Cálculo estocástico.

Asumiremos que nuestras v.a. están definidas en un espacio de prob. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Vectores Gaussianos:

X es una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad \mu \in \mathbb{R}, \ \sigma \in \mathbb{R}_+$

si

- $$\mathbb{P}[X \in A] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) f_X(x) dx \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

$$f_X(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \right\}$$

- Alternativamente:

$$\forall \ \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}[e^{i\lambda X}] = e^{i\lambda\mu} e^{-\frac{\sigma^2}{2}x^2}$$

Más generalidad:

Si $X_1, \dots, X_d$ son v.a. decimos que $(X_1, \dots, X_d)$ es un vector gaussiano si

$\forall \quad \xi_1, \dots, \xi_d \in \mathbb{R}$,

$\xi_1 X_1 + \dots + \xi_d X_d$ tiene distribución Gaussiana.

Ejemplo:

Si $X_1, \dots, X_d$ son v.a. Gaussianas estandar independientes

¿es $(X_1, \dots, X_d)$ un vector Gaussiano? Si, pues.

Para analizar el problema estudiamos

$Y = \xi_1 X_1 + \cdots + \xi_d X_d$ ← ¿es una v.a. normal?

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda Y}] = \mathbb{E}[e^{i\lambda(\xi_1 X_1 + \cdots + \xi_d X_d)}]$$

$$= \mathbb{E}[e^{i\lambda \xi_1 X_1 + \cdots + i\lambda \xi_d X_d}]$$

$$= \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{d} e^{i\lambda \xi_j X_j}\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \mathbb{E}[e^{i\lambda \xi_j X_j}]$$

$$= \prod_{j=1}^{d} e^{-\frac{(\lambda \xi_j)^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 \left(\sum_{j=1}^{d} \xi_j^2\right)}$$

$\Rightarrow Y \sim \text{Normal} \Rightarrow (X_1, \dots, X_d)$ es un vector gaussiano.

Itempool:

Intuición incorrecta:

X, Y Gaussianas.

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$$

- Si (X,Y) es un vector Gaussiano, entonces si $\mathbb{E}[XY] = 0$, X es indep de Y.
- Pero si no es vector conjuntamente Gaussiano, $\mathbb{E}[XY] = 0 \neq X \perp Y$

contraejemplo:

$X \sim N(0,1)$ $\quad$ ξ es una v.a con ley

$Y = \xi X$, $\quad$ $\mathbb{P}[\xi = -1] = \mathbb{P}[\xi = 1] = \frac{1}{2}$

con $\xi \perp X$.

Tarea: ver que Y es v.a. Gaussiana estándar.

Ley de un vector Gaussiano:

$\vec{X} := (X_1, \ldots, X_d) \leftarrow$ mapeo de $\Omega \to \mathbb{R}^d$

Teorema:

Si $\vec{X}$ es un vector Gaussiano, con matriz de covarianzas no degenerada, entonces

transpuesta de x

$$\mathbb{P}[\vec{X} \in A] = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(x) \exp\left\{ -\frac{1}{2} (x-\mu)^{*} \Sigma^{-1} (x-\mu) \right\} dx$$

Para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. donde

$$\Sigma = (\Sigma_{i,j} \; ; \; 1 \le i,j \le d). \quad \Sigma_{i,j} := \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$$

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d) = (\mathbb{E}[X_1], \ldots, \mathbb{E}[X_d]).$$

Prueba de la clase:

Lemma: $\vec{X} \overset{ley}{=} \mu + \Sigma^{1/2} \vec{Z}$ $\qquad \vec{Z} = (Z_1, \ldots, Z_d)$,

Como Σ es no degenerada y positive definida, puedo sacar raiz

con $\{Z_i\}_{i \le d}$ i.i.d. $Z_1 \sim N(0,1)$.

Entonces, $\vec{X}$ tiene densidad, que por cambio de variable, es

$$f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_d) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} (x-\mu)^{*} \Sigma^{-1} (x-\mu) \right\}$$

Prueba alternativa:

Por cambio de variable, la función característica asociada a

$$g(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(x-\mu)^* \Sigma^{-1} (x-\mu) \right\}$$

es

$$\vec{\lambda} \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\vec{\lambda}\cdot x} g(x)\, dx =*$$

$$\left(\Sigma^{-1/2}(x-\mu)\right)^* \left(\Sigma^{-1/2}(x-\mu)\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\vec{\lambda}\cdot x} \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(x-\mu)^* \Sigma^{-1} (x-\mu) \right\} dx$$

cambiamos x por $y = \Sigma^{-1/2}(x-\mu)$ y obtenemos

$$* = \exp\{ i\vec{\lambda}\cdot\mu \} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \lambda^+ \Sigma \lambda \right\}.$$

Coincide ésta con la función característica de $(X_1, \dots, X_d)$:

$$\vec{\lambda} \longmapsto \mathbb{E}\left[e^{i\lambda_1 X_1 + \dots + i\lambda_d X_d} \right] = *$$

como $Y := \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_d X_d$ es vector Gaussiano

$$* = \mathbb{E}\left[e^{iY} \right] = e^{i\mathbb{E}[Y] - \frac{1}{2}\mathrm{Var}[Y]}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \vec{\lambda} \cdot \mu$$

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}[((\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_d X_d) - (\lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_d \mu_d))^2]$$

$$= \mathbb{E}[(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_d X_d)^2] - (\lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_d \mu_d)^2$$

$$= \lambda_1^2 \mathbb{E}[X_1^2] + \cdots + \lambda_d^2 \mathbb{E}[X_d^2]$$

$$+ 2 \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j \mathbb{E}[X_i X_j]$$

$$- (\lambda_1^2 \mu_1^2 + \cdots + \lambda_d^2 \mu_d^2)$$

$$- 2 \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j \mu_i \mu_j$$

$$= \lambda_1^2 \mathrm{Var}[X_1] + \cdots + \lambda_d^2 \mathrm{Var}[X_d] = \vec{\lambda}^* \Sigma \vec{\lambda}$$

$$+ 2 \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j \mathrm{Cov}[X_i, X_j]$$

Pregunta itempool:

El contraejemplo

simétrica

$X \sim N(0,1)$.

$Y = \xi X$, $\quad \xi \sim \mathrm{Ber}\left(\frac{1}{2}, \{-1, 1\}\right)$.

funciona; pues

$$X + Y = (1+\xi) X \quad \text{y}$$

$$\mathbb{P}[X+Y=0] \geq \mathbb{P}[\xi = -1] = \frac{1}{2}$$

Ruido blanco

Lemma:

Si X es un vector Gaussiano, su ley está determinada por su media $\mu = \mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])$

$(X = (X_1, \dots, X_d))$

y su matriz de covarianza $\Sigma = [\Sigma_{ij}]$

con $\Sigma_{i,j} := \operatorname{Cov}[X_i, X_j]$.

Nota "curiosa"

Si $l: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal la forma general para l es

$l(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \cdot x$

$x = (x_1, \dots, x_d)$ Para ciertos $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$

En este contexto, X es un vector en $\mathbb{R}^d$ es gaussiano si $l(X)$ es v.a. gaussiana

Ruido blanco:

Consideremos el espacio

$H = L^2([0,1]; \mathbb{R})$, es decir

$f \in H$ si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ t.q.

$\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$

Definición:

Un mapeo $G: H \to L^2(\Omega)$ es un ruido blanco si

- $G(f)$ es una v.a. Gaussiana centrada $\forall\ f \in H$
- $\mathbb{E}[G(f)\, G(h)] = \langle f, h \rangle_H := \int_0^1 f(x) h(x) dx$

Recordar que si X es un vector gaussiano con media cero y covarianza I_d

y $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d)$

$\mathbb{E}[(\lambda \cdot X) \times (\eta \cdot x)] = \lambda \cdot \eta$ $= \lambda^* \Sigma \eta$

Nota:

Esta construcción se puede generalizar

1.:) $L^2([0,1];\mathbb{R})$ puede reemplazarse

por $\mathcal{H} := L^2(E;\mathbb{R})$

$(E, \mathcal{B}(E), \mu)$ ← un espacio de medida

E es un métrico separable.

El ruido blanco se define como

- $G(f)$ es gaussiano centrado $\forall f \in \mathcal{H}$
- $\mathbb{E}[G(f)G(h)] = \langle f,h\rangle_{\mathcal{H}} = \int_E f(x)h(x)\mu(dx)$.

Otra generalización:

"Definir $\mathcal{H}^0$ como un espacio de funciones escalonadas

$$\mathcal{H}^0 = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{I_k} \quad a_k \in \mathbb{R},\ I_k \leftarrow \text{intervalos} \right\}$$

Definimos $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathcal{H}^0}$ mediante

$$\langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle_{\mathcal{H}^0} := R(s,t) \leftarrow \text{"función de covarianza"}$$

$\mathcal{H} :=$ cerradura de $\mathcal{H}^0$ respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}^0}$

(ver libro libro de Peccati-Nourdin).

De regreso al ruido blanco.

Pregunta natural: ¿existe un ruido blanco?

ingredientes que tenemos

1.:) $\mathcal{H} = L^2([0,1];\mathbb{R})$

2.:) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

3.:) $G: \mathcal{H} \to L^2(\Omega)$ ← $G: \mathcal{H} \to L^2(\Omega)$.

$$\Updownarrow$$

$$G = \{G_h\}_{h \in \mathcal{H}}$$

Recordar que si X es un vector gaussiano en $\mathbb{R}^d$ con entradas i.i.d $\sim N(0,1)$.

$\{X_i\}_{1\le i\le d}$ ← v.a.i.i.d $\sim N(0,1)$

$$X = \sum_{i=1}^{d} e_i X_i \qquad e_i = (0,..0,\overset{\text{componente } i}{1},0,...)$$

Pregunta natural: ¿existe un ruido blanco?

Respuesta: sí! pues se puede construir G de la siguiente manera

1:) Sea $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $L^2([0,1];\mathbb{R})$. ← • Usar base de Fourier

• Usar funciones de Haar.

2:) $\exists$ una elección de v.a. $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ i.i.d $\sim N(0,1)$.

3:) Si $h \in H = L^2([0,1];\mathbb{R})$.

$\Rightarrow \quad h = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i \qquad (\alpha_j = \langle h, f_j \rangle$

$= \int_0^1 h(x) f_j(x)dx)$

$$G(h) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i$$

↑ juegan el rol de $G(f_i)$.

(las cuales tienen propiedades análogas a las X_i).

