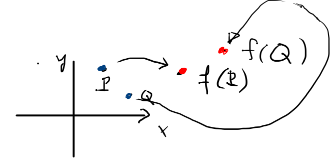
Def:

- Una *isometría* (o congruencia) de $\mathbb{R}^2$ es una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva distancias: $dist(f(P), f(Q)) = dist(P, Q)$ para todo $P, Q \in \mathbb{R}^2$.



$dist(P,Q) = dist(f(P), f(Q))$

$\|P - Q\| = \|f(P) - f(Q)\|$

isometría = simetría = congruencia

2. *a*) Toda traslación es una isometría y es invertible. Mismo para rotación por el origen y la reflexión por el eje de x.

$(1,0) \mapsto (a,b)$

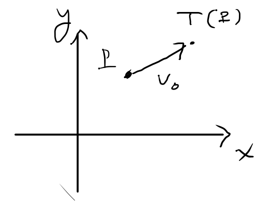
Sugerencia. La inversa de $P \mapsto P + \mathbf{v}_0$ es $P \mapsto P - \mathbf{v}_0$. La inversa de $(x, y) \mapsto (ax - by, bx + ay)$, donde $a^2 + b^2 = 1$, es $(x, y) \mapsto (ax + by, -bx + ay)$. La inversa de $(x, y) \mapsto (x, -y)$ es ella misma.

b) Una composición de isometrías es una isometría.

c) Toda isometría de $\mathbb{R}^2$ es la composición de traslación, rotación y (posiblemente) la reflexión por el eje de x (no necesariamente en este orden).

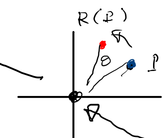
Sugerencia: sea S una isometría. Existe entonces una traslación T tal que $S_1 := T \circ S$ deja el origen fijo: $S_1(0, 0) = (0, 0)$. Existe luego una rotación R por el origen tal que $S_2 := R \circ S_1$ deja el punto $(1, 0)$ fijo. Luego S_2 deja $(0, 1)$ fijo o $S_2(0, 1) = (0, -1)$. En el primer caso S_2 es la transformación identidad, $S_2(x, y) = (x, y)$, en el 2ndo $C \circ S_2$ es la identidad, donde C es la reflexión por eje de x.

d) Toda isometría de $\mathbb{R}^2$ es invertible. Su inversa es una isometría también.



no hay puntos fijos! $(\text{si } v_0 \neq 0)$

v_0



tiene puntos fijos? sí, el origen, (0,0)

$a = \cos\theta$
$b = \operatorname{sen}\theta$

a) ✓

b) $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$ ✓

$g \circ f$?

c) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\underbrace{R \circ \underbrace{T \circ S}_{S_1}}_{S_2}$

$S_2 = \boxed{I = R \circ T \circ S} \Rightarrow R^{-1} \circ I = R^{-1} \circ R \circ T \circ S$

$R^{-1} = I \circ T \circ S$

$R^{-1} = T \circ S$

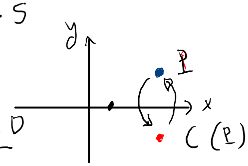
$\boxed{T^{-1} \circ R^{-1} = S}$ QED

$C \circ S_2 = I$

$C \circ R \circ T \circ S = I$

$\vdots$

$S = T^{-1} \circ R^{-1} \circ C^{-1}$
$= T^{-1} \circ R^{-1} \circ C$ QED

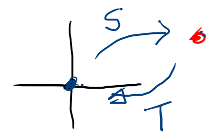


puntos fijos
$(x,y) \mapsto (x,-y)$

$(x,y) = (x,-y) \Rightarrow y = 0$

I) La T: es tal que $S_1(0) = 0$, $S_1 = T \circ S$

origen

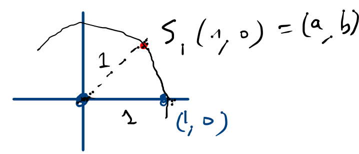


$$\boxed{T(P) := P - S(0)}$$

$$\underbrace{T \circ S}_{S_1}(0) = T(S(0)) = S(0) - S(0) = 0.$$

II) La R: es tal que $S_2((1,0))$, $S_2 = R \circ S_1$

$$R(x,y) := (ax+by, -bx+ay)$$

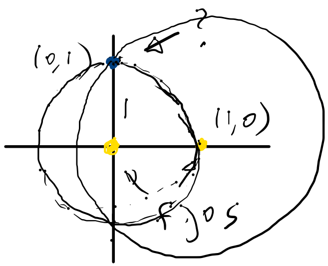


chequear $R(a,b) = (\underbrace{a^2+b^2}_{1}, \underbrace{-ba+ab}_{0}) = (1,0)$

$$(\underbrace{R \circ S_1}_{S_2})(1,0) = R(S_1(1,0)) = R(a,b) = (1,0)$$

Conclusión: $S_2(0,0)=(0,0)$, $S_2(1,0)=(1,0)$, S_2 isometría

(III) P: $S_2(0,1)=\,?$



R: $S_2(0,1) = \begin{cases} (0,1) \\ (0,-1) \end{cases}$

$(x,y) := S_2(0,1) \underset{\text{P.D.}}{\Longrightarrow} x=0,\ y=\pm 1.$

$1 = \|(0,1)-(0,0)\|^2 = \|(x,y)-(0,0)\|^2 = x^2+y^2$

$2 = \|(0,1)-(1,0)\|^2 = \|(x,y)-(1,0)\|^2 = (x-1)^2+y^2$

$\Longrightarrow \begin{cases} (1)\ x^2+y^2=1. \\ (2)\ (x-1)^2+y^2=2 \end{cases}$

(2) − (1): $-2x+1=1 \Longrightarrow x=0$

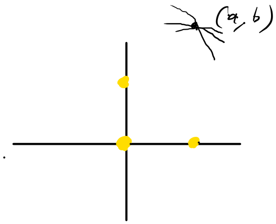
(1) $\Longrightarrow y^2=1$

✓

Conclusión! S_2 ó $C\circ S_2$ tienen 3 puntos fijos: $\underbrace{(0,0),\ (1,0),\ (0,1)}$

(IV) una isometría S que tiene estos 3 puntos fijo es la identidad $S(x,y)=(x,y)$, $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$.

$(x,y) = S(a,b)$



$$\begin{cases} x^2+y^2 = a^2+b^2 & (1)\\ (x-1)^2+y^2 = (a-1)^2+b^2 & (2)\\ x^2+(y-1)^2 = a^2+(b-1)^2 & (3)\end{cases}$$

P. 17, $x=a$, $y=b$ es la única sol'n.

(2) − (1): $-2x+1 = -2a+1 \implies x=a$

(3) − (1): $-2y+1 = -2b+1 \implies y=b$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & X \arrow[r, "g"] \arrow[l, dashed, bend left, "f^{-1}"] & X \arrow[l, dashed, bend left, "g^{-1}"] \arrow[ll, dashed, bend left, "f^{-1}\circ g^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

ej: si $f,g: X\to X$ son invertibles $\implies g\circ f$ es invertible y su inversa es $f^{-1}\circ g^{-1}$.

$S = S_1\circ S_2\circ S_3\circ \cdots$ es invertible si $S_1, S_2, \ldots$ lo son.