

Tarea núm. 8

(para el 13 oct, 2026)

1. Hacer los problemas de la [tarea 7](#) que no has hecho.
2. Demuestra que $p : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto z^2$, es un recubrimiento.
Nota. Ver la definición en algun libro, eg [Munkers](#) (p 336), [Hatcher](#) (p 29), o [Wikipedia](#).
3. Demuestra que $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \cong \mathbb{Z}$, generado por $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*, \gamma[t] = e^{2\pi it}$.
4. Demuestra que $p_* : \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$ está dado, usando el isomorfismo del inciso anterior, por $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto 2n$.
5. Sea $U \subset \mathbb{C}^*$ un abierto conexo, $z_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ continuo, tal que $f(z_0) = 1$. Demuestra:
 - (a) Existe una función continua $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $(\tilde{f}(z))^2 = f(z)$ para todo $z \in U$ ssi $f_*\pi_1(U, z_0) \subset 2\mathbb{Z}$.
Sug. Usar el “lifting lemma”, en [Munkers](#) (p 478), [Hatcher](#) (p. 132), o [aquí](#).
 - (b) Si f es holomorfa entonces $\tilde{f}$ tambien.
 - (c) En particular, si $U \subset \mathbb{C}^*$ es simplemente conexo entonces existe una función holomorfa $\rho : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $[\rho(z)]^2 = z$ para todo $z \in U$.
Sug. Aplicar los dos incisos anteriores a $f(z) = z$.