Tarea núm. 9

(Para el jueves 21 oct, 2021)

Definiciones

- Una función $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una *tranformación lineal* si (1) $L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2)$ para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, (2) $L(\lambda \mathbf{v}) = \lambda L(\mathbf{v})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.
- Una *traslación* en $\mathbb{R}^2$ es una función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la forma $P \mapsto P + \mathbf{v}_0$, donde $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^2$.
- Una *rotación* en $\mathbb{R}^2$ (por el origen) es una función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la forma $(x, y) \mapsto (ax - by, bx + ay)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 + b^2 = 1$.
- La *reflexión por el eje de x* es la función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $(x, y) \mapsto (x, -y)$.
- Una *isometría* (o congruencia) de $\mathbb{R}^2$ es una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva distancias: $dist(f(P), f(Q)) = dist(P, Q)$ para todo $P, Q \in \mathbb{R}^2$.
- Una funcíon $f : X \to X$ es *invertible* si tiene inversa, o sea una función $g : X \to X$ tal que $g \circ f$ y $f \circ g$ son la función identidad de X.

Problemas

1. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal si y solo si existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Es invertible si y solo si $\det(L) := ad - bc \neq 0$.

   Sugerencia: define $(a, c) := L(1, 0)$, $(b, d) := L(0, 1)$. La inversa es $L^{-1}(x, y) = (dx - by, -cx + ay)/\det(L)$.

2. *a*) Toda traslación es una isometría y es invertible. Mismo para rotación por el origen y la reflexión por el eje de x.

   Sugerencia. La inversa de $P \mapsto P + \mathbf{v}_0$ es $P \mapsto P - \mathbf{v}_0$. La inversa de $(x, y) \mapsto (ax - by, bx + ay)$, donde $a^2 + b^2 = 1$, es $(x, y) \mapsto (ax + by, -bx + ay)$. La inversa de $(x, y) \mapsto (x, -y)$ es ella misma.

   b) Una composición de isometrías es una isometría.

   c) Toda isometría de $\mathbb{R}^2$ es la composición de traslación, rotación y (posiblemente) la reflexión por el eje de x (no necesariamente en este orden).

   Sugerencia: sea S una isometría. Existe entonces una traslación T tal que $S_1 := T \circ S$ deja el origen fijo: $S_1(0, 0) = (0, 0)$. Existe luego una rotación R por el origen tal que $S_2 := R \circ S_1$ deja el punto $(1, 0)$ fijo. Luego S_2 deja $(0, 1)$ fijo o $S_2(0, 1) = (0, -1)$. En el primer caso S_2 es la transformación identidad, $S_2(x, y) = (x, y)$, en el 2ndo $C \circ S_2$ es la identidad, donde C es la reflexión por eje de x.

   d) Toda isometría de $\mathbb{R}^2$ es invertible. Su inversa es una isometría también.

3. La imagen de una elipse por una isometría es una elipse con las mismas longitudes de ejes mayor y menor, misma distancia entre focos y misma suma de distancia a los focos. Formula y demuestra anuncios similares para parábola e hipérbola.

4. Encuentra una ecuación para la imagen de la elipse $2x^2 + 3y^2 = 1$ bajo (i) la translación $T : (x, y) \mapsto (x, y) + (2, 3)$, (ii) la rotación $R : (x, y) \mapsto (3x + 4y, -4x + 3y)/5$, (iii) las composiciones $R \circ T$ y $T \circ R$ de las dos transformaciones anteriores.

5. Encuentra una ecuación cuadrática para la elipse con focos en $(1, 2), (3, 4)$ y suma de distancias 5 a sus focos.

   Sugerencia. Encuentra una rotación R y translación T tal que la imagen de esta elipse bajo $R \circ T$ está dada por una ecuación de la forma $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.