Necesitamos ver que

$$G(h) := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i \quad \text{converge}$$

en $L^2(\Omega)$. Para esto basta ver que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ es de Cauchy

Prueba (sketch): si $n, m \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$= \left\| \sum_{i=n\wedge m}^{n\vee m} \alpha_i X_i \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leftarrow \text{se puede calcular fácil}$$

$$= \sum_{i=n\wedge m}^{n\vee m} \alpha_i^2 \leq \sum_{i=n\wedge m}^{\infty} \alpha_i^2 \xrightarrow{n\wedge m\to\infty} 0$$

pues $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i^2 < \infty$

La covarianza es lo correcto?

$\mathbb{E}[G(f)G(h)]$

$= \mathbb{E}[G(\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,f_i\rangle_{H} f_i)\, G(\sum_{j=1}^{\infty}\langle h,f_j\rangle_{H} f_j)]$

$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\langle f,f_i\rangle_{H}\langle h,f_j\rangle_{H}\, \underbrace{\mathbb{E}[G(f_i)G(f_j)]}_{=\langle f_i,f_j\rangle=\delta_{i,j}}$

checar

$= \sum_{i=1}^{\infty}\langle f,f_i\rangle_{H}\langle h,f_i\rangle_{H}$

$\mathbb{E}[G(f_i)G(f_j)] = \delta_{i,j}$

$= \langle \sum_{i=1}^{\infty}\langle f,f_i\rangle_{H} f_i, \sum_{j=1}^{\infty}\langle h,f_j\rangle_{H} f_j\rangle_{H}$

$= \langle f,h\rangle_{H}$

Evidentemente $\mathbb{E}[G(f)]=0 \quad \forall f\in H$

$\blacksquare$

Movimiento Browniano

Definiremos un poceso $B=\{B_t\}_{t\in[0,1]}$ a partir del ruido blanco.

Si G es un ruido blanco y $A\in\mathcal{B}([0,1])$,

$G(\mathbb{1}_A)$ es una v.a. Gaussiana centrada.

Más aún, si $A,B\in\mathcal{B}([0,1])$ y

A,B son ajenos (pensar en $A=[0,s]$, $B=[s+\varepsilon, s+\varepsilon+\delta]$)

$G(\mathbb{1}_A)$ y $G(\mathbb{1}_B)$ son independientes:

$\mathbb{E}[G(\mathbb{1}_A)G(\mathbb{1}_B)] = \langle \mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B\rangle_{H} = \int_0^1 \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)\,dx = 0$

Definimos, para $s \in [0,1]$,

$B_s := G(\mathbb{1}_{[0,s]})$.

Diremos que $B = \{B_s \,;\, s \in [0,1]\}$ es un movimiento pre-Browniano.

Propiedades

- $\forall\ s_1, \dots, s_d \in \mathbb{R}_+$, y $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 B_{s_1} + \dots + \lambda_d B_{s_d}$ es una varia Gaussiano centrado. (i.e. $(B_{s_1}, \dots, B_{s_d})$ es un vector Gaussiano).

(justificación:

$$\lambda_1 B_{s_1} + \dots + \lambda_d B_{s_d} = \lambda_1 G(\mathbb{1}_{[0,s_1]}) + \dots + \lambda_d G(\mathbb{1}_{[0,s_d]})$$
$$= G(\lambda_1 \mathbb{1}_{[0,s_1]} + \dots + \lambda_d \mathbb{1}_{[0,s_d]}) \sim \text{Normal})$$

- $\forall\ 0 \leq s < t \leq 1$,

$$B_t - B_s \sim N(0, t-s)$$

(justificación:

$$B_t - B_s = G(\mathbb{1}_{[0,t]}) - G(\mathbb{1}_{[0,s]})$$
$$= G(\mathbb{1}_{(s,t]}) \sim N(0, \|\mathbb{1}_{(s,t]}\|^2_{L^2([0,1];\mathbb{R})})$$
$$= N(0, \underbrace{\int_0^1 \mathbb{1}_{(s,t]}(u)\, du}_{t-s})$$

- $0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_d$, entonces

$B_{s_0}, B_{s_1} - B_{s_0}, B_{s_2} - B_{s_1}, \dots, B_{s_d} - B_{s_{d-1}}$ son v.a. independientes

$H \leftarrow$ Hilbert. Con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$

$X : \Omega \to H$

Ingrediente extra: $Q : H \to H$ no negativa definida.

$\langle f, h \rangle_Q := \langle f, Qh \rangle_H$

$\mu \leftarrow$ medida en H es una medida Q-Gaussiana centrada si

$(H, \mu) \to \mathbb{R}$

$h \to \ell(h)$ es una v.a. gaussiana centrada $\forall\ \ell : H \to \mathbb{R}$ func. lineal.

Ver libro de Da - Prato.

Teorema:

Si Q satisface cierta condición; entonces $\exists$ una medida Q-Gaussiana

---

Nota:

Si $X \sim F_X(dx) \leftarrow F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$.

$F^{-1}(y) := \inf\{u \in \mathbb{R}$ t.q. $F(u) \geq y\}$,

entonces

Si $U \sim \text{Unif}(0,1)$,

$F^{-1}(U) \sim$ Distribución F:

$\mathbb{P}[F^{-1}(U) \leq x] = \mathbb{P}[U \leq F(x)] = F(x)$

Kallenberg & Pawitan

Ruido blanco:

$G: \mathcal{H} \longrightarrow L^2(\Omega) \qquad \mathcal{H} = L^2[[0,1]; \mathbb{R}]$

Usamos muchas veces que G era lineal.

$\mathbb{E}[G(h)G(f)] = \langle h, f \rangle_{\mathcal{H}}$

Lemma:

G es lineal

prueba (sketch)

Queremos ver que si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $h, f \in \mathcal{H}$

$$G(\lambda_1 h + \lambda_2 f) - \lambda_1 G(h) - \lambda_2 G(f) = 0 \ ? \quad \circledast$$

Pra probar $\circledast$ sacamos

$$\| G(\lambda_1 h + \lambda_2 f) - \lambda_1 G(h) - \lambda_2 G(f) \|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= -2\mathbb{E}[G(\lambda_1 h + \lambda_2 f)\lambda_1 G(h)] + \mathbb{E}[G(\lambda_1 h + \lambda_2 f)^2]$$

$$- 2\mathbb{E}[G(\lambda_1 h + \lambda_2 f)\lambda_2 G(f)] + \lambda_1^2 \mathbb{E}[G(h)^2]$$

$$+ 2\mathbb{E}[\lambda_1 G(h)\lambda_2 G(f)] + \lambda_2^2 \mathbb{E}[G(f)^2] = \dots = 0$$

Pre-mov Browniano

$$B_t := G(\mathbb{1}_{[0,t]}) \quad (*) \qquad \mathbb{1}_{[0,t]} \in L^2([0,1];\mathbb{R})$$

Propiedades:

B_t definido como en $(*)$ es un proceso Gaussiano con media cero y covarianza

$$R(s,t) := \mathbb{E}[B_s B_t] = s \wedge t.$$

prueba:

$$\mathbb{E}[B_s B_t] \underset{t>s}{=} \mathbb{E}[G(\mathbb{1}_{[0,s]})\, G(\mathbb{1}_{[0,t]})]$$

checar

$$= \langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle_H \overset{\downarrow}{=} s \wedge t \quad \blacksquare$$

Teorema:

Un proceso $X = \{X_t\}_{t\in[0,1]}$ tiene la misma ley que B (i.e. $\forall\ t_1,\dots,t_d \in [0,1]$, $(X_{t_1},\dots,X_{t_d}) \overset{\text{ley}}{=} (B_{t_1},\dots,B_{t_d})$). sii alguna de las siguientes condiciones se cumple

i) X es un proceso Gaussiano centrado y $\mathbb{E}[X_s X_t] =: R(s,t) = s \wedge t$.

ii) $X_0 = 0$ c.s. y $\forall\ s<t$, $X_t - X_s \sim N(0, t-s)$ y $X_t - X_s$ es independiente de $\sigma(X_u\ ;\ u\leq s)$.

iii) $X_0 = 0$ c.s. y $\forall\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_d$, las variables $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_d} - X_{t_{d-1}}$ son indepentes con ley $X_t - X_s \sim N(0, t-s)$, $s<t$.

Probar esto de tarea

Pequeño hint para el inciso ii).

Suponer que X es un proceso Gaussiano centrado, con covarianza $R(s,t) = t \wedge s$.

Queremos probar que:

$\forall \quad A \in \sigma(B_u \,;\, u \leq s)$ y $\forall \quad \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada (recordar que $s < t$)

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \psi(B_t - B_s)] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{E}[\psi(B_t - B_s)] \quad (*)$$

Basta probar $(*)$ para el caso en que $A \in \mathcal{C} \subset \sigma(B_u \,;\, u \leq s)$, con $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(B_u \,;\, u \leq s)$, y t.q. $\mathcal{C}$ es cerrado bajo intersecciones. Candidato para $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = \left\{ \{B_{u_1} \leq x_1\} \cap \dots \cap \{B_{u_d} \leq x_d\} \;;\; \begin{matrix} u_i \in [0,s] \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}.$$

Si $\quad A = \{ B_{u_1} \leq x_1 \} \cap \cdots \cap \{ B_{u_d} \leq x_d \}$,

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \psi(B_t - B_s)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \psi(B_t - B_s) \mid B_{u_1}, \dots, B_{u_d}]]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{E}[\psi(B_t - B_s) \mid B_{u_1}, \dots, B_{u_d}]]$$

Sabemos que B_u es un proceso Gaussiano

$\Rightarrow$ $B_t - B_s$ es indep. de $B_{u_1}, \dots, B_{u_d}$

$\uparrow$

- $(B_{u_1}, \dots, B_{u_d}, B_t - B_s) \leftarrow$ vector Gaussiano.
- Usaríamos que si (V, W) es un vector Gaussiano centrado,

  $\mathbb{E}[WV] = 0 \Rightarrow V$ es indep. de W.

El resto queda de tarea.

Nota: Suponer que $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_d$.

$(B_{t_1}, \ldots, B_{t_d})$ es un vector Gaussiano centrado. (se puede ver que es no degenerado)

¿Cuál es la densidad de dicho vector?

la densidad

$p(x_1, \ldots, x_d) \leftarrow$ densidad de $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_d})$

se determina mediante las covarianzas. La fórmula es

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{t_1(t_2-t_1)\cdots(t_d-t_{d-1})}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{d} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right\}$$

Propiedades adicionales:

Si $X \overset{ley}{=} B$. Entonces se cumple que

i) $-X \overset{ley}{=} X$ (simetría)

ii) $\forall\ \lambda > 0$, el proceso $X^\lambda = \{X_t^\lambda\}_{t \in [0,1]}$

$X_t^\lambda := \frac{1}{\lambda} X_{\lambda^2 t}$ satisface $X^\lambda \overset{ley}{=} X$

(autosimilitud)

iii) $\forall \; s \geq 0, \quad B_t^{(s)} := B_{t+s} - B_s$

es un movimiento Browniano es independiente de $\sigma(B_u; \; u \leq s)$ (Propiedad de Markov simple)

Propiedades de las trayectorias

Definición:

El mapeo

$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto X_t(\omega)$$

se conoce como la "trayectoria del proceso X.

para $\omega \in \Omega$ dada

hasta el momento, no sabemos mucho de la "trayectoria" de un mov. pre-browniano.

