- El *producto escalar* de dos vector $\mathbf{v}_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, es el número $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle := x_1x_2 + y_1y_2$.
- Una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es *simétrica* si $\langle L\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, L\mathbf{v}_2 \rangle$ para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$.

4. Una transformación lineal $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ es simétrica si y solo si $b = c$.

$\Rightarrow$: $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es simétrica $(\langle Lv, w\rangle = \langle v, Lw\rangle, \forall v, w)$ ← dado

P.D. $b = c$. ← hay que demostrar

$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$

$\langle Lv_1, v_2\rangle = \langle v_1, Lv_2\rangle = \langle Lv_2, v_1\rangle$

$\langle L\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}_{v}, \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{w}\rangle = \langle \begin{pmatrix} ax_1+by_1 \\ cx_1+dy_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\rangle =$

$= (ax_1+by_1)x_2 + (cx_1+dy_1)y_2 =$

$= \cancel{ax_1x_2} + by_1x_2 + cx_1y_2 + \cancel{dy_1y_2}$

$= \cancel{ax_2x_1} + by_2x_1 + cx_2y_1 + \cancel{dy_2y_1}$

para todos $\boxed{\forall x_1, x_2, y_1, y_2}$ ← cierto

$b(x_2y_1 - x_1y_2) = c(\boxed{x_2y_1 - x_1y_2})$

$x_1 = 1.3$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ ← está dado?

Qué valores de x_1, x_2, y_1, y_2 conviene tomar en este momento? $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$.

$\Rightarrow b = c$. ∎

$\langle Lv, \lambda v\rangle = \langle v, L(\lambda v)\rangle$

Si $v = w$

$\Rightarrow x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$

$\Rightarrow \boxed{} = 0$

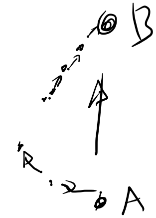
$\langle Lv, v\rangle = \langle v, Lv\rangle$

$v = \lambda w$, $x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2$

$\Leftarrow$: Suponemos $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b = c$.

P.D. $\langle Lv, w \rangle = \langle v, Lw \rangle$, $\forall v, w$.

D: O sea, P.D.



$$= a x_1 x_2 + b y_1 x_2 + \overset{b}{\cancel{c}}\, x_1 y_2 + d y_1 y_2 = a x_2 x_1 + b y_2 x_1 + \overset{b}{\cancel{c}}\, x_2 y_1 + d y_2 y_1$$

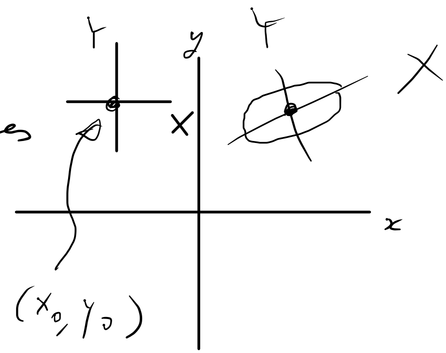
Sustituimos $b = c$

Ejemplo de ejercisio que queremos resolver.

$$\overbrace{2x^2 + 3xy + 4y^2}^{\text{cuadrático}} + \overbrace{5x + 6y}^{\text{lineales}} + \overbrace{7}^{\text{const.}} = 0$$

$\boxed{\text{Clave}}$ diseñar una serie de cambios de coordenadas que simplifiquen la ecuación, hasta llegar a una de las ecuaciones "estandar":

$$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 + 1 = 0\} = \emptyset$$



elipse $\rightarrow \left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = 1$

hiperbola $\rightarrow \left(\frac{X}{a}\right)^2 - \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = 1$

parábola $\rightarrow y^2 = 4ax$

vacío $\rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = -1$

par de lineas $\rightarrow xy = 0$

$\rightarrow x^2 - y^2 = 0$

etc.

(I) <u>Traslación</u>: $x = X + x_0$ $\Leftarrow$ $X = x - x_0$

$y = Y + y_0$ $\quad$ $Y = y - y_0$

<u>Meta</u>: buscar (x_0, y_0) t.q. la ecuación de la figura en XY no tiene términos lineal, mediante "completar cuadrados".

?

$x = X + x_0$

$y = Y + y_0$

$$\overbrace{2x^2 + 3xy + 4y^2}^{☹} + \overbrace{5x + 6y} + \overline{7} = 0$$

$$2(X + x_0)^2 + 3(X + x_0)(Y + y_0) + 4(Y + y_0)^2 + 5(X + x_0) + 6(Y + y_0) + 7 = 0$$

$$\dots + X(\underbrace{4x_0 + 3y_0 + 5}_{\overset{!!}{=} 0}) + Y(\underbrace{3x_0 + 8y_0 + 6}_{\overset{!!}{=} 0}) + \dots$$

$$\begin{cases} 4x_0 + 3y_0 = -5 \\ 3x_0 + 8y_0 = -6 \end{cases} \Rightarrow x_0 = \dots, \quad y_0 = \dots$$