TEORÍA DE NÚMEROS – TAREA 6

PARA ENTREGAR EL JUEVES 11 DE ABRIL

1. Decide de entre los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Z}^2$ cuáles son retículas, y si lo son calcula su índice.
   a) $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x + y = 1\}$,
   b) $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x + y = 0\}$,
   c) $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 2 \mid x\}$,
   d) $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x \equiv y \pmod{3}\}$,
   e) $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x \equiv y \pmod{3}, \quad x \equiv 2y \pmod{5}\}$.
2. Decide de entre los siguientes conjuntos cuáles son convexos y cuáles son simétricos.
   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\}$,
   b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 < 1\}$,
   c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 5y^2 + 7z^2 < 1\}$,
3. Sea p un primo impar tal que -2 es un residuo cuadrático módulo p. Muestra que hay enteros x, y tales que $x^2 + 2y^2 = p$.
4. Encuentra un primo impar p tal que -5 es un residuo cuadrático módulo p, pero que no es de la forma $x^2 + 5y^2$ con $x, y \in \mathbb{Z}$.
5. Sea $p \equiv 1 \pmod{3}$ primo. Muestra que existe $f \in \mathbb{Z}$ tal que $f^2 + f + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ (**Sugerencia.** Usa una raíz primitiva). Muestra que $p = x^2 + xy + y^2$ para algunos $x, y \in \mathbb{Z}$ (**Sugerencia.** Usa el teorema de Minkowski).