

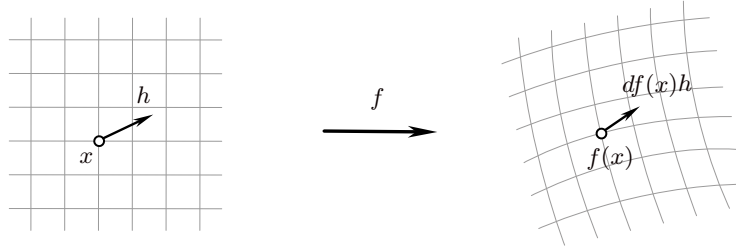
Notas 1

20 de agosto de 2026

Definición. Una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde U es un abierto en $\mathbb{R}^n$, es *diferenciable* en un punto $x \in U$ si existe una $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (una transformación lineal $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$) tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{|h|} \rightarrow 0. \quad (1)$$

A la transformación lineal L , si existe, se llama *la derivada de f en x* y se denota por $df(x)$. Luego, f es *diferenciable* si es diferenciable en todo $x \in U$. En este caso, se denota por $df : U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a la función $x \mapsto df(x)$.



Notas.

1. Para que el límite en (1) tenga sentido suponemos que $h \neq 0$ y que $x+h \in U$. Como U es abierto, existe un $\epsilon > 0$ tal que esto se cumple para todo $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 < |h| < \epsilon$.
2. Otras notaciones comunes para df son Df y f_* . Una notación para $df(x)h$ es $D_h f(x)$ (“la derivada direccional de f en x en la dirección h ”). Si $m = 1$, o sea f es una función real diferenciable, $df(x) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$ (el espacio dual a $\mathbb{R}^n$), y $df : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ se llama *la diferencial* de f .
3. Ver el siguiente problema, para la justificación de la palabra “la” en el término “la derivada”.

Problema 1. Si f es diferenciable en x entonces

- (a) la transformación lineal $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de la ecuación (1) es única;
- (b) las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ existen y son las entradas de la matriz de L respecto a la base canónica – la *matriz Jacobiana* de f ;
- (c) f es continua en x .

Problema 2. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal entonces es diferenciable y $df(x) = f$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Problema 3. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

- (a) Diferenciabilidad de f en algún $x \in (a, b)$ según la definición de la ecuación (1) coincide con la definición usual de cálculo de una variable: existencia del límite $f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x))/h$.

(b) Si f es diferenciable en $x \in (a, b)$ entonces $df(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la transformación lineal $h \mapsto f'(x)h$.

(c) Si f es diferenciable entonces $df = f'dx$.

Problema 4. Encuentra la derivada df de cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Dar cada respuesta como una combinación lineal de dx, dy , y también de $dz, d\bar{z}$.

Nota. Identificamos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $x + iy \mapsto (x, y)$.

(a) $f(x + iy) = x^2 + iy^2$. (b) $f(z) = z^2$. (c) $f(z) = |z|$, $z \neq 0$. (d) $f(z) = 1/\bar{z}$, $z \neq 0$. (e) $f(z) = 1/z$, $z \neq 0$.

Ejemplo. Inciso (a):

$$\begin{aligned} df &= d(x^2 + iy^2) = (2x)dx + (2iy)dy \\ &= (z + \bar{z}) \left(\frac{dz + d\bar{z}}{2} \right) + (z - \bar{z}) \left(\frac{dz - d\bar{z}}{2i} \right) \\ &= (\bar{a}z + a\bar{z})dz + (az + \bar{a}\bar{z})d\bar{z}, \end{aligned}$$

donde $a = (1 + i)/2$. □

Teorema (La regla de la cadena). Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos. Si $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ son funciones diferenciables entonces $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ es diferenciable y para todo $x \in U$ $d(g \circ f)(x) = dg(y) \circ df(x)$, donde $y = f(x)$.

Nota. Menos preciso (pero más fácil memorizar): “la derivada de la composición es la composición de las derivadas.”

Teorema (El Teorema de la Función Inversa). Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es C^1 y $df(x)$ es invertible para algún $x \in U$, entonces existen vecindades $U_1 \subset U$ de x y $V_1 \subset V$ de $f(x)$ tal que la restricción de f a U_1 define un difeomorfismo $U_1 \rightarrow V_1$ (una función diferenciable biyectiva con inversa diferenciable).

Problema 5. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$.

- (a) Calcula la matriz Jacobiana de f en $z_0 \in \mathbb{C}$.
- (b) Determina las $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $df(z_0)$ es invertible.
- (c) Para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ del inciso anterior encuentra unas vecindades $U_1, V_1 \subset \mathbb{C}$ de z_0 y $(z_0)^2$ (resp.) tales que f define un difeomorfismo entre ellas.

Problema 6. Repite el problema anterior para $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Definición. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en $z \in U$ si el límite

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe y no depende de la manera en que $h \rightarrow 0$.

Problema 7. Demuestra que f es holomorfa en z ssi (1) es diferenciable en z ; (2) $df(z)$ es $\mathbb{C}$ -lineal.