Tarea núm. 4 - solución del problema 2

Problema 2. Demuestra: para cada terna pitagórica primitiva (a, b, c) existe una única pareja de enteros positivos (m, n) que produce esta terna, o la terna (b, a, c), mediante las fórmulas

$$a = 2mn,\ b = m^2 - n^2,\ c = m^2 + n^2, \tag{$*$}$$

Solución. La demostración se divide en la *existencia* y la *unicidad*. Empezamos con la existencia. Sea (a, b, c) una terna pitagórica primitiva.

1. Primero demostramos que (a, b), (b, c), (a, c) son primos relativos. Empezamos con (a, b). Si no son primos relativos entonces existe un primo p que divide a ambos, por lo que divide a $c^2 = a^2 + b^2$, así que divide a c también, contradiciendo que (a, b, c) es una terna primitiva. La demostración para (b, c) y (a, c) es similar.

2. Ahora demostramos que (a, b) son de paridad opuesta (uno es par y el otro impar). Si (a, b) son ambos pares entonces no so son primos relativos (2 es un factor común). Si (a, b) son ambos impares entonces son $\equiv 1$ o $3 \bmod 4$, sus cuadrados son $\equiv 1 \bmod 4$, así que $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \bmod 4$. Pero 2 no es un cuadrado mod 4. Así que uno de (a, b) es par, el otro impar.

3. Suponemos ahora que a es par y b impar, intercambiando a y b si es necesario. Así que a^2 es par y b^2 es impar, por lo que $c^2 = a^2 + b^2$ es impar y c es impar también. Así que los 3 números $a, b + c, b - c$ son pares. Podemos reescribir entonces la ecuación $a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$ como

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{c+b}{2}\right)\left(\frac{c-b}{2}\right), \tag{$**$}$$

donde los 3 números $a/2, (c + b)/2, (c - b)/2$ son enteros. Los últimos dos son primos relativos porque si tienen un factor común tambíen es un factor común de su suma y resta, que son c y b, respectivamente. Pero ya hemos demostrado que (b, c) son primos relativos.

4. Ahora si un producto de dos números primos relativos es un cuadrado entonces cada uno de estos números es un cuadrado (esto lo puedes demostrar facilmente escribiendo la descomposición en primos de cada uno de los números). Así que $(**)$ implica que existen enteros positivos m, n tal que $(c + b)/2 = m^2,\ (c - b)/2 = n^2$. Tomando la suma y resta de estas dos ecuaciones, tenemos $c = m^2 + n^2,\ b = m^2 - n^2$, por lo que $a^2 = c^2 - b^2 = 4m^2n^2$, o sea $a = 2mn$.

Esto termina con la parte de existencia de la demotración.

5. Para demostrar la unicidad, notamos primero que para cada pareja (m, n) que satisface las fórmulas $(*)$ también satisface que $(c + b)/a = m/n$. Además, usando problema 1 de la tarea 4, (m, n) son primos relativos, así que la fracción m/n está en "forma reducida". Si existe otra pareja de enteros positivos que produce a (a, b, c) mediante las fórmulas $(*)$, digamos (m', n'), también (m', n') son primos relativos y $(c + b)/a = m'/n'$. Así que $m/n = m'/n'$ y ambas fracciones en esta ecuación están en forma reducida. Esto implica que $m = m'$ y $n = n'$. $\square$

Nota. Esta demostración (excepto la unicidad) es la del libro de E. Maor, *The Pythagorean Theorem*, Appendix B. Es un poco larga pero no conozco una más corta. En el artículo de Wikipedia en ingles sobre *Pythagorian triples* hay varias otras demostraciones.