Elementos de geometría, DEMAT-UG, ago-dic 2021

Examen parcial num. 2

18 nov, 2021

Duración del examen: 1.5 hrs.

En cada inciso hay que encontrar la cantidad o el objeto descrito. Presnta de manera clara tus cuentas y razonamiento. Si usas algun resultado de la clase o la tarea anuncialo con precisión y claridad (pero no lo tienes que demostrar).

1. La distancia entre $P_1 = (-1, -2)$ y $P_2 = (2, 2)$.
2. La norma del vector $\mathbf{v} = (6, -8)$.
3. El producto escalar de los dos vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ y $\mathbf{v}_2 = (-1, 4)$.
4. El punto P sobre el segmento que une los puntos $P_1 = (-1, -2)$ y $P_2 = (2, 2)$, y que divide la distancia entre ellos en una proporción de $2:1$, $dist(P_1, P) = 2\, dist(P, P_2)$.
5. Una recta paralela a $x + 2y + 3 = 0$ que pasa por el origen $(0, 0)$.
6. El baricentro (punto de intersección de las medianas) del triángulo con vértices $P_1 = (-2, -3)$, $P_2 = (2, -1)$, $P_3 = (-1, 5)$.
7. Los valores y vectores propios de la transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $L(x, y) = (2x, 4y)$.
8. La determinante de la transformación lineal del inciso 7.
9. La imagen de la recta $x + 2y + 3 = 0$ bajo la transformación lineal del inciso 7.
10. La imagen del círculo $x^2 + y^2 = 1$ bajo la transformación lineal del inciso 7.
11. La imagen de la parábola $y = x^2$ bajo la transformación lineal del inciso 7.
12. Los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que existe un vector no nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $L(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, donde $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $L(x, y) = (x + 2y, 2x - y)$.
13. La inversa de la transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $L(x, y) = (2y, 4x)$.
14. Una rotación (por el origen) $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que manda $(1, 1)$ a un punto del eje de y.
15. Los focos de la elipse $x^2 + 2y^2 = 3$.
16. Las longitudes de los semi-ejes (mayor y menor) de la elipse $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 6$.
17. La distancia entre los focos de la orbita de la tierra alrededor del sol, si su eje mayor es 1 AU y eje menor es 0.99986. (AU=astronomical unit$\approx$ 150 millones de km).
    Nota: usando esa cuenta se puede demostrar que ambos focos se encuentran *dentro* del sol.
18. Las asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 9$.
19. El foco de la parábola $y = (x - 1)(x - 3)$.
20. La recta tangente a la elipse $x^2 + 2y^2 = 3$ en el punto $P = (1, 1)$.
21. * (opcional) La determinante de L^{2021} (L compuesta con su misma 2021 veces), donde $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal dada por $L(x, y) = (11x - 20y, 6x - 11y)$.

Extra crédito (opcional). Una pelota rebota dentro de una mesa de billar elíptica (se refleja de las paredes). Sean $P_1, P_2, P_3, \ldots$ los puntos sucesivos de la elipse en donde rebota la pelota (en orden cronológico). Sean d_i, d_i' las distancias del segmento $[P_i, P_{i+1}]$ de la trayectoria de la pelota a los focos de la elipse. Demuestra que el producto $d_i d_i'$ es independiente de i.