5

- Una función $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una *tranformación lineal* si (1) $L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2)$ para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, (2) $L(\lambda \mathbf{v}) = \lambda L(\mathbf{v})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

(1) aditiva
(2) homogenea

1. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal si y solo si existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Es invertible si y solo si $\det(L) := ad - bc \neq 0$.

   Sugerencia: define $(a, c) := L(1, 0)$, $(b, d) := L(0, 1)$. La inversa es $L^{-1}(x, y) = (dx - by, -cx + ay)/\det(L)$.

$\boxed{\text{"si"}}$

Sea $L : (x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$.

(1) <u>aditiva</u>: $L((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = L(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$ 1

$= (a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2), c(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2))$ 2

3

$$L(x_1, y_1) + L(x_2, y_2) = \underbrace{(ax_1 + by_1, cx_1 + dy_1)}_{L(x_1,y_1)} + \underbrace{(ax_2 + by_2, cx_2 + dy_2)}_{L(x_2,y_2)}$$ 4

$= (ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2, cx_1 + dy_1 + cx_2 + dy_2)$ 5

$= (a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2), \text{ - - - - })$

✓

(ii) homog. - - - - (ej.).

$\boxed{\text{"Solo si"}}$

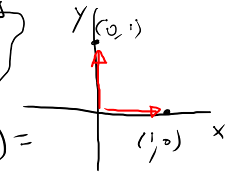
Sea $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aditiva + homog.

P.D. $\exists\, a, b, c, d$ t.q. $L(x,y) = (ax+by,\ cx+dy)$

Sea $(a,c) := L(1,0)$, $(b,d) := L(0,1)$

$$L(x,y) = L\big(x(1,0) + y(0,1)\big) \underset{\text{aditiva}}{=} L(x(1,0)) + L(y(0,1)) =$$

$$= x\,L(1,0) + y\,L(0,1) = x(a,c) + y(b,d)$$



Dos ejemplos de trans. lineal

- $L(x,y) = (0,0)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad (L = 0)$
- $L(x,y) = (x,y)$ $\quad$ '' $\quad (L = id = id_{\mathbb{R}^2} = I)$

$$id : X \to X$$
$$x \mapsto x.$$

P: ¿Cuándo una t.l. es invertible?

$\boxed{\text{R: } \iff \det(L) \neq 0.}$

Def: $\det(L) = ad - bc \neq 0$

$\det(\underset{\text{t.l.}}{0}) = 0 \Rightarrow$ no es invertible.

$\det(I) = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ sí es invertible

$L(x,y) = (ax+by,\ cx+dy)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

la matriz de L.

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$\Leftarrow$: Sea $S(x,y) := (dx-by, -cx+ay)/(ad-bc)$

P.D. $T(S(x,y)) = (x,y)$ $\quad (T\circ S = I)$

$S(T(x,y)) = (x,y)$ $\quad (S\circ T = I)$

$$T\left(\frac{dx-by}{ad-bc}, \frac{-cx+ay}{ad-bc}\right) = \left(a\left(\frac{dx-by}{ad-bc}\right) + b\left(\frac{-cx+ay}{ad-bc}\right), \text{------}\right)$$

$$= \left(\frac{adx-\cancel{aby}-bcx+\cancel{aby}}{ad-bc}, \ldots\right) = (x, \ldots)$$

Lema: La matriz de $T_1\circ T_2$ es el producto de la matrices de T_1 y T_2.

$$[T_1\circ T_2] = [T_1][T_2]$$

---

usando el lema

$$\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\Delta = ad-bc$

$$\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\Rightarrow$: P.D. Si $\Delta = ad - bc = 0 \Rightarrow L$ no es invertible.

① "pedestre"

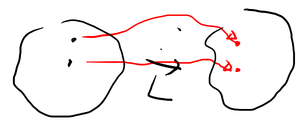
② usando la multiplicatividad de la determinante.

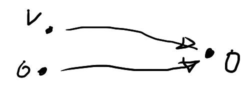
$$\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$$ ← demostrar!

① Si $\Delta = 0 \overset{\text{P.D.}}{\Longrightarrow} L(v) = 0$ para algún $\underset{(x,y)}{v} \neq 0$

$(L(0) = 0)$.

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$





ej: encontrar una sol'n $(x,y) \neq (0,0)$ a este sistema, usando que $ad = bc$.

② Por contradicción: si S es una inversa de L

$$\Rightarrow S \circ L = I \Rightarrow \det(S \circ L) = \det(I) = 1$$

$$\det(S \circ L) = \underbrace{\det(S) \cdot \det(L)}_{0}, \quad \det(L) = 0$$

$\Rightarrow 0 = 1$.