3. $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de una transformacion lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si y solo si $\det(L - \lambda I) = 0$.

λ valor propio $\Longleftrightarrow$ $\exists$ vector propio asociado,

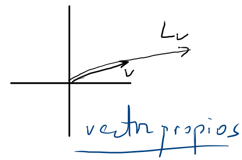
ie $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, $Lv = \lambda v$

$\Longrightarrow \det(L - \lambda I) = 0$?

?

$= Lv - \lambda v = 0$

$= Lv - \lambda I v = \underbrace{(L - \lambda I)}_{\text{tiene kernel no trivial!}} v = 0$



$\Updownarrow$ prob 2

Ecuación cuadrática! $\rightarrow$ $\det(L - \lambda I) = 0$.

$$\boxed{A\lambda^2 + B\lambda + C = 0}.$$

$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$L - \lambda I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \xmapsto{\det} (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$

$$\boxed{\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0}$$

$A = 1$, $B = -(a+d)$, $C = ad - bc$.

¿Cuándo tiene solución?

cuando $0 \leq B^2 - 4AC = (a+d)^2 - 4(ad - bc) =$

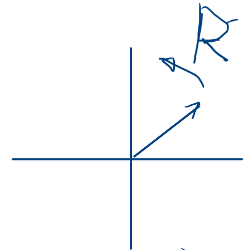
$= a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4bc =$

$= (a-d)^2 + 4bc$

Cor: si $b = c \Longrightarrow \Delta = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$. (prob. 5). ✓

Ejemplo: • de una t.l. sin valores propios.

rot. p/ 90°, $R=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$



$\Rightarrow \Delta = (0-0)^2 + 4(1)(-1) < 0$.

• $L = 3I = \begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$ $\quad \det(L-\lambda I) = \det\begin{pmatrix}3-\lambda&0\\0&3-\lambda\end{pmatrix} = (3-\lambda)^2=0$

$\Rightarrow \lambda = 3$ (solo 1 valor propio)

valores propios = ?

vectores propios = ?

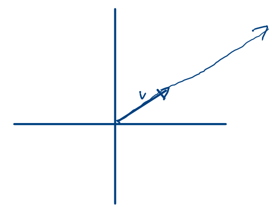
¿Cuales son los vectores propios que corresponden a $\lambda = 3$?

$L=3I$

$Lv = 3Iv = 3v$

$Lv = 3v$,

$\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix}3x\\3y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x\\3y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}3x=3x\\3y=3y\end{cases}$

Sol'nes: todo $\mathbb{R}^2$!!

$\Rightarrow$ los vectores propios son $\mathbb{R}^2 \setminus 0$

valor propios, vectores propios.

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(L - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = 0$$

t.l. simétrica

$$(2-\lambda)^2 = 9$$

$$2 - \lambda = \pm 3$$

$$\boxed{\lambda = 2 \pm 3 = 5, -1}$$

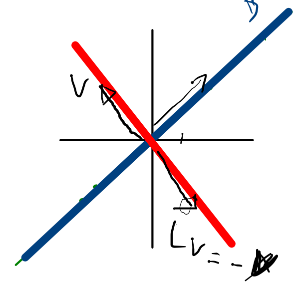
vectores propios

espacio propio de $\lambda = 5$

- $\lambda = 5$, $\quad Lv = 5v$, $\quad \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ \cancel{3x - 3y = 0} \end{cases} \Rightarrow \quad y = x$$

e.g. $(2, 2)$



- $\lambda = -1$

$$x = -y$$

Teo: los espacios propios de una t.l. simétrica que corresponden a valores propios distintos son perpendicular

$\left(v_1 \perp v_2 \overset{def}{\iff} \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \right)$.

Ejemplo: $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda = ?$ vectores propios ?

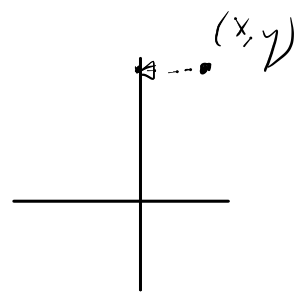
diag. princip.

$\underline{\lambda = 0} \Rightarrow$ vect. prop $Lv = 0$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{y = 0}$

el eje de x !

sim.

$\underline{\lambda = 1} \Rightarrow$ vect prop son el eje de y!!



$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

2. Una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiene kernel no nulo si y solo si $\det(L) = 0$.

P.D. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene sol'nes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow ad - bc = 0$

L

$\Rightarrow$: suponemos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es una sol'n $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; digamos $x \neq 0$.

$\boxed{\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}}$ $/\cdot x$ $/\cdot x$ $\Rightarrow$ $adx + bdy = 0$, $bcx + bdy = 0$, $(ad - bc)x = 0$

$\Rightarrow \begin{array}{l} a + b\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \\ c + d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -b\left(\frac{y}{x}\right) \\ c = -d\left(\frac{y}{x}\right) \end{array}$

$ad - bc = -b\cancel{\frac{y}{x}}d + b\cancel{d\frac{y}{x}} = 0$

Si $y \neq 0$ .... (algo similar).

si $v \in \ker(L)$, $v \neq 0 \Rightarrow L$ no es inyectiva $\Rightarrow$ no tiene inversa $\underset{\text{prob. 1 de tarea 4}}{\Rightarrow}$ det $= 0$.

$\Leftarrow$: suponemos $ad = bc$

P.D. $\exists$ sol $(x, y) \neq (0, 0)$

tomamos $(d, -c)$

$ad - bc = 0$

$cd + d(-c) = 0$

Si $(d, -c) \neq (0, 0)$ ya acabamos.

si $(d, -c) = (0, 0)$ entonces .... (terminar).