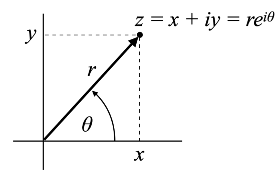
Tarea núm. 13

(Para el jueves 25 nov 2021)

Definiciones

Un *número complejo* es una expresión de la forma $z = a + ib$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. El conjunto de números complejos se denota por $\mathbb{C}$. La *parte real* es $\mathrm{Re}(z) = a$, la parte imaginaria es $\mathrm{Im}(z) = b$ (cuidado: no es ib), el *valor absoluto* es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y el *conjugado* es $\bar{z} = a - ib$. El producto de números complejos se hace con la regla $i^2 = -1$.

A cada número complejo $z = a + ib$ se le asocia el punto (o vector) $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La *forma polar* de un número complejo $z = a+ib \neq 0$ es $z = re^{i\theta}$, donde $r = |z| > 0$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, y $\theta \in \mathbb{R}$ es el ángulo en el dibujo (en radianes), medido desde el eje de x positivo contra el sentido del reloj para $\theta \geq 0$ y con el sentido del reloj para $\theta < 0$.



Proposiciones vistas en clase

- $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$. Explicitamente:
$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2,$$
$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2.$$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$, $z\bar{z} = |z|^2$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\mathrm{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$, $\mathrm{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i$.

Problemas

1. Encontrar la forma polar de los siguientes números complejos

   a) i b) $1 + i$ c) $(1 - i)^{10}$ d) $\dfrac{1}{1 - i}$.

2. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Expresar la parte real e imaginaria de los siguientes números complejos en términos de x y y:

   a) z^2 b) z^3 c) $\dfrac{1}{z}$ d) $\dfrac{z-1}{z+1}$

3. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$:

   a) $(1 + 2i)^3$ b) $\dfrac{5}{-3 + 4i}$ c) $e^{i\pi}$ d) $e^{i\pi/2}$

   e) $e^{i\pi/3}$ f) $e^{i2021\pi/3}$ g) $(3 + 4i)^{10}(3 - 4i)^{10}$

   h) $(1 + i)^{10}$

   (En el último: conviene escribir primero $1 + i$ en su forma polar).