

Tarea 4

(para entregar el 14 sept, 2026)

1. Demuestra que toda transformación de Möbius es una composición de translación, dilatación e inversión: $z \mapsto z + z_0$, $z \mapsto cz$, $z \mapsto 1/z$, con $z_0 \in \mathbb{C}$ y $c \in \mathbb{C}^*$.
2. Se define la *razón cruzada* de 4 elementos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$ como

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}.$$

(uno de los z_i puede ser ∞ , entonces se toma el límite correspondiente).

Demuestra que esta definición es equivalente a la definición 12 de Ahlfors, p. 78.

3. Demuestra que una función $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es una transformación de Möbius ssi preserva la razón cruzada.

Nota. En una dirección se puede usar el problema 1 arriba. En otra dirección usa la definición de Ahlfors de la razón cruzada. Nota que no suponemos que la función es holomorfa, o siquiera continua.

4. Ejercicios de Ahlfors: p. 78: 4; p. 80: 1, 2, 3*.

Respuesta de 2. $\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$

Sugerencia para 3. Usa que la razón cruzada de los 4 vértices de un cuadrilátero cíclico es real.