Definición: $I \subset \mathbb{R}_+$ un intervalo

Considerar procesos $X = \{X_t ; t \in I\}$ y $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t ; t \in I\}$

Decimos que X es una modificación de $\hat{X}$ si $\forall$ $t \in I$, $\mathbb{P}[X_t = \tilde{X}_t] = 1$.

Pregunta de Itempool.

Problema: la igualdad

$\mathbb{P}[X_t = \tilde{X}_t] = 1$ se cumple para t dado.

sii $X_t(w) = \tilde{X}_t(w)$ para $w \in \Omega_t$ t.q. $\mathbb{P}[\Omega_t] = 1$.

Contraejemplo:

$$X_t = 0 \quad \forall \quad t \in [0,1].$$

$$Y_t = \begin{cases} X_t & \text{si} \quad t \neq U \\ 1 & \text{si} \quad t = U \end{cases}$$

$U \sim \text{Unif}(0,1)$. Ahora, $\forall$ t $[0,1]$,

$$\mathbb{P}[X_t \neq Y_t] = \mathbb{P}[U = t] = 0$$

Definición:

$X = \{X_t\}_{t\in I}$ y $\widehat{X} = \{\widehat{X}_t\}_{t\in I}$ son procesos indistinguibles si $\exists$ $N \subset \Omega$ t.q. $\mathbb{P}[N] = 0$ t.q. $\forall$ $\omega \in \Omega \setminus N$, y $\forall$ $t \in I$,

$$X_t(\omega) = \widehat{X}_t(\omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}[X_t = \widehat{X}_t \quad \forall \quad t \in I] = 1$$

Nota: Las definiciones tienen sentido cuando los procesos toman valores en un espacio métrico separable (E, d).

Propiedades trayectoriales

$X \leftarrow \quad X = \{X_t\}_{t \in I}$ es un proceso estocástico

Hipótesis:

- $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo acotado
- X toma valores en un espacio métrico completo y separable
- $\exists$ constantes $q, \varepsilon, C > 0$, t.q.

$$\mathbb{E}\left[d(X_s, X_t)^q \right] \leq C|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Entonces $\exists \; \tilde{X} = \{\tilde{X}_t\}_{t \in I}$ t.q. $\tilde{X}$ es una modificación de X, definido en

$(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$, t.q. $\forall \; \alpha \in \left(0, \frac{\varepsilon}{q}\right)$,

$\exists \; \Omega_\alpha \in \tilde{\mathcal{F}} \quad \mathbb{P}[\Omega_\alpha] = 1$

$$|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)| \leq C(\omega)|t-s|^{\alpha} \qquad \forall \quad \omega \in \Omega_\alpha.$$

$\uparrow$

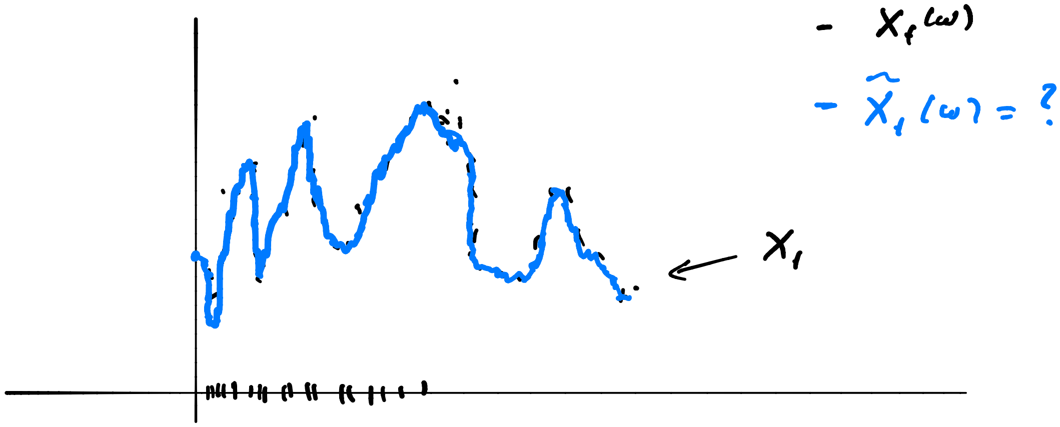
Hölder continuidad de orden α.

Este resultado se conoce como teorema de continuidad de Kolmogorov.

prueba:

Intuición:

$\tilde{X}_t(\omega) \overset{?}{=} X_t(\omega)$ para "muchos" valores de t



Heurística:

Sea D un conjunto "grande" $D \subset I$ que definiremos más tarde: Queremos definir $\tilde{X}$ de la siguiente manera:

$$\tilde{X}_t = \begin{cases} X_t & \text{si } t \in D \\ \lim\limits_{\substack{s \to t \\ s \in D}} X_s & \text{si } s \notin D \end{cases}$$

← ésto es sólo heurístico

Problema de ésta definición:

$\lim\limits_{\substack{s \to t \\ s \in D}} X_s$ sólo está bien definido en un conjunto de probabilidad 1.

Formalización:

Paso 1: Considerar el proceso $t \to X_t$, pero restringido a $t \in D$

$D = \{\text{diádicos en } I\} = \{s \in I \,;\; s = i \cdot 2^{-n},\ i \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\}$

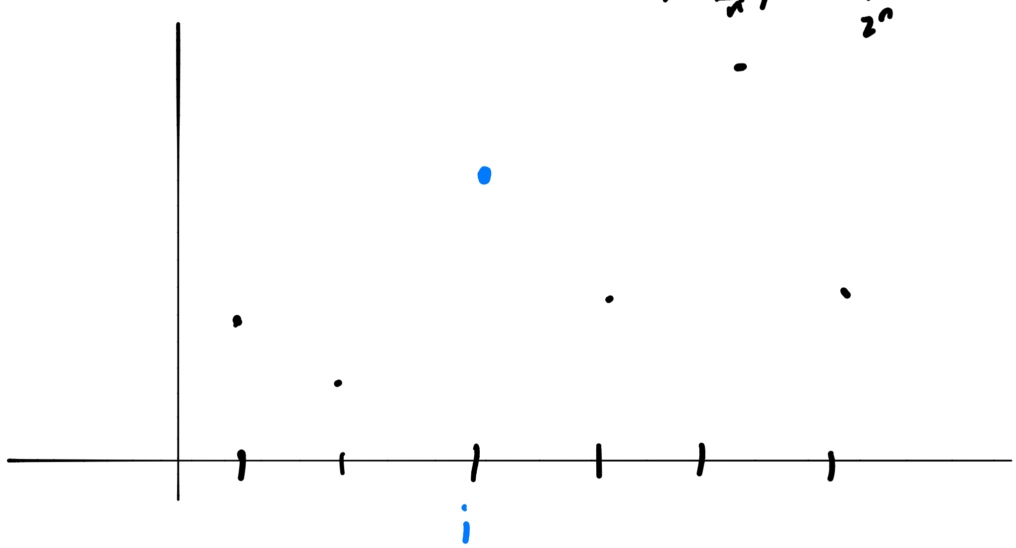
Veremos que $D \to \mathbb{R}$ es Hölder continuo
$t \mapsto f$

de orden $\alpha \in (0, \frac{\varepsilon}{q})$ con probabilidad 1, es decir, $\exists\ \Omega_\alpha \in \mathcal{F}$ t.q. $\forall\ \omega \in \Omega_\alpha$

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq C(\omega)\,|t-s|^\alpha \quad \text{p.a.} \quad C(\omega) \in \mathbb{R}$$

Considerar los eventos

$$\left\{ d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\right) \geq 2^{-n\alpha} \right\} \underset{\substack{\uparrow \\ s = \frac{i-1}{2^n},\ t = \frac{i}{2^n}}}{=} \left\{ d(X_t, X_s) \geq |t-s|^\alpha \right\}$$



$$\leq C\, 2^{nq\alpha}\, 2^{-(1+\varepsilon)n}$$

Probaremos que

$$\mathbb{P}\left[d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\right) \geq 2^{-n\alpha} \right]$$

$$= \mathbb{P}\left[d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\right)^q \geq 2^{-n\alpha q} \right]$$

$$\leq 2^{n\alpha q}\, \mathbb{E}\left[d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\right)^q \right] \leq C\, 2^{n\alpha q} \left(2^{-n}\right)^{1+\varepsilon}$$

$$= C\, 2^{nq\alpha}\, 2^{-(1+\varepsilon)n}$$

Ahora, vamos a controlar:

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{2^n} \left\{ \delta\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\right) \geq 2^{-n\alpha} \right\} \right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{2^n} P\left[\delta\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\right) \geq 2^{-n\alpha} \right]$$

$$\leq C \sum_{i=1}^{2^n} 2^{n\alpha q} \left(2^{-n}\right)^{1+\varepsilon} = C\, 2^{n\alpha q - n\varepsilon}$$

$$= C\, 2^{-n\left(\varepsilon - \frac{\alpha}{q}\right)}$$

Ahora voy a analizar

$$\overline{\lim_n} \bigcup_{i=1}^{2^n} \{\delta(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}) \geq 2^{-n\alpha}\}$$

$$= \bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{n=K}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{2^n} \{\delta(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}) \geq 2^{-n\alpha}\} \right).$$

Vamos a probar que

$$\mathbb{P}\left[\overline{\lim_n} \bigcup_{i=1}^{2^n} \{\delta(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}) \geq 2^{-n\alpha}\} \right] = 0. \quad \circledast$$

$$\uparrow$$

$$\{d(X_t, Y_s) \geq |t-s|^\alpha\} \leftarrow s = \frac{i-1}{n}, \ t = \frac{i}{n}$$

Supongamos que $\circledast$ pasa. Entonces

si $\omega \in \left(\overline{\lim_n} \bigcup_{i=1}^{2^n} \{\delta(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}) \geq 2^{-n\alpha}\} \right)^c$

$$\Rightarrow \# \{ n \in \mathbb{N} \mid d(\underbrace{X_{\frac{i-1}{2^n}}}_{s}, \underbrace{X_{\frac{i}{2^n}}}_{t}) \geq \underbrace{2^{-n\alpha}}_{|t-s|^\alpha} \text{ p.a. } i \leq 2^n \} < \infty$$

