

Tarea 6

(para entregar el 30 sept, 2026)

1. En este problema demostramos la Fórmula Integral de Cauchy de manera diferente a la que se ve normalmente en los libros de texto (como Ahlfors).

- a) Sea $F : [a, b] \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 (la restricción a $[a, b] \times (c, d)$ de una función continuamente diferenciable en un abierto en $\mathbb{R}^2$ que contiene a $[a, b] \times (c, d)$). Entonces

$$f(x) := \int_a^b F(t, x) dt$$

es diferenciable en (c, d) y

$$f'(x) = \int_a^b F_x(t, x) dt.$$

Sug. Sea $x_0 \in (c, d)$. Entonces para todo $x \in (c, d)$

$$F(t, x) - F(t, x_0) = \int_{x_0}^x F_x(t, s) ds.$$

Integra los dos lados con respecto a t sobre $[a, b]$ y usa Fubini, obteniendo

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x \left(\int_a^b F_x(t, s) dt \right) ds.$$

Ahora toma la derivada con respecto a x de los dos lados.

- b) Sea $F : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{C}$ una función C^1 , donde $U \subset \mathbb{C}$ es un abierto. Usa el inciso anterior para demostrar que

$$f(z) := \int_a^b F(t, z) dt$$

es diferenciable en U y que

$$f_{\bar{z}}(z) = \int_a^b F_{\bar{z}}(t, z) dt, \quad f_z(z) = \int_a^b F_z(t, z) dt.$$

Concluye que si $F(t, \cdot) : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en U para cada $t \in [a, b]$ entonces f es holomorfa y

$$f'(z) = \int_a^b F_z(t, z) dt.$$

- c) Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $D \subset \mathbb{C}$ un disco abierto tal que $\bar{D} \subset U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces para todo $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(u) du}{u - z}, \quad f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(u) du}{(u - z)^2}.$$

Concluye que f es n veces $\mathbb{C}$ -diferenciable, para todo $n \geq 1$, y que

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(u)du}{(u-z)^{n+1}}.$$

Sug. Para la 1era fórmula usa el Teorema de Stokes-Goursat para cambiar la integral sobre ∂D a la integral sobre el círculo $|u-z| = \epsilon$, luego toma el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Para la 2da fórmula, sea $c : [0, 1] \rightarrow \partial D$ una parametrización suave en contra las manecillas del reloj, y luego aplica el inciso anterior a la función

$$F(t, z) = \frac{f(c(t))c'(t)}{c(t) - z}.$$

Los siguientes problemas son teoremas que se encuentran en cualquier libro de análisis complejo. Intenta demostrarlos 1ero sin mirar los libros.

2. (El teorema de Morera) Si f es continua en un disco abierto D tal que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

para toda curva cerrada suave por pedazos en D entonces f es holomorfa.

3. (El principio de máximo) El valor absoluto de una función holomorfa no constante en un abierto conexo $U \subset \mathbb{C}$ no alcanza su máximo en U .
4. (El teorema de mapeo abierto) Si f es holomorfa no constante en un abierto conexo $U \subset \mathbb{C}$ entonces $f(U)$ es abierto para todo abierto $V \subset U$.
5. Formula y demuestra el Teorema de Casorati-Weierstrass.