Notas 1
Repaso de cálculo vectorial

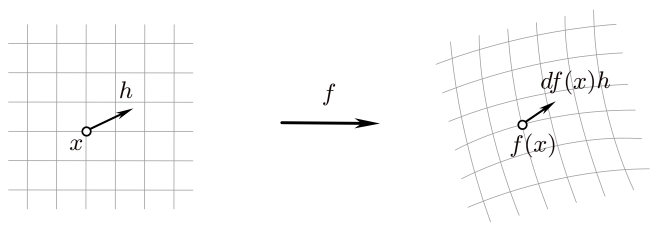
20 de enero de 2025

Nota. U denota un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición. Una función $f : U \to \mathbb{R}^m$ es *diferenciable* en un punto $x \in U$ si existe una $L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (una transformación lineal $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{|h|} \to 0. \tag{1}$$

A la transformación lineal L, si existe, se llama *la derivada de f en x* y se denota por $df(x)$. Luego, f es *diferenciable* si es diferenciable para todo $x \in U$. En este caso, se denota por $df : U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a la función $x \mapsto df(x)$.



Notas.

1. Para que el límite en (1) tenga sentido suponemos que $h \neq 0$ y que $x + h \in U$. Como U es abierto, existe un $\epsilon > 0$ tal que esto se cumple para todo $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 < |h| < \epsilon$.

2. Otras notaciones comunes para df son Df y f_*. Una notación para $df(x)h$ es $D_h f(x)$ ("la derivada direccional de f en x en la dirección h"). Si $m = 1$, o sea f es una función real diferenciable, $df(x) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$ (el espacio dual a $\mathbb{R}^n$), y $df : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ se llama *la diferencial* de f.

3. Ver el siguiente problema, para la justificación de la palabra "la" en el término "la derivada".

Problema 1. Si existe una $L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ que satisface la ecuación (1) entonces es única.

Problema 2. La ecuación (1) es equivalente a

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + o(|h|), \quad h \to 0,$$

donde $o(|h|)$, $h \to 0$, denota una funcíon, digamos $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que para todo $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$ implica $|r(h)| \le \epsilon |h|$.

Problema 3. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal entonces es diferenciable y $df(x) = f$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Problema 4. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función.

(a) Diferenciabilidad de f en algún $x \in (a, b)$ según la definición de la ecuación (1) coinicde con la definición usual de cálculo de una variable: existencia del límite $f'(x) := \lim_{h\to 0}(f(x + h) - f(x))/h$.

(b) Si f es diferenciable en $x \in (a, b)$ entonces $df(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la transformación lineal $h \mapsto f'(x)h$.

(c) Si f es diferenciable entonces $df = f'dx$.

Problema 5. Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable entonces

(a) $df(x)h = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x + th)$ para todo $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$;

(b) f es contínua;

(c) si $f = (f_1, \ldots, f_m)$ entonces las derivadas parciales $\partial f_i/\partial x_j$ existen;

(d) la *matriz Jacobiana* (la matrix de derivadas parciales), en un punto $x \in U$, es la matriz de $df(x)$ con respecto a las bases canónicas en $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$;

(e) $df = \sum_{j=1}^{n} (\partial f/\partial x_j)\ dx_j$.

(f) Sea $f_x := \partial f/\partial x, f_y := \partial f/\partial y, f_z := (f_x - if_y)/2, f_{\bar{z}} := (f_x + if_y)/2$. Entonces $df = f_x dx + f_y dy = f_z dz + f_{\bar{z}} dz$.

Problema 6. Encuentra la derivada df de cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dar cada respuesta como una combinación lineal de dx, dy, y tambien de $dz, d\bar{z}$.

Nota. Identificamos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $x + iy \mapsto (x, y)$.

(a) $f(x + iy) = x^2 + iy^2$. (b) $f(z) = z^2$. (c) $f(z) = |z|$, $z \neq 0$. (d) $f(z) = 1/\bar{z}$, $z \neq 0$.

Ejemplo. Inciso (a):

$$\begin{aligned} df &= d(x^2 + iy^2) = (2x)dx + (2iy)dy \\ &= x(dz + d\bar{z}) + y(dz - d\bar{z}) = (x + y)dz + (x - y)d\bar{z}. \end{aligned}$$

Teorema. *Si f es C^1 (las derivadas parciales de f existen y son contínuas) entonces f es diferenciable.*

Problema 7. Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciable. Entonces f es C^1 ssi $df : U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es contínua.

Nota. Se usa la topología en $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ heredada por su indentificación usual con $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{mn}$.

Problema 8. Encuentra ejemplos de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que (a) f es diferenciable pero no C^1; (b) las derivadas parciales existen pero f no es diferenciable.

Teorema. *La suma de funciones diferenciables es diferenciable. El producto de funciones diferenciables $U \to \mathbb{R}$ es diferenciable. El cociente de funciones diferenciables $U \to \mathbb{R}$ es diferenciable, si el denominador no se anula.*

Teorema (La regla de la cadena). *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos. Si $f : U \to V$ y $g : V \to \mathbb{R}^k$ son funciones diferenciable entonces $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ es diferenciable y para todo $x \in U$ $d(g \circ f)(x) = dg(y) \circ df(x)$, donde $y = f(x)$.*

Nota. Menos preciso (pero más fácil recordar): *"la derivada de la composición es la composición de las derivadas."*

Teorema (El Teorema de la Función Inversa). *Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ es C^1 y $df(x)$ es invertible para algun $x \in U$, entonces existen vecindades $U_1 \subset U$ de x y $V_1 \subset V$ de $f(x)$ tal que la restriccion de f a U_1 define un difeomorfismo $U_1 \to V_1$ (una función diferenciable biyectiva con inversa diferenciable).*

Problema 9. En el teorema anterior, si $f_1 : U_1 \to V_1$ es el difeomorfismo inducido por f, $g_1 = (f_1)^{-1}$ y $y = f(x)$, entonces $dg_1(y) = [df_1(x)]^{-1}$ (igualdad de transformaciones lineales).

Problema 10. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$.

(a) Calcula la matriz Jacobiana de f en $z_0 \in \mathbb{C}$.

(b) Determina las $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $df(z_0)$ es invertible.

(c) Para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ del inciso anterior encuentra unas vecindades maximales $U_1, V_1 \subset \mathbb{C}$ de z_0 y $(z_0)^2$ (resp.) tales que f define un difeomorfismo entre ellas.

Problema 11. Repite el problema anterior para

(a) $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = 1/z$.

Nota. $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$.

Problema 12. Sea $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = 1/z^2$. Confirma la regla de la cadena, expresando f como la composición de $z \mapsto z^2$ y $w \mapsto 1/w$, calculando las derivadas de estas funciones en z_0 y $w_0 = 1/z_0$ (puedes usar los últimos dos problemas), luego la derivada de f en z_0 (esto lo haces directamente), y verificar que la última derivada es la composición de las 1eras dos.