$\Rightarrow \exists\ N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall\ n \geq N$,

$$\left(\text{tomar} \quad N = \max \# \{ n \in \mathbb{N} \mid d(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}) \geq 2^{-n\alpha} \text{ p.a. } i \leq 2^n \} \right)$$

$$d(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}) \leq 2^{-n\alpha} \quad \forall \quad i \leq 2^n$$

$$\Rightarrow \quad K_\alpha(\omega) := \sup_{n \geq 1} \sup_{i \leq 2^n} \underbrace{\frac{d(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}})}{2^{-n\alpha}}} < \infty \quad \text{c.s.}$$

$$\frac{X_t - X_s}{|t-s|^\alpha}$$

s y t son de cierta manera

Hasta ahora, tenemos que para

$$\omega \in \Omega_a := \left(\overline{\lim_n} \bigcup_{i=1}^{2^n} \{ d(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}) \geq 2^{-n\alpha} \} \right)^c$$

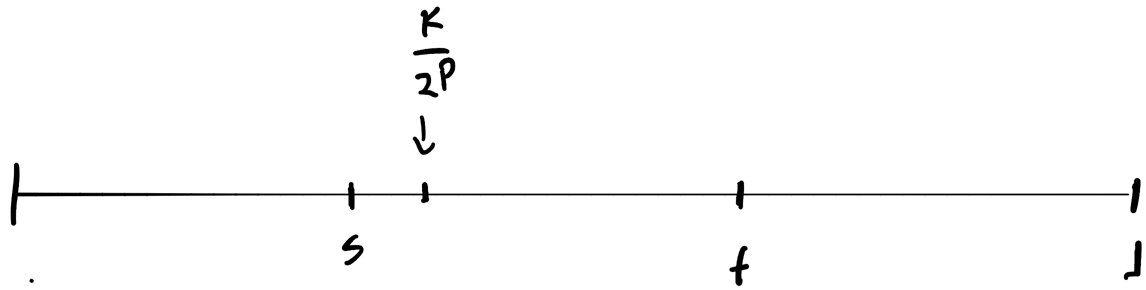
$$d(X_{\frac{i-1}{2^n}}(\omega), X_{\frac{i}{2^n}}(\omega)) \leq K_\alpha 2^{-n\alpha} \quad \ast\ast$$

Falta analizar $d(X_s(\omega), X_t(\omega))$ para s y t generales.

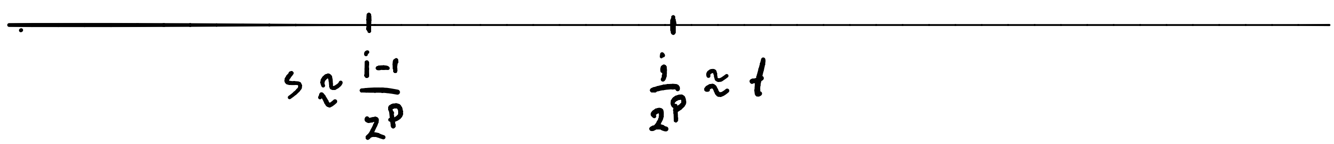
Probaremos que si $s<t$, $s,t \in D$

$$d(X_s(\omega), X_t(\omega)) \leq \frac{2K_\alpha(\omega)}{1-2^{-\alpha}} |t-s|^\alpha$$

$\leftarrow$ casi lo que queremos probar.



$\Big\downarrow$ comparar con



Tomar $p \in \mathbb{N}$ como $p = \min\{n \in \mathbb{N} \,;\, 2^{-n} \leq |t-s|\}$ y definimos a K como el menor entero t.q. $\frac{K}{2^p} \geq s$. Entonce

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{K}{2^p} - \varepsilon_1 2^{-p-1} - \varepsilon_2 2^{-p-2} - \dots - \varepsilon_l 2^{-p-l} \\ t &= \frac{K}{2^p} + \tilde{\varepsilon}_1 2^{-p-1} + \tilde{\varepsilon}_2 2^{-p-2} + \dots + \tilde{\varepsilon}_l 2^{-p-m} \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon_i, \tilde{\varepsilon}_i \in \{0,1\}$$

Finalmente,

$$s_i = K 2^{-p} - \varepsilon_1 2^{-p-1} - \cdots - \varepsilon_i 2^{-p-i}$$

$$t_j = K 2^{-p} + \tilde{\varepsilon}_1 2^{-p-1} + \cdots + \tilde{\varepsilon}_j 2^{-p-j}.$$

Entonces, como $s = s_\ell$ y $t = t_m$, de manera que podemos escribir (omitiendo la dependencia en ω).

$$d(X_s, X_t) = d(X_{s_\ell}, X_{t_m})$$

$$\leq d(X_{s_0}, X_{t_0}) + \sum_{i=1}^{\ell} d(X_{s_{i-1}}, X_{s_i}) + \sum_{j=1}^{m} d(X_{t_{j-1}}, X_{t_j})$$

$$\leq K_\alpha(\omega) 2^{-p\alpha} + \sum_{i=1}^{\ell} K_\alpha(\omega) 2^{-(p+i)\alpha} + \sum_{j=1}^{m} K_\alpha(\omega) 2^{-(p+j)\alpha}$$

de (*)

$= \cdots$ ← usar la suma geométrica

$$= 2K_\alpha(\omega)(1-2^{-\alpha}) 2^{-p\alpha} \leq 2K_\alpha(\omega)(1-2^{-\alpha})|t-s|^\alpha$$

Propuesta de Luis: usar

$$s = \frac{i}{2^p} \qquad t = \frac{j}{2^p}$$

Finalmente, definimos

$$\tilde{X}_t(\omega) := \begin{cases} \lim\limits_{\substack{s \to t \\ s \in D}} X_t(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega_\alpha \\ 0 & \text{si } \omega \in \Omega_\alpha^c \end{cases}$$

(El límite existe por lo probado antes)

La Hölder continuidad de $\widehat{X_t}(\omega)$ se sigue de la Hölder continuidad en D (sobre el conjunto Ω_α).

Tarea:

Ver que existe una modificación de $B_t = G(\mathbb{1}_{[0,t]})$ que tiene trayectorias Hölder continuas de índice a $\forall$ $a \in (0, \frac{1}{2})$.

En lo sucesivo, siempre consideraremos la versión de B con trayectorias continuas.

Definición:

Un proceso $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano si

- Es un proceso Gaussiano, centrado
- $\mathbb{E}[W_s W_t] = s \wedge t$
- W tiene trayectorias continuas.

En lo sucesivo, supondremos que $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ está definido en todos los reales positivos.

Medida de Wiener:

Lo que tenemos hasta el momento es $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$, de manera que

$$B : \Omega \longrightarrow C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$$

con $C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua} \}$

Recordar que si $N = (N_1, \ldots, N_d)$ era un vector aleatorio Gaussiano.

$$N : \Omega \to \mathbb{R}^{\{1,\ldots,d\}}$$ ← esto induce una medida en $\mathbb{R}^{\{1,\ldots,d\}}$.

Esto motiva definir una medida W en $C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ con la σ-álgebra de la topología de los abiertos de $C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sup_{x\in[0,n]} |f(x)-g(x)| \right) \wedge 1 \qquad f,g \in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$$

llamada "medida de Wiener, mediante

$W(A) := \mathbb{P}[B \in A] \qquad A \in \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}))$

Nota:

En algunas circunstancias es más fácil estudiar "trayectorias" en $C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$.

Nota 2:

Si $w \in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$, podemos definir, para $t_1,\dots,t_d \in \mathbb{R}_+$, el mapeo

$$\pi_{t_1,\dots,t_d}(w) = (w_{t_1},\dots,w_{t_d}) \in \mathbb{R}^d$$

Resumen

$$(C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})), W) \longrightarrow (\mathbb{R}^d; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), W\circ\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_d})$$

$$W\circ\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_d}(C) = W(\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_d}(C)) \qquad C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

$$= W(\{(w(t_1),\dots,w(t_d)) \in C\})$$

$$= \mathbb{P}[(B_{t_1},\dots,B_{t_d}) \in C]$$

Corolario: Si $\Omega = C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ y $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ es

$X_t(w) := w(t) \qquad w \in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$

es un movimiento Browniano.

Más propiedades trayectoriales:

Definimos $\{\mathcal{F}_s ; s \geq 0\}$ como la filtración

$$\mathcal{F}_s := \sigma(B_u ; u \leq s).$$

y la filtración

$$\mathcal{F}_{0+} := \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_s$$

Teorema: (ley 0-1 de Blumental)

$\forall \ A \in \mathcal{F}_{0+}, \quad \mathbb{P}[A] \in \{0,1\}$

prueba:

Veremos que A es independiente de $\mathcal{F}$

Es decir, $\forall$ v.a. $Y \in \mathcal{F}$ (i.e. Y es $\mathcal{F}$-medible)

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A Y] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{E}[Y] \leftarrow \text{¿Cómo se prueba?}$$

Es suficiente considerar el caso

$Y = g(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$. con g continua. y acotada

gracias al teorema de Dynkin

(teorema de clases monótonas).

Objetivo nuevo: Analizar

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A g(B_{t_1},\dots,B_{t_k})] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tma. de conv. dominada}}}{=} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{E}[\mathbb{1}_A g(B_{t_1}-B_\varepsilon,\dots,B_{t_k}-B_\varepsilon)]$$

Notar que si $0<\varepsilon<t_1$, debido a que

$A\in \tilde{\mathcal{F}}_{0^+} \subset \mathcal{F}_\varepsilon$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A g(B_{t_1}-B_\varepsilon,\dots,B_{t_k}-B_\varepsilon)]$$

$$= \mathbb{P}[A]\,\mathbb{E}[g(B_{t_1}-B_\varepsilon,\dots,B_{t}-B_\varepsilon)]$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{prop. de incrementos indep.} \\ \text{ó} \\ \text{prop. de Markov simple}\end{array}\right.$

Sacando límite obtenemos

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A g(B_{t_1},\dots,B_{t_k})] = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{E}[\mathbb{1}_A g(B_{t_1}-B_\varepsilon,\dots,B_{t_k}-B_\varepsilon)]$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{P}[A]\,\mathbb{E}[g(B_{t_1}-B_\varepsilon,\dots,B_{t_k}-B_\varepsilon)] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{E}[g(B_{t_1},\dots,B_{t_k})]$$

$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\mathbb{1}_A Y] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{E}[Y] \qquad \forall\; Y \;\; \mathcal{F}$- medible,

Dynkin

puedo tomar $Y=\mathbb{1}_A$, y obtengo

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A^2] = \mathbb{P}[A]^2 \Rightarrow \mathbb{P}[A]\in\{0,1\}.$$

