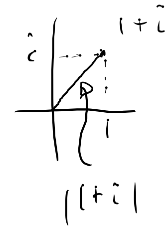
3. Calcular el valor absoluto de los siguientes números complejos:

a) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{17}$ b) $-2i(3+i)(2+4i)$ c) $\dfrac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$.

Valor absoluto $\quad |1+i| = ?$



$||1+i|^2 = 1^2+1^2 = 2 \Rightarrow |1+i| = \sqrt{2}$

$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2} = \|(a,b)\|$.

Teo: $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$, $\left|z_1/z_2\right| = |z_1|/|z_2|$, $z_2 \neq 0$,

para num. reales es cierto pero algo trivial.

Ejemplo que muestra que no es trivial:

los cuadrados: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169 ...

Suma de cuadrados: 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, ~~11~~, 13, ~~14~~, ...

✓ $8 \cdot 9 = 72 = 36$

✓ $5 \cdot 13 = 65 = 64 + 1$

⋮

Teo: si A, B son cada uno suma de cuadrados, también los es AB.

Dem: $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = x^2+y^2$; sea $z = a+ib$, $w = c+id$

$$|z|^2 |w|^2 = |zw|^2 =$$
$$= |(a+ib)(c+id)|^2 = |(ac-bd)+i(ad+bc)|^2 =$$
$$= \underbrace{(ac-bd)}_{x}^2 + \underbrace{(ad+bc)}_{y}^2$$

Checar: $x = ac-bd$, $y = ad+bc \Rightarrow x^2+y^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

$$a^2 b^2 = (ab)^2.$$

---

suma de 4 cuadrados? también es conjunto multiplicativo (usar cuaterniones, $a+ib+jc+kd$)

$$\Bigg|\underbrace{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)}_{\text{no es 1 pero tiene norma 1}}^{17}\Bigg| = \left|\frac{1+i}{1-i}\right|^{17} = \left[\frac{|1+i|}{|1-i|}\right]^{17} = \frac{(\sqrt{2})^{17}}{(\sqrt{2})^{17}} = 1.$$

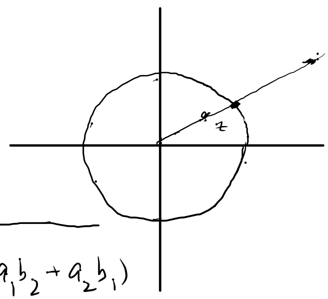
$$|z^{17}| = |z z z \cdots z| = |z||z| \cdots |z| = |z|^{17}$$

b) $\left|-2i(3+i)(2+4i)\right| = |-2i|\,|3+i|\,|2+4i| =$

$= 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{20} = 2\sqrt{200} = 20\sqrt{2}.$

6. * Sea $f : \mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{C} \setminus 0$, $z \mapsto 1/z$. Demuestra: la imagen de un círculo o recta bajo f es un círculo o recta. Más preciso: la imagen de un círculo que no pasa por el origen es un círculo del mismo tipo; la imagen de una recta que no pasa por el origen es un círculo que pasa por el origen (menos el origen mismo); la imagen de una recta que pasa por el origen es una recta del mismo tipo.

$\bar{f} : z \mapsto 1/\bar{z}$ es inversión.



$e^{i\theta} \mapsto \dfrac{1}{\overline{e^{i\theta}}} = \dfrac{1}{e^{-i\theta}} = e^{i\theta}$

$z = re^{i\theta} \Rightarrow \dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1}{r} e^{i\theta}.$

$\boxed{\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2}$

$\overline{(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)}$

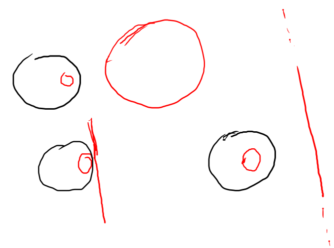
$= a_1a_2 - b_1b_2 - i(a_1b_2 + a_2b_1)$

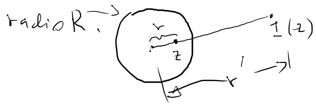
$(a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 - i(b_1a_2 + a_1b_2)$ ✓

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta = \cos(-\theta) + i(\operatorname{sen}(-\theta)) = e^{-i\theta}.$

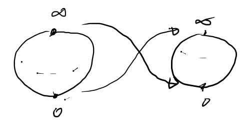
En general: inversión con respecto a un círculo $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$rr' = R^2$



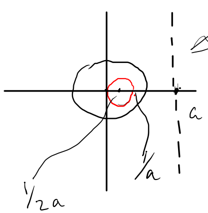


$\mathbb{R}^2 \cup \infty \to \mathbb{R}^2 \cup \infty$



Propiedad: ① manda círculos + recta → circ. + rect.

② preserva ángulos



$a+it$

$$f(a+it) = \frac{1}{a+it} = \frac{a-it}{a^2+t^2}$$

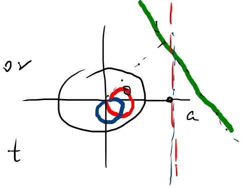
$$\forall t, \left| \frac{a-it}{a^2+t^2} - \frac{1}{2a} \right| = \frac{1}{2a} \ ?$$

$$\left| \frac{(a-it)\,2a - a^2 - t^2}{\cancel{2a}\,(a^2+t^2)} \right| = \frac{1}{\cancel{2a}}$$

$$|a^2 - t^2 - 2ita|^2 = (a^2+t^2)^2 \ ?$$

$$(a^2-t^2)^2 + 4t^2a^2 = (a^2+t^2)^2 \quad ✓$$

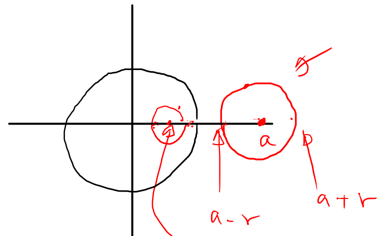
Recta general está parametrizado por



$$e^{i\theta}(a+it) \longmapsto \frac{1}{e^{i\theta}(a+it)} = \frac{1}{e^{i\theta}}\frac{1}{a+it}$$

θ fijo, t variable. $\quad = e^{-i\theta}\frac{1}{a+it}$ la imagen de recta vertical, rotada por $-\theta$

Para círculo



$a + re^{it}$

$$\text{centro} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-r} + \frac{1}{a+r}\right)$$

$$\text{radio} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-r} - \frac{1}{a+r}\right)$$

P.D.

$$\left|\frac{1}{a+re^{it}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-r}+\frac{1}{a+r}\right)\right| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-r} - \frac{1}{a+r}\right)$$

Transf. de Möbius

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

composición de: $z \mapsto az = re^{i\theta}z$ $\quad (b=0,\ c=0,\ d=1)$

$z \mapsto z+b$ $\quad (a=1,\ c=0,\ d=1)$

$z \mapsto 1/z$