-2m)}_{b}x + \underbrace{8m(m-1)+1}_{c} = 0$

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = 0 \\ \Updownarrow \\ \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 0 \end{cases}$$

$\dfrac{-b/2 \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$

$\left[2m(1-2m)\right]^2 = (2m^2+1)(8m(m-1)+1)$

$4m^2(1-2m)^2 = \cancel{16m^3(m-1)} + (2m^2+1) + 8m(m-1)$

$4m^2 = 2m^2 + 1 + 8m^2 - 8m$

$6m^2 - 8m + 1 = 0$

$m = \frac{4 \pm \sqrt{16-6}}{-6} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{6} = \begin{cases} \frac{4+\sqrt{10}}{6} \\ \frac{4-\sqrt{10}}{6} \end{cases}$ ambos > 0.

$$A x^2 + B y_{(x)}^2 = 1$$

$$\cancel{2} A x + B \cancel{2} y\, y'(x) = 0$$

$$A x_1 + B y_1 m = 0$$

$$m = -\frac{A x_1}{B y_1}$$

$$y = -\frac{A x_1}{B y_1} x + b$$

$$y_1 + \frac{A x_1^2}{B y_1} = b$$

$$y = -\frac{A x_1}{B y_1} x + y_1 + \frac{A x_1^2}{B y_1} \qquad / \cdot B y_1$$

$$A x_1 x + B y_1 y = B y_1^2 + A x_1^2 = 1$$

$$\boxed{A x_1 x + B y_1 y = 1}$$

La ecuación de la recta tang. a $A x^2 + B y^2 = 1$ en un punto (x_1, y_1) de ella.

Nuestro caso, $A = 1$, $B = 2$

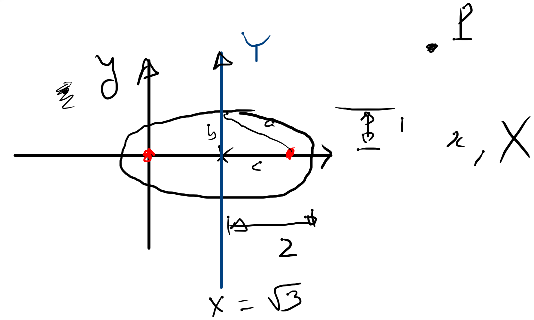
$$\Rightarrow \begin{cases} 2 x_1 + 2 y_1 = 1 \\ x_1^2 + 2 y_1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \{(x_1, y_1), (\ , \ )\}$$

1. Encuentra una ecuación cuadrática para la elipse (a) con focos $(\pm 1, 0)$ y que pasa por $(1,1)$; (b) con focos en $(0, \pm 1)$ y con semi-eje menor 1; (c) con un foco en el origen $(0,0)$, el otro foco a su derecha (sobre el eje de x), semi-eje mayor 2 y semi-eje menor 1.

1c

el cambio de coordenadas que describen el mismo objeto.

$$\begin{cases} x = X + \sqrt{3} \\ y = Y \end{cases} \iff \begin{cases} X = x - \sqrt{3} \\ Y = y \end{cases}$$



$$c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$$
$$\Rightarrow c = \sqrt{3}.$$

en XY la ecuación de la elipse es $\left(\frac{X}{2}\right)^2 + Y^2 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{x-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 1}$$

$$(x-\sqrt{3})^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

$$\boxed{x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 4y^2 - 1 = 0}$$

hyp: $\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1}$

asynt: $\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0}$

¿¿??

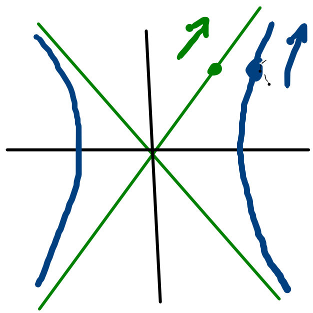
$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1$

$\left(\frac{y}{b}\right)^2 \approx \left(\frac{x}{a}\right)^2$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$

$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2$

$y = \pm \frac{b}{a} x$



Prox. semana

$2x^2 + 3xy - y^2 + 7x + 4y = 7$

¿Qué es eso?