Proposición:

i) Se tiene que c.s. $\forall\ \varepsilon>0$,

$$\sup_{0\leq s\leq \varepsilon} B_s>0 \qquad \inf_{0\leq s\leq \varepsilon} B_s<0$$

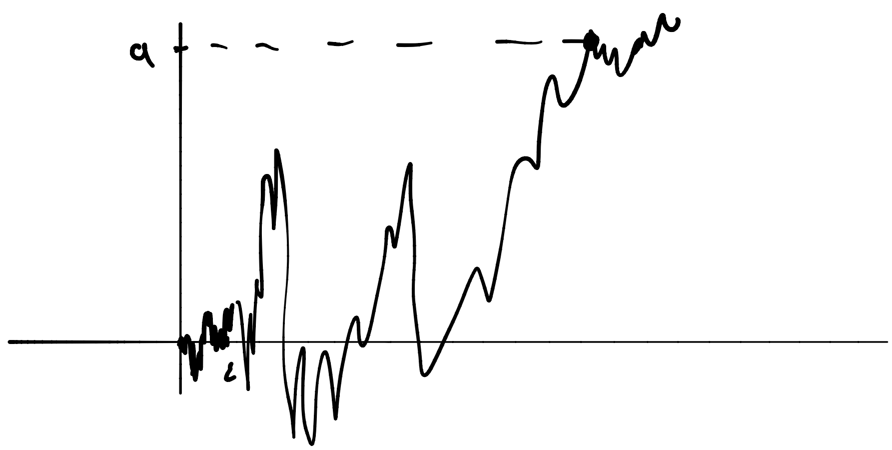
ii) $\forall\ a\in\mathbb{R}$, $T_a=\inf\{t\geq 0\ ;\ B_t=a\}$. Entonces

c.s. $\forall\ a\in\mathbb{R}$, $T_a<\infty$.

En particular,

$$\limsup_{t\to\infty} B_t=\infty \quad \text{y} \quad \liminf_{t\to\infty} B_t=-\infty.$$

La gráfica se ve entonces como



Pruebas:

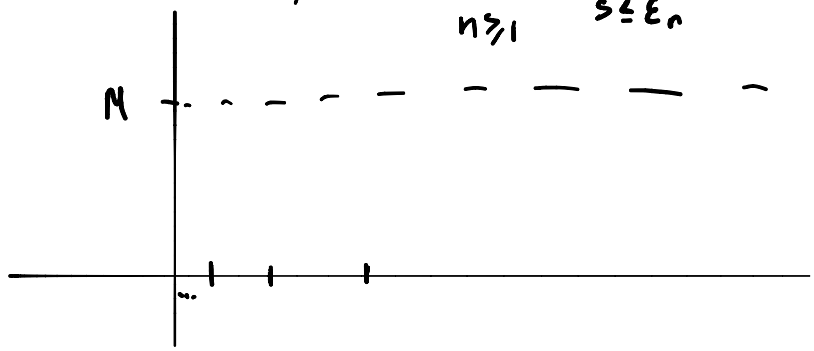
i) Observación 1:

Sea $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 1}$ $\varepsilon_n>0$ $\varepsilon_n\downarrow 0$, entonces

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{0\leq s\leq \varepsilon_n} B_s>0\Big]\geq \mathbb{P}\big[B_{\varepsilon_n}>0\big]=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\Big[\bigcap_{n\geq 1} \{\sup_{s\leq \varepsilon_n} B_s > 0\}\Big] = \lim_{n} \mathbb{P}\Big[\sup_{s\leq \varepsilon_n} B_s > 0\Big] \geq \frac{1}{2}$$

Notar que $\bigcap_{n\geq 1} \{\sup_{s\leq \varepsilon_n} B_s > 0\} \in \mathcal{F}_{0+}$



$\Rightarrow$ Por ley 0-1 de Blumenthal,

$$\mathbb{P}\Big[\bigcap_{n\geq 1} \{\sup_{s\leq \varepsilon_n} B_s > 0\}\Big] = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\Big[\bigcap_{\varepsilon > 0} \{\sup_{s<\varepsilon} B_s > 0\}\Big] = 1$$

$$\Rightarrow \forall\ \varepsilon>0, \quad \sup_{0\leq s\leq \varepsilon} B_s > 0 \quad \text{c.s.}$$

Analogamente, $\forall\ \varepsilon>0, \quad \inf_{0\leq s\leq \varepsilon} B_s < 0 \quad$ c.s.

Prueba de ii)

Notar que $\{T_M < \infty\} \supset \{\sup_{s>0} B_s > M\}$

Objetivo nuevo: estudiar

$$\mathbb{P}\left[\sup_{s>0} B_s > M\right]$$

Comenzaremos con

$$1 = \mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le 1} B_s > 0\right] = \lim_{\delta\downarrow 0} \mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le 1} B_s > \delta\right]$$

Notemos que

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le 1} B_s > \delta\right] = \mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le 1} \frac{B_s}{\delta} > 1\right]$$

$$\overset{\text{autosimilitud}}{=} \mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le 1} B_{\underbrace{\frac{s}{\delta^2}}_{t}} > 1\right]$$

Usamos $\{B_s\} \overset{\text{ley}}{=} \{\delta B_{\frac{s}{\delta^2}}\}$

$$= \mathbb{P}\left[\sup_{0\le t\le \frac{1}{\delta^2}} B_t > 1\right]$$

$$\xrightarrow{\delta\to\infty} \mathbb{P}\left[\sup_{t>0} B_t > 1\right]$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \mathbb{P}\left[\sup_{t>0} B_t > 1\right] = \mathbb{P}\left[\sup_{t>0} M B_t > M\right]$$

$$= \mathbb{P}\left[\sup_{t>0} M B_{\underbrace{(tM^2)}_{u}/M^2} > M\right] = \mathbb{P}\left[\sup_{u>0} B_u > M\right]$$

$$\{M B_{\frac{u}{M^2}}\} \overset{\text{ley}}{=} B_u$$

Analogamente,

$$1 = \mathbb{P}[\inf_{u>0} B_u < -M].$$

El resultado (ii) se obtiene haciendo $M \to \infty$.

Corolario:

Casi seguramente,
Las trayectorias de B no son monótonas en ningún intervalo

prueba:

Sea $q \in \mathbb{Q}$ y $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$. Probaremos que

$$\sup_{t \in [q, q+\varepsilon]} B_t > B_q \quad \circledast \qquad y \qquad \inf_{t \in [q, q+\varepsilon]} B_t < B_q$$

en un conjunto $\Omega_{q,\varepsilon} \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}[\Omega_{q,\varepsilon}] = 1$.

$$\Rightarrow \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ \varepsilon > 0 \\ \varepsilon \in \mathbb{Q}}} \left\{ \sup_{t \in [q, q+\varepsilon]} B_t > B_q \right\} \cap \left\{ \inf_{t \in [q, q+\varepsilon]} B_t < B_q \right\}$$

tiene proba $= 1$.

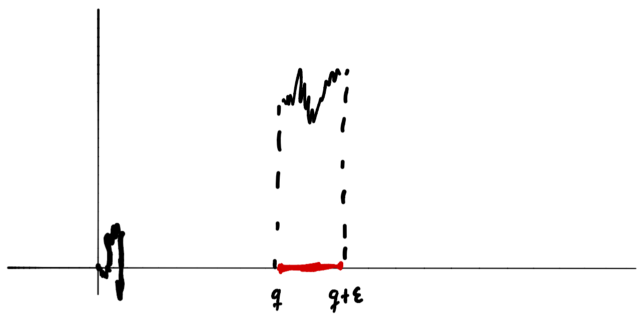
¿Cómo Probar $\circledast$?

Recordemos que $\{ \tilde{B}_s := B_{q+s} - B_q \,;\, s \geq 0 \}$ es un mov. Browniano. Por lo probado antes

$$\sup_{t\in[q,q+\varepsilon]}(B_t - B_q) = \sup_{s\in[0,\varepsilon]} B_{q+s} - B_q = \sup_{s\in[0,\varepsilon]} \tilde{B}_s > 0 \qquad \text{c.s.}$$

Analogamente,

$$\inf_{t\in[q,q+\varepsilon]} (B_t - B_q) < 0.$$



Observación:

Las trayectorias del browniano son no derivable c.s.

Si existiera $\frac{d}{dt}B_t$ en $t=q$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{B_{q+h} - B_q}{h} \quad \text{existe.}$$

Por el resultado anterior $\exists \ \{h_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}, \{h_n^2\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$

t.q. $\frac{B_{q+h_n^1} - B_q}{h_n^1} > 0$ & $\frac{B_{q+h_n^2} - B_q}{h_n^2} < 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}B_t = 0 \quad \text{en} \quad t=q$$

$\Rightarrow$ B tiene un

- máximo (siempre existen puntos en los que B decrece)
- mínimo (siempre existen puntos en los que B crece)
- punto de inflexión (siempre existen puntos en los que B decrece)

. $\frac{d}{dt} B_t$ no existe

. Vamos a ver ahora que si considero un intervalo $[0,t]$ y una sucesión de particiones $\{t_k^n\}_{k=0}^{m_n}$, con $t_0^n = 0$ y $t_{m_n}^n = t$; la variación de B, definida por

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} |B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}|, \quad \text{si} \quad \sup_{k\leq n} |t_k^n - t_{k-1}^n| \longrightarrow 0$$

es infinita.

$\Rightarrow$ Integral de Lebesgue - Stieltjes podría fallar.

justificación:

Veremos que

$$\sum_{k=1}^{m_n} |B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}|^2 \xrightarrow{L^2(\Omega)} t \qquad (**)$$

Nota: se puede probar que

$$\sum_{k=1}^{m_n} |B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}|^2 \xrightarrow{c.s.} t$$

si las particiones $\{t_k^n\}_{k \le m_n}$ están anidadas

prueba de (**)

Sea $$X_n := \sum_{k=1}^{m_n} |B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}|^2$$

Notar que

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=1}^{m_n} \mathbb{E}\left[|B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}|^2\right] = \sum_{k=1}^{m_n} (t_k^n - t_{k-1}^n) = t$$

Veamos ahora que

$$\mathbb{E}\left[|X_n - t|^2\right] \longrightarrow 0 \iff \mathrm{Var}[X_n] \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Ahora,

$$\mathrm{Var}[X_n] = \mathrm{Var}\left[\sum_{k=1}^{m_n} |B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}|^2\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n} \mathrm{Var}\left[|B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}|^2\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n} \Big[\mathbb{E}\big[|\underbrace{B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}}_{\overset{ley}{=} N(0,\, t_k^n - t_{k-1}^n) = (t_k^n - t_{k-1}^n)^{1/2} N(0,1)}|^4 \big] - \mathbb{E}\big[|B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}|^2 \big] \Big]^2$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m_n} (t_k^n - t_{k-1}^n)^2 \, 3 \leq \sup_{k \leq n} (t_k^n - t_{k-1}^n) \sum_{k=1}^{m_n} (t_k^n - t_{k-1}^n) \cdot 3$$

$$= 3t \sup_{k \leq n} (t_k^n - t_{k-1}^n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Hasta el momento probamos que

$$\sum_{k=1}^{m_n} |B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}|^2 \xrightarrow{L^2(\Omega)} t$$

Consecuencia: $\exists$ una sucesión de $\{t_k^n\}$ t.q.

$$\sum_{k=1}^{m_n} |B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}|^2 \xrightarrow{n \to \infty} t > 0 \quad \text{c.s.} \quad \Rightarrow \quad \text{dado que}$$

$$\sum_{k=1}^{m_n} |B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}|^2 \leq \sup_{k \leq m_n} |B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}| \sum_{k=1}^{m_n} |B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}|$$

entonces, para n grande

$$0 < \frac{t}{2} \leq \sup_{k \leq m_n} |B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}| \sum_{k=1}^{m_n} |B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}|$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m_n} |B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

$\Rightarrow$ la variación de B no existe.

