

Tarea 3

(para entregar el 7 sept, 2026)

1. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Demuestra que $\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(0)$.

2. Sea

$$\omega = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

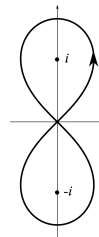
una 2-forma on $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Calcular $\int_{S_{r,a}} \omega$, $r \neq |a|$, donde $S_{r,a}$ es la esfera de radius r centrada en $(a, 0, 0)$, con la orientación estandar.

Sugerencia. Verificar que ω es cerrada y que la integral es 4π para $a = 0$, $r = 1$.

3. Calcular la integral

$$\int_C \frac{dz}{1+z^2},$$

donde C es la curva en el dibujo.



Sugerencia. Escribe $\frac{1}{1+z^2}$ como $\frac{a}{z-i} + \frac{b}{z+i}$, para unos $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Calcular

$$\int_C \frac{dz}{1+z^{10}},$$

donde C es el círculo de radio 2, centrado en 0, orientado contra las manecillas del reloj.

Sugerencia. Haz un cambio de variable $z = 1/w$ y usa el Teorema de Goursat.

5. Sea α una 1-forma diferenciable cerrada en un abierto $U \rightarrow \mathbb{C}$. Esto es, $\alpha = Pdx + Qdy$ donde $P, Q : U \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables, y $P_y = Q_x$. Sea R un rectángulo solido $[a, b] \times [c, d] \subset U$. Demuestra: $\int_{\partial R} \alpha = 0$.

Sugerencia. Puedes imitar la demostración del Teorema 2 en Ahlfors, p. 109.