Tarea núm. 7

(para el 6 oct, 2026)

Parte I: el grupo $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$**.**

Resolver 5 de los siguientes 8 problemas. Opcional: resolver todos.

1. Toda $f \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, $f \neq id$, tiene 1 o 2 puntos fijos en $\widehat{\mathbb{C}}$.

   Sug. Usa que $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ son las transformaciones de Möbius, $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$.

2. Si $f_1, f_2 \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ son conjugadas, es decir, existe una $g \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $g \circ f_1 \circ g^{-1} = f_2$, entonces tienen el mismo número de puntos fijos; de hecho, z_1 es un punto fijo de f_1 ssi $z_2 := g(z_1)$ es un punto fijo de f_2. Además, $f_1'(z_1) = f_2'(z_2)$.

   Nota. Si ∞ es un punto fijo de una $f \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ se define $f'(\infty) := \tilde{f}'(0)$, donde $\tilde{f}(w) := 1/f(1/w)$.

3. Toda $f \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, $f \neq id$, es conjugada a (i) $z \mapsto z + c$, $c \neq 0$, o (ii) $z \mapsto cz$, $c \neq 0, 1$. Encuentra los puntos fijos en cada caso.

   Resp. (i) ∞, (ii) $0, \infty$.

   Sug. Usa el teorema de Jordan: toda matriz compleja 2×2 es conjugada a una matriz de la forma (i) $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, o (ii) $\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$.

   Definición. En caso (i) f se llama *parabólica*; en caso (ii) f se llama *elíptica* si $|c| = 1$, e *hiperbólica* si $|c| \neq 1$ (o *laxodrómica*, en algunos textos).

4. Si f es parabólica, con punto fijo z_0, entonces $f'(z_0) = 1$ y

$$\lim_{n \to \pm\infty} f^n(z) = z_0$$

   para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$.

   Nota. Para $n > 0$, f^n significa f compuesta con su misma n veces y $f^{-n} := (f^{-1})^n$.

5. Si f es elíptica o hiperbólica, con puntos fijos $z_\pm$, entonces $f'(z_+)f'(z_-) = 1$.

6. Si f es elíptica, con puntos fijos $z_\pm$, entonces $|f'(z_+)| = |f'(z_-)| = 1$.

7. Si f es hiperbólica, con puntos fijos $z_\pm$, entonces $|f'(z_\pm)| \neq 1$. Si $|f'(z_+)| < 1 < |f'(z_-)|$ entonces

$$\lim_{n \to \pm\infty} f^n(z) = z_\pm$$

   para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_+, z_-\}$.

   Sug. En problemas 4-7, usando 2-3, basta considerar los casos (i)-(ii) del 3.

8. Usamos el isomorfismo $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{I, -I\}$ para definir una topología en $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$. Demuestra que en esta topología la unión de las transformaciones elípticas e hiperbólicas es un subconjunto abierto y denso en $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$.

   Sug. $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ determina una transformación de Möbius parabólica o la identidad ssi $\mathrm{tr}(A) = \pm 2$.

Parte II. Resolver 2 de los siguientes 5 problemas. Opcional: resolver todo.

9. Demuestra que $f(z) = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ define un biholomorfismo $\mathrm{D} \cap \mathrm{H} \to \mathrm{H}$, donde $\mathrm{D} := \{|z| < 1\}$, $\mathrm{H} := \{\mathrm{Im(z)} > 0\}$.

   Sug. La ecuación $f(z) = w$ se reduce a la ecuación cuadrática $z^2 + 2wz + 1 = 0$, con dos raices distintas cuando $w \neq \pm 1$.

10. Sea $f : \mathrm{H} \to \mathrm{D}$ holomorfa con $f(i) = 0$. Demuestra que

$$|f(z)| \leq \left|\frac{z - i}{z + i}\right|$$

    para todo $z \in \mathrm{H}$.

    Sug. Usar el Lemma de Schwarz.

11. Sea $f : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ holomorfa. Entonces para todo $z \in \mathrm{D}$

$$\left|\frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)} f(z)}\right| \leq |z|.$$

    Sug. Usar el Lemma de Schwarz.

12. Si $f : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ es holomorfa con dos puntos fijos entonces $f = id$.

    Sug. Si 0 es un punto fijo usa el Lemma de Schwarz. Si $z_0 \neq 0$ es un punto fijo existe una $g \in \mathrm{Aut(D)}$ tal que $g(z_0) = 0$; luego 0 es un punto fijo de $g \circ f \circ g^{-1}$.

13. Cierto o Falso: toda función holomorfa $f : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ tiene un punto fijo.