Warning: en algunos libros de análisis no piden que la partición sea anidada para definir variación.

Propiedad de Markov fuerte:

Recordar que $\mathcal{F}_t := \sigma(B_u;\ u \leq t)$.

Definición:

Un tiempo de paro T es una v.a. $T \geq 0$, t.q. T puede tomar el valor infinito y t.q.

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Utilidad:

Observaremos procesos estocásticos X_t en tiempos de paro (es decir, considerar X_T).

Definición:

la σ- algebra $\tilde{F}_T$ (filtración antes de T) está definida como

$$\tilde{F}_T = \{ A \in F \ ; \ \forall \ t \geq 0, \quad A \cap \{T \leq t\} \in F_t \}$$

Se puede ver que F_T es una σ- algebra si T es tiempo de paro.

Ejemplo:

$\mathbb{1}_{\{T < \infty\}} B_T$ es $\tilde{F}_T$ medible.

Para probar este tipo de propiedades es importante usar la continuidad de B.

(Probar ésto será tarea)

Teorema (Propiedad de Markov fuerte).

Si T es un tiempo de paro y $\mathbb{P}[T<\infty]>0$, definimos

$$B_t^{(T)} := \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} (B_{T+t} - B_T)$$

Entonces, bajo la medida de probabilidad $\mathbb{P}[\,\cdot\,|\,T<\infty]$, el proceso $B_t^{(T)}$ es un mov. Brown. independiente de $\tilde{\mathcal{F}}_T$.

Nosotros nos enfocaremos principalmente en el caso $T<\infty$ c.s, de manera que

$$B_t^{(T)} = B_{T+t} - B_T$$

Prueba:

Suponer que $T<\infty$ c.s. y considerar $A \in \tilde{\mathcal{F}}_T$ y $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua y acotada.

Determinaremos el valor de

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A\, g(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_d}^{(T)})] \overset{?}{=} \mathbb{P}[A]\, \mathbb{E}[g(B_{t_1}, \dots, B_{t_d})] \quad (\#)$$

Ésto bastaría para ver que las leyes finito dimensionales de $\{B_t^{(T)}\}_{t\geq 0}$ son las mismas que las de $\{B_t\}_{t\geq 0}$ y son indep. de A. La continuidad de las trayectorias de $B_t^{(T)}$ se sigue de la definición.

Idea de la prueba de ⊛

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_A\, g(B_{t_1}^{(T)}, \ldots, B_{t_d}^{(T)})\, \mathbb{1}_{\{T\in J_k\}}]$$

con $J_k := \left[\frac{(k-1)}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$

aquí $T \approx \frac{k}{2^n}$

La idea es sustituir $T = \frac{k}{2^n}$ y controlar el error por la continuidad del Browniano (tarea).

$\mathbb{P}$[Racha de r soles en n lanzamientos antes de s águilas] $=*$

$X =$ 1ª racha de r soles

$* = \mathbb{P}[X \leq n$ no hay rachas de s soles antes de $X]$

Ahora $\{X \leq n\} = \{X = r\} \cap \cdots \cap \{X = n\}$ $\quad r \leq n$.

y

$\{X = i\} \cap \{$no hay rachas de s soles antes de $i\}$

r soles

i

Posibilidades para los primeros $i-r-1$ intentos?

n

Maximo del movimiento Browniano

Tma:

$$S_t = \sup_{0 \le s \le t} B_s$$

Si $a \geq 0$, y $b \in (-\infty, a]$, entonces

$$\mathbb{P}[S_t \geq a, B_t \leq b] = \mathbb{P}[B_t \geq 2a - b]$$

En particular, si tomamos $b = a$, vemos que

$$\mathbb{P}[S_t \geq a] = \mathbb{P}[|B_t| \geq a] \qquad \left(\Rightarrow S_t \overset{ley}{=} |B_t| \right)$$

Prueba:

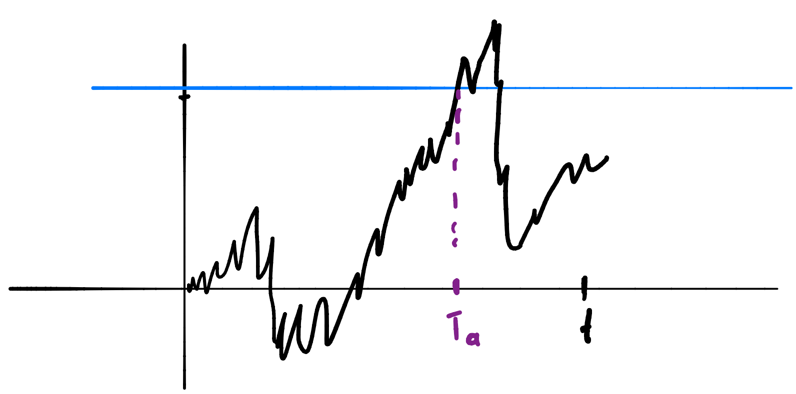
Sea

$T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. Vimos con anterioridad

que $T_a < \infty$ c.s. &

$$\mathbb{P}[S_t \geq a, B_t \leq b] \underset{\uparrow}{=} \mathbb{P}[T_a \leq t, B_t \leq b] = *$$

$$\{S_t \geq a\} = \{T_a \leq t\}$$



$$* = \mathbb{P}[T_a \leq t, B_t \leq b] \underset{t \geq T_a}{=} \mathbb{P}[T_a \leq t,\ B_t - B_{T_a} \leq b - B_{T_a}]$$

$$= \mathbb{P}[T_a \leq t,\ \tilde{B}_{t-T_a} \leq b - a] = *$$

donde

$$\tilde{B}_s := B_{s+T_a} - B_{T_a}$$

Nota: $\{T_a \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, y por Markov fuerte

$$* = \mathbb{P}[T_a \leq t, -\tilde{B}_{t-T_a} \leq b - a]$$

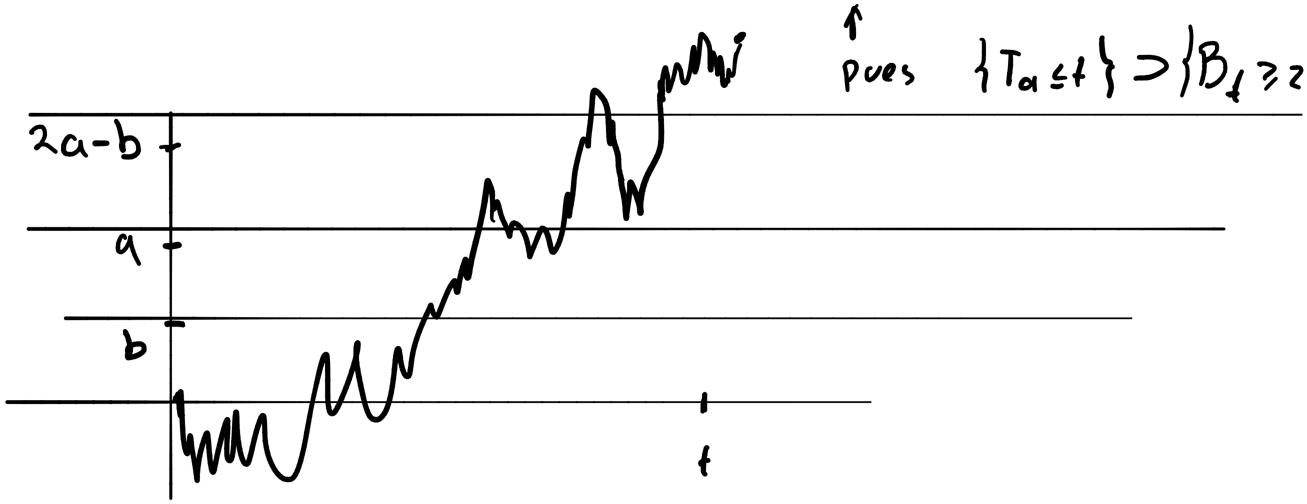
Ahora,

$$\tilde{B}_{t-T_a} = B_t - B_{T_a} = B_t - a,$$

$$\Rightarrow \quad * = \mathbb{P}[T_a \leq t,\ -B_t \leq b - 2a]$$

$$= \mathbb{P}[T_a \leq t,\ B_t \geq 2a - b] = \mathbb{P}[B_t \geq 2a - b]$$

pues $\{T_a \leq t\} \supset \{B_t \geq 2a - b\}$



Ya probamos

$$\mathbb{P}[S_t \geq a, B_t \leq b] = \mathbb{P}[B_t \geq 2a-b]$$

En particular, si tomamos $b=a\geq 0$, vemos que

$$\mathbb{P}[S_t \geq a] = \mathbb{P}[S_t \geq a, B_t \geq a] + \mathbb{P}[S_t \geq a, B_t \leq a]$$

$$= \mathbb{P}[B_t \geq a] + \mathbb{P}[B_t \geq a] = 2\,\mathbb{P}[B_t \geq a]$$

Derivando, se obtiene que (S_t, B_t) tiene densidad

$$f_{(S_t,B_t)}(a,b) = \mathbb{1}_{\{a>0,\, b<a\}} \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right\}$$

Corolario:

como

$$\mathbb{P}[T_a \leq t] = \mathbb{P}[S_t \geq a] = \mathbb{P}[|B_t| \geq a]$$

$$= \mathbb{P}[B_t^2 \geq a^2] = \mathbb{P}[t B_1^2 \geq a^2] = \overbrace{\mathbb{P}\left[\frac{a^2}{B_1^2} \leq t\right]}^{\#}$$

