

## Tarea 5

(para entregar el 21 sept, 2026)

En esta tarea damos una solución del ejercicio 2 de la p. 80 de Ahlfors (problema 3 de la tarea 4): *Express the cross ratios corresponding to the 24 permutations of four points in terms of  $\lambda = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ .*

Unas definiciones primero. Sea  $X = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \widehat{\mathbb{C}}^4 \mid z_i \neq z_j \text{ si } i \neq j\}$ . Para  $\sigma \in S_4$  y  $\mathbf{z} \in X$  se define

$$\sigma \cdot \mathbf{z} = (z_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, z_{\sigma^{-1}(4)}). \quad (1)$$

Se define  $V_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subset S_4$ . Se define la razón cruzada  $R : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  mediante

$$R(\mathbf{z}) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)}.$$

(Si uno de los  $z_i = \infty$  se toma el límite de esta fórmula cuando  $z_i \rightarrow \infty$ .) Demuestra lo siguiente.

1. La fórmula (1) para  $\sigma \cdot \mathbf{z}$  define una acción de  $S_4$  en  $X$  (un homomorfismo de  $S_4$  en el grupo de biyecciones  $X \rightarrow X$ ).
2.  $V_4$  es un subgrupo normal de  $S_4$ .

Sugerencia. Observa que los 3 elementos no triviales de  $V_4$  son exactamente los elementos de  $S_4$  que son el producto de dos *transposiciones ajenas*. Luego si una permutación  $\alpha \in S_n$  es un producto de ciclos ajenos,  $\alpha = c_1 c_2 \dots$  entonces para todo  $\sigma \in S_n$   $\sigma \alpha \sigma^{-1} = (\sigma c_1 \sigma^{-1})(\sigma c_2 \sigma^{-1}) \dots$ , y  $\sigma(a, b, \dots) \sigma^{-1} = (\sigma(a), \sigma(b), \dots)$ .

3. El grupo cociente  $S_4/V_4$  es isomorfo a  $S_3$ .

Sugerencia. El grupo  $S_4$  actúa por conjugación en  $V_4$ . La acción tiene dos órbitas:  $\{id\}$  y su complemento  $C := \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ . El estabilizador de un punto en  $C$  es  $V_4$ . Así que la imagen de la acción en  $C$  tiene 6 elementos, por lo que tiene que ser todo  $S_3$ .

4.  $R(\alpha \cdot \mathbf{z}) = R(\mathbf{z})$  para todo  $\alpha \in V_4$  y  $\mathbf{z} \in X$ .
5. Para una  $\mathbf{z} \in X$  fija define  $R_{\mathbf{z}} : S_4 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ ,  $R_{\mathbf{z}}(\sigma) = R(\sigma \cdot \mathbf{z})$ . Entonces  $R_{\mathbf{z}}(\sigma \alpha) = R_{\mathbf{z}}(\sigma)$  para todo  $\alpha \in V_4$ . Esto es,  $R_{\mathbf{z}}$  es constante en cada clase lateral derecha de  $V_4$  en  $S_4$ . Concluye que  $R_{\mathbf{z}} = \tilde{R}_{\mathbf{z}} \circ \pi$ , donde  $\pi : S_4 \rightarrow S_4/V_4$  es la proyección canónica y  $\tilde{R}_{\mathbf{z}} : S_4/V_4 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ .
6.  $R_{\mathbf{z}}(S_4) = \tilde{R}_{\mathbf{z}}(S_4/V_4)$ , por lo que tiene a lo más 6 puntos.
7. Escoge un representante  $\sigma$  para cada uno de los 6 elementos de  $S_4/V_4$  y calcula  $R(\sigma \cdot \mathbf{z})$  en términos de  $\lambda = R(\mathbf{z})$ .
- 8\* (Opcional) Encuentra un homomorfismo  $\rho : S_3 \rightarrow \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  (el grupo de transformaciones de Möbius) tal que  $R(\sigma \cdot \mathbf{z}) = \rho \tilde{\pi}(\sigma) R(\mathbf{z})$  para todo  $\sigma \in S_4$  y  $\mathbf{z} \in X$ , donde  $\tilde{\pi} : S_4 \rightarrow S_3$  es la composición de la proyección canónica  $S_4 \rightarrow S_4/V_4$  con el isomorfismo  $S_4/V_4 \rightarrow S_3$  del problema 3 arriba.
- 9\* (Opcional)  $R$  es invariante bajo la acción de  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  en  $X$ ,  $T \cdot \mathbf{z} = (T(z_1), \dots, T(z_4))$ . Concluye que  $R$  define una biyección  $S_4$ -equivariante  $X/\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$ .