

Tarea núm. 9

(para el lunes 26 oct, 2026)

1. Sea $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a una función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Demuestra

a) f es continua.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 f(t) dt.$

c) La conclusión del inciso anterior no es cierta, en general, si la convergencia $f_n \rightarrow f$ es meramente puntual. O sea, encontrar una sucesión de funciones continuas f_n en $[0, 1]$ que converge puntualmente a una función continua f , y tal que $\int f_n$ no converge a $\int f$.

Sug. Sea $f_n(x) = n^2 x$ para $0 \leq x \leq 1/n$, $f_n(x) = 2n - n^2 x$ para $1/n \leq x \leq 2/n$ y $f_n(x) = 0$ para $2/n \leq x \leq 1$.

2. Para un subconjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$ sea $C(K)$ el conjunto de las funciones continuas $K \rightarrow \mathbb{C}$. Dada una $f \in C(K)$, se define $\|f\| := \max\{|f(z)| \mid z \in K\}$. Demuestra: si $\{f_n\} \subset C(K)$ y $f \in C(K)$ entonces $f_n \rightarrow f$ uniformemente ssi $\|f_n - f\| \rightarrow 0$.

3. Sean $f_n(z) = 1 + z + \dots + z^n$, $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Demuestra que

a) $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $\overline{D}_r := \{|z| \leq r\}$, para todo $0 < r < 1$.

Sug. Para todo $z \in \overline{D}_r$, $|f(z) - f_n(z)| = |z^{n+1}/(1-z)| \leq r^{n+1}/(1-r) \rightarrow 0$.

b) $f_n \rightarrow f$ uniformemente en cada subconjunto compacto $K \subset D$.

Sug. Demuestra que $K \subset \overline{D}_r$ para algun $0 < r < 1$.

4. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones holomorfas que converge uniformemente en subconjuntos compactos de U a una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Demuestra:

a) f es holomorfa.

b) $f'_n \rightarrow f'$ (convergencia uniforme en subconjuntos compactos).

5. Dar ejemplo de una sucesión de funciones diferenciables $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tales que $f_n \rightarrow f$ uniformemente, pero

a) f no es diferenciable.

b) f es diferenciable pero f'_n no converge a f' .

c) (Opcional) Cierto o Falso: si f es diferenciable, f'_n converge uniformemente, entonces $f'_n \rightarrow f'$ uniformemente.