En particular, escribiendo explícitamente $\#$ y derivando respecto a t, obtenemos que T_a tiene densidad

$$f_{T_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{a^2}{2t}\right\} \mathbb{1}_{\{t>0\}}$$

Integración estocástica respecto al mov. Browniano

(ver "Malliavin calculus and related topics" de David Nualart, pag 15)

Recordar que si queremos definir

$$\int_0^T \square_t \, B(dt) \leftarrow$$

$$= \int_0^T \square_t \, \dot{B}(t) \, dt$$

No funciona el approach de Lebesgue-Stieltjes pues Variacion de B es infinita

(Paréntesis: approach que no funciona

$$B(dt) = dB_t = d\, G(\mathbb{1}_{[0,t]})$$

$$= G\left(\frac{d}{\partial t} \mathbb{1}_{[0,t]}\right) dt = G(\delta_0(\cdot - t))\, \delta t = \dot{B}(t)\, dt \,)$$

Apprach 1 para resolver el problema:

$$\int_0^T U_t \, B(dt), \qquad \text{con } U_t \text{ es suave}$$

$$:= U(t) B(t) - \int_0^T B_t \, U(dt) \leftarrow \text{está bien definido.}$$

1º caso en que no funciona éste approach:

$$\int_0^T B_t \, B(dt) \leftarrow \text{No funciona}$$

Approach general: supongamos que

$$U_t = \sum_{i=0}^{m} F_i \, \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1})}(t), \leftarrow \quad t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_m$$

Cómo definimos

$$\int_0^T U_t \, B(dt) := \sum_{i=0}^{m} \int_0^T F_i \, \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) B(dt)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} F_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right).$$

¿Es razonable? Si

Se puede usar la definición? No siempre.

Se necesita saber de que manera se relacionan F_i y $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$

(lo cual no es trivial).

Si queremos calcular

$$\mathbb{E}[F_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] = \mathbb{E}[F_i]\,\mathbb{E}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}] = 0$$

suponer que

$$F_i \perp B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$$

¿Cómo le hago para tener $F_i \perp B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$?

Una manera, es pedir que

$$F_i \in \sigma(B_u ; u \leq t_i) = \mathcal{F}_{t_i}$$

Resumen: si

$F_i \in \widetilde{\mathcal{F}}_{t_i}$, con $F_i \in L^2(\Omega)$, podemos definir

$$\int_0^T U_t\, B(dt) := \sum_{i=1}^{n} F_i\,(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Queremos ahora extender esta definición

Pregunta natural:

Si U es más general, (si no fuera de la forma

$$U(t) = \sum_{i=0}^{n} F_i\, \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]} \quad \text{con } F_i \in \widetilde{\mathcal{F}}_{t_i} \;)$$

Consideraremos procesos $U(t)$ adaptados o no-anticipantes, que por definición son aquellos que satisfacen $U(t) \in \mathcal{F}_t$

Para seguir, ocuparemos

- $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s ; s \leq t) \cup \mathcal{N}$, $\mathcal{N} \leftarrow$ cjtos nulos del Browniano.

- U_t lo tomaremos "un poquito más que adaptado"

pedimos que U_t sea progresivamente medible;

Def:

$U : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es progresivamente medible si $\forall$ $t \leq T$, la restricción de U al cjto $[0,t] \times \Omega$ es $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ - medible $\forall$ $t \leq T$

¿Por qué lo necesito?

¿Como calculamos la ley de expresiones como

$\int_0^t U(s) ds$? Necesitamos medibilidad de $\int_0^t U(s) ds$

La clase del 8 de Septiembre estará publicada en un archivo separado en la página del curso

La clase pasado vimos la definición de

$\int_0^T U_s W(ds)$ para $U = \{U_s\}_{s \le T}$ satisfaga

- Progresivamente medible $\leftrightarrow$ U adaptado + "un poco más".
- $\int_0^T \mathbb{E}[U_s^2] ds < \infty \leftrightarrow (\omega, t) \longmapsto U_t(\omega)$ en $L^2(\Omega \times [0,T])$

Teorema:

. U es adaptado y tiene trayectorias continuas, entonces U es progresivamente medible.

Más generalmente,

. Si U es adaptado, tiene una modificación progresivamente medible

Pequeña disgreción:

$\int_0^T U_s W(ds)$ $\leftarrow$ ¿Cómo se obtiene?

Como límite en $L^2(\Omega)$ de integrales más simples.

Vamos a "relajar" la condición

$$\int_0^T U_s\, W(ds) \in L^2(\Omega).$$

Ahora, en lugar de obtener $\int_0^T U_s\, W(ds)$ como un límite en $L^2(\Omega)$, lo obtendremos como un límite en probabilidad.

Preliminares:

Propiedad 1:

Recordemos que

- $\mathbb{E}\int_0^T U_s\, W(ds) = 0$

- $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T U_s\, W(ds)\right)^2\right] = \int_0^T \mathbb{E}[U_s^2]\, ds$

Asociado a $\int_0^T U_s\, W(ds)$ tenemos $\int_0^T U_s^2\, ds$, el cual da mucha info sobre $\int_0^T U_s\, W(ds)$

Proposición:

Si $\int_0^T U_s^2\, ds = 0$ c.s. en $G \in \mathcal{F}_T$, entonces

$$\int_0^T U_s\, W(ds) = 0 \quad \text{c.s. en } G.$$

Prueba:

$U = \{U_s\}_{s\geq 0}$ lo aproximamos con

$\hat{U}^n = \{\tilde{U}^n_s\}_{s\geq 0}$, donde

$$\tilde{U}^n_s := \sum_{i=1}^{2^n-1} \left(2^n \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} U(s)\,ds\right) \mathbb{1}_{\left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right]}(s)$$

si $w \in G$, entonces

$\tilde{U}^n_s = 0 \Rightarrow$

$$\int_0^T U^n_s\, W(ds) = \sum_{i=1}^{2^n-1} \left(2^n \int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} U(s)\,ds\right)\left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}}\right) = 0$$

c.s. en G.

$$\Rightarrow \lim_n \int_0^T U^n_s B(ds) = \int_0^T U_s\, B(ds) = 0 \qquad \text{c.s. en } G.$$

Vamos ahora a hacer el paso de saltar a integrales más generales:

idea intuitiva:

copy + paste

$\Rightarrow U_s \overset{\mathbb{P}}{\approx} \hat{U}^n_s$ y luego querríamos

$$\int_0^T U_s B(ds) \overset{\mathbb{P}}{\approx} \int_0^T \hat{U}^n_s B(ds)$$

¿Que debe satisfacer $\hat{U}^n_s$?

sería útil reciclar la teoría que tenemos,

para eso, necesitamos pedir

$$\int_0^T \mathbb{E}[(\hat{U}_s^n)^2] < \infty$$

Pues así podemos definir $\int_0^T \hat{U}_s^n B(ds)$

como antes.

Tarea moral: en éste punto, meditar sobre la lógica del argumento

Escoger a $\hat{U}^n$

$$\hat{U}_s^n := U_s \mathbb{1}_{\{\int_0^s U_r^2 dr \leq n\}} \qquad \text{para} \quad s \leq T.$$

Evidentemente:

- $\hat{U}_s^n$ es progresivamente medible ✓
- $\int_0^T (\hat{U}_s^n)^2 ds \leq n \quad \Rightarrow \quad \hat{U}^n \in L^2(\Omega \times [0,T])$.
- $\hat{U}_s^n \to U_s$ si $\int_0^T U_r^2 dr < \infty$.

Por ↓, la condición razonable que debería reemplazar a $\int_0^T \mathbb{E}[U_r^2] dr < \infty$

es $\int_0^T U_r^2 dr < \infty$ c.s.

Construcción formal:

Considerar U progresivamente medible y t.q. $\int_0^T \mathbb{E}[U_s^2]\,ds < \infty$. En este caso, $\int_0^T U_s B(ds)$ está bien definido y podemos considerar

$$R^n = \int_0^T U_s B(ds) - \int_0^T \hat{U}_s^n B(ds)$$

$$= \int_0^T \delta_s^n B(ds), \quad \text{con} \quad \delta_s^n := U_s - \hat{U}_s^n.$$

¿Cómo vemos que R^n es pequeño sin usar las normas $L^2(\Omega)$?

Analizaremos

$$\mathbb{P}[|R^n| > \varepsilon]$$

Veremos que $\forall\ \gamma > 0$,

$$\mathbb{P}[|R^n| > \varepsilon] \leq \mathbb{P}\left[\int_0^T (\delta_s^n)^2\, ds > n\right] + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}$$

prueba:

$$\mathbb{P}[|R^n| > \varepsilon] \leq \mathbb{P}\left[|R^n| > \varepsilon, \int_0^T (\delta_s^n)^2\, ds > \gamma\right]$$
$$+ \mathbb{P}\left[|R^n| > \varepsilon, \int_0^T (\delta_s^n)^2\, ds \leq \gamma\right]$$
$$\leq \mathbb{P}\left[\int_0^T (\delta_s^n)^2\, ds > \gamma\right] + \mathbb{P}\left[|R^n| > \varepsilon, \int_0^T (\delta_s^n)^2\, ds \leq \gamma\right]$$

Ahora

$$\mathbb{P}\left[|R^n|>\varepsilon, \int_0^T (\delta_s^n)^2\, ds \le \gamma\right]$$

$$= \mathbb{P}\left[\left|\int_0^T \underbrace{\left(U_s - U_s \mathbb{1}\left\{\int_0^s U_z^2\, dz \le n\right\}\right)}_{\delta_s^n} B(ds)\right| > \varepsilon,\ \int_0^T U_s^2\, ds \le \gamma\right]$$

$$= \mathbb{P}\left[\left|\int_0^T U_s \mathbb{1}\left\{\int_0^s U_z^2\, dz > n\right\} B(ds)\right| > \varepsilon,\ \overbrace{\int_0^T U_z^2\, dz \le \gamma}^{\subset \left\{\int_0^s U_z^2\, dz \le \gamma\right\}}\right]$$

$$\le \mathbb{P}\left[\left|\int_0^T U_s \mathbb{1}\left\{\int_0^s U_z^2\, dz > n\right\} B(ds)\right| > \varepsilon, \int_0^s U_z^2\, dz \le \gamma\right]$$

$$= \mathbb{P}\left[\left|\int_0^T U_s \mathbb{1}\left\{\int_0^s U_z^2\, dz > n\right\} \mathbb{1}\left\{\int_0^s U_z^2\, dz \le \gamma\right\} B(ds)\right| > \varepsilon, \int_0^s U_z^2\, dz \le \gamma\right]$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}\left[\left|\int_0^T U_s \mathbb{1}\left\{\int_0^s U_z^2\, dz > n\right\} \mathbb{1}\left\{\int_0^s U_z^2\, dz \le \gamma\right\} B(ds)\right|^2\right]$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{isometría}}}{=} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \mathbb{E}\left[U_s^2 \mathbb{1}\left\{\int_0^s U_z^2\, dz \le \gamma\right\}\right] ds \le \frac{\gamma}{\varepsilon^2}$$

Ahora,

$$\mathbb{P}[|R^n|>\varepsilon] \le \mathbb{P}\left[\int_0^T (\delta_s^n)^2\, ds > n\right] + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}$$

se cumple $\forall\ U = \{U_s\}_{s\ge 0}$ con las hipótesis de antes, se sigue que, reemplazando U, por $\hat{U}^m$, se obtiene que $\int_0^T \hat{U}_s^{(n)} B(ds)$

forman una sucesión convergente en probabilidad. (usarían argumentos de convergencia de sucesiones mediante sucesiones de Cauchy).

