# TEORÍA DE NÚMEROS – TAREA 1

PARA ENTREGAR EL JUEVES 31 DE ENERO

1. Calcula el máximo común divisor de 455 y 1235 a mano.
2. Calcula el $\mathrm{mcd}(323, 437)$ con el algoritmo de Euclides.
3. Calcula el máximo común divisor de
$$31415926535897932384626433 8$$
y
$$2718281828459045235360287 47.$$
4. Demuestra que si $a \mid n$, $b \mid n$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$ entonces $ab \mid n$.
5. Números de Mersenne y números perfectos.
   *a*) El $n$-ésimo número de Mersenne es $M_n = 2^n - 1$. Demuestra que si $M_n$ es primo, entonces $n$ debe ser primo.
   *b*) Un entero positivo $N$ se llama *perfecto* si la suma de sus divisores propios es igual a $N$. Por ejemplo, los divisores de 28 son $1, 2, 4, 7, 14$ y su suma es 28, así que 28 es perfecto. Demuestra que si $M_n$ es primo, entonces $2^{n-1}M_n$ es perfecto.
   *c*) Encuentra un número perfecto impar. (Problema abierto.)
6. Sean $m, n$ enteros diferentes de cero. Muestra que
$$\mathrm{mcd}(m, n) = \prod_{p \text{ primo}} p^{\text{mín}(\mathrm{ord}_p(m), \mathrm{ord}_p(n))}.$$
7. Muestra que si $a, b, c, n$ son enteros positivos con $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$ y $ab = c^n$, entonces existen enteros positivos $x, y$ tales que $a = x^n, b = y^n$. (Muestra que para todo primo $p$, $n \mid \mathrm{ord}_p(a), \mathrm{ord}_p(b)$.)
8. Encuentra todas las soluciones enteras a las siguientes ecuaciones:
   *a*) $x^2 + y^2 = 100$.
   *b*) $x^2 - y^2 = 8$.
   *c*) $a! + b! = c!$.