Definimos

$$\int_0^T U_s B(ds) := \underset{\text{probabilidad}}{\text{límite en}} \int_0^T \hat{U}_s^{(n)} B(ds) \quad Ⓐ.$$

Ahora hemos probado:

Si $U = \{U_s\}_{s\geq 0}$ es progresivamente medible y $\int_0^T U_s^2 \, ds < \infty$ c.s., entonces podemos definir $\int_0^T U_s B(ds)$ mediante Ⓐ

Propiedades fundamentales:

i) Si $U = \{U_s\}_{s\geq 0}$ es t.q.

$$U_s = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}]}(s) \, F_i,$$

con F_i siendo $\mathcal{F}_{t_i}$-medible y $F_i \in L^2(\Omega)$,

entonces

$$t \longmapsto \int_0^T U_s \mathbb{1}_{\{s\leq t\}} B(ds) \quad \text{es una martingala}$$

prueba: de tarea.

Teorema:

En el futuro, probaremos que si una martingala satisface "condiciones de regularidad" $\hookrightarrow$ criterio de continuidad de Kolmigorov, entonces se tiene una modificación continua.

(ésto es consecuencia de la desigualdad maxímal de Doob.)

Generalización de éste resultado:

Si U es progresivamente medible t.q

$\int_0^T U_s^2\, ds < \infty$, entonces $M = \{M_s\}_{0 \leq s \leq T}$ dado por

$$M_s := \int_0^T U_r \mathbb{1}_{\{r \leq s\}} B(dr),$$

es una martingala local. Es decir, si

$\uparrow$ generalización natural de "martingala"

$$T_n := \inf\{t \geq 0;\ \int_0^t U_s^2\, ds \geq n\}, \qquad n \geq 1,$$

son tiempos de paro que satisfacen

i) $\forall \ n \geq 1$ T_n es un tiempo de paro

ii) $T_n \uparrow \infty$ cuando $n \to \infty$ c.s.

iii) $M_n(t) = \int_0^t U_s \mathbb{1}_{\{s \leq T_n\}} B(ds)$ es una martingala cuadrado integrable t.g.

$$M_n(t) = \int_0^t U_s B(ds) \quad \text{en el evento}$$

$\{t \leq T_n\}$.

Teorema: (lo veremos a detalle más adelante).

Desigualdad de Burkholder - Davis - Gundy

Consideremos

$M_t = \int_0^t U_s B(ds)$, U_s es prog. medible y vive en $L^2(\Omega \times [0,T])$.

Versión sencilla: definimos

$$\langle M \rangle_t := \int_0^t U_s^2 \, ds$$

Entonces $\forall \ p \geq 2$, $\exists \ C_p^1, C_p^2 > 0$, t.g.

$$C_p^1 \, \mathbb{E}[|M_t|^p] \leq \mathbb{E}[\langle M \rangle_t^{p/2}] \leq C_p^2 \, \mathbb{E}[|M_t|^p]$$

Si $1 \leq p \leq 2$.

$$\mathbb{E}[|M_t|^p]^{\frac{1}{p}} \leq \mathbb{E}[|M_t|^2]^{1/2} = \left(\int_0^t \mathbb{E}[U_s^2] \, ds\right)^{1/2}$$

Propiedad 1

Si M_t es como antes,

$M_t^2 - \langle M \rangle_t$ es una martingala

Definición:

$\langle M \rangle_t$ se conoce como la variación cuadrática de M.

Teorema:

Si $\{t_j^n\}_{j=0}^{m_n} = \Pi^{(n)}$ es una sucesión de particiones anidadas de $[0,t]$, t.q. $|\Pi^{(n)}| := \sup_i |t_i^n - t_{i-1}^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, entonces

$$\sum_{i=0}^{m_n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \xrightarrow{P} \langle M \rangle_t = \int_0^t U_s^2\, ds$$

prueba:

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{m_n-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} U_s^2 ds - (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \right) \right)^2 \right]$$

$$\overset{\text{(\#)}}{=} \sum_{i=0}^{m_n-1} \mathbb{E}\left[\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} U_s^2 ds - (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \right)^2 \right] = *$$

pues $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ es martingala

Ahora, $-\ \mathbb{E}\left[\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} U_s^2 ds \right)^2 \right] = \mathbb{E}[(\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i})^2]$

Pero $-\ \mathbb{E}[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^4] \leq C_4' \mathbb{E}[(\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i})^2]$

Burkholder-Davis-Gundy

$$\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} U_s^2\, ds \leq \sup_{|z-v|\leq|\pi^n|} \int_r^s U_\sigma^2\, d\sigma \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

$\Rightarrow$

$$* \leq 2C_4' \sum_{i=0}^{m_n-1} \mathbb{E}[(\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i})^2]$$

Suponer $\int_0^t U_s^2 \leq K$ $\downarrow$ $K \in \mathbb{R}_+$

$$\leq 2C_4' \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{m_n-1} (\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i})\right) \sup_{|z-v|\leq|\pi^n|} \int_r^s U_\sigma^2\, d\sigma\right]$$

$$\xrightarrow{\text{conv. dominada}} 0$$

(el argumento está dominado por

$$K\, 2C_4' \int_0^t U_s^2\, ds$$

Falta ver (#), es decir,

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} (\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i}) - (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\right)^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left((\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i}) - (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\right)^2\right]$$

Para ver esto notemos que

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(\langle M\rangle_{t_{i+1}}-\langle M\rangle_{t_i})-(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2\right)^2\right]$$

$$=\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}(\langle M\rangle_{t_{i+1}}-\langle M\rangle_{t_i})-(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2\right)^2\right]$$

$$+\ \mathbb{E}\left[\left((\langle M\rangle_{t_n}-\langle M\rangle_{t_{n-1}})-(M_{t_n}-M_{t_{n-1}})^2\right)^2\right]$$

$$+\ 2\,\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}(\langle M\rangle_{t_{i+1}}-\langle M\rangle_{t_i})-(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2\right)\times\right.$$

$$\left.\left((\langle M\rangle_{t_n}-\langle M\rangle_{t_{n-1}})-(M_{t_n}-M_{t_{n-1}})^2\right)\right]$$

Notemos que

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}(\langle M\rangle_{t_{i+1}}-\langle M\rangle_{t_i})-(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2\right)\times\right.$$

$$\left.\left((\langle M\rangle_{t_n}-\langle M\rangle_{t_{n-1}})-(M_{t_n}-M_{t_{n-1}})^2\right)\right]$$

$$=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}(\langle M\rangle_{t_{i+1}}-\langle M\rangle_{t_i})-(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\left((\langle M\rangle_{t_n}-\langle M\rangle_{t_{n-1}})-(M_{t_n}-M_{t_{n-1}})^2\right)\middle|\tilde{F}_{t_{n-1}}\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} (\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i}) - (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\right) \times\right.$$

$$\left.\mathbb{E}\left[\left((\langle M\rangle_{t_n} - \langle M\rangle_{t_{n-1}}) - \left(M_{t_n}^2 + M_{t_{n-1}}^2 - 2 M_{t_n} M_{t_{n-1}}\right)\right) \mid \mathcal{F}_{t_{n-1}}\right]\right]$$

Por la propiedad de martingala de $M_t^2 - \langle M\rangle_t$

y la prop. de martingala de M_t

$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} (\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i}) - (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\right) \times\right.$$

$$\left.\left((\langle M\rangle_{t_{n-1}} - \langle M\rangle_{t_{n-1}}) - \left(M_{t_{n-1}}^2 + M_{t_{n-1}}^2 - 2 M_{t_{n-1}} M_{t_{n-1}}\right)\right)\right] = 0$$

Hemos probado entonces que

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} (\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i}) - (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} (\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i}) - (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\right)^2\right]$$

$$+ \mathbb{E}\left[\left((\langle M\rangle_{t_n} - \langle M\rangle_{t_{n-1}}) - (M_{t_n} - M_{t_{n-1}})^2\right)^2\right]$$

$$= \cdots = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[\left((\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i}) - (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\right)^2\right] \blacksquare$$

Fórmula de Itô.

Si $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Si $u, v: [0,T) \to \mathbb{R}$ procesos estocásticos t.q.

- $\int_0^t u_s^2 \, ds < \infty$ c.s.
- $\int_0^T |v_s| \, ds$

Definimos

$$X_t := x_0 + \int_0^t u_s B(ds) + \int_0^t v_s \, ds \quad (\#\#)$$

Notación par decir $(\#\#)$

- $X_t = x_0$
- $dX_t = u_s \, dB_s + v_s \, ds$

Entonces,

$$\int_0^t F'(X_s) \, dX_s$$

$$F(X_s) - F(X_0)$$

$$= \int_0^t F'(X_s) u_s B(ds) + \int_0^t F'(X_s) v_s \, ds$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) u_s^2 \, ds$$

$$d\langle X \rangle_s$$

Intuición de la prueba:

$$F(X_t) - F(x_0) \qquad \text{partimos } [0,t] \text{ en } 0=t_0<t_1<\dots<t_n=t$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i})$$

Análisis de $F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i}) \not\approx F'(X_{\tilde{t}_i})\, \Delta_i X$

$\tilde{t}_i \in [t_i, t_{i+1}]$

$\Delta_i X := X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$

Se usa entonces la aproximación

$$F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i}) = F'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + \frac{1}{2} F''(X_{\tilde{t}_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

Entonces, es razonable pensar que

$$F(X_t) - F(x_0) \approx \sum_{i=0}^{n-1} F'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} F''(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

$$\approx \int_0^t F'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\, d\langle X \rangle_s$$

$$= \int_0^t F'(X_s) U_s B(ds) + \int_0^t F'(X_s) V_s\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s) U_s\, ds$$