Cálculo estocástico.

Asumiremos que nuestras v.a. están definidas en un espacio de prob. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Vectores Gaussianos:

X es una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma \in \mathbb{R}_+$

si

- $$\mathbb{P}[X \in A] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) f_X(x) dx \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

$$f_X(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \right\}$$

- Alternativamente:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}[e^{i\lambda X}] = e^{i\lambda\mu} e^{-\frac{\sigma^2}{2}x^2}$$

Más generalidad:

Si $X_1, \dots, X_d$ son v.a. decimos que $(X_1, \dots, X_d)$ es un vector gaussiano si

$\forall \quad \xi_1, \dots, \xi_d \in \mathbb{R}$,

$\xi_1 X_1 + \dots + \xi_d X_d$ tiene distribución Gaussiana.

Ejemplo:

Si $X_1, \dots, X_d$ son v.a. Gaussianas estandar independientes

¿es $(X_1, \dots, X_d)$ un vector Gaussiano? Si, pues.

Para analizar el problema estudiamos

$Y = \xi_1 X_1 + \cdots + \xi_d X_d$ ← ¿es una v.a. normal?

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda Y}] = \mathbb{E}[e^{i\lambda(\xi_1 X_1 + \cdots + \xi_d X_d)}]$$

$$= \mathbb{E}[e^{i\lambda \xi_1 X_1 + \cdots + i\lambda \xi_d X_d}]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{d} e^{i\lambda \xi_j X_j}\Big]$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \mathbb{E}[e^{i\lambda \xi_j X_j}]$$

$$= \prod_{j=1}^{d} e^{-\frac{(\lambda \xi_j)^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 \left(\sum_{j=1}^{d} \xi_j^2\right)}$$

$\Rightarrow Y \sim$ Normal $\Rightarrow (X_1, \dots, X_d)$ es un vector gaussiano.

Itempool:

Intuición incorrecta:

X, Y Gaussianas.

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$$

- Si (X,Y) es un vector Gaussiano, entonces si $\mathbb{E}[XY]=0$, X es indep de Y.
- Pero si no es vector conjuntamente Gaussiano, $\mathbb{E}[XY]=0 \neq X \perp Y$

contraejemplo:

$X \sim N(0,1)$ $\quad$ ξ es una v.a con ley

$Y = \xi X,$ $\quad$ $\mathbb{P}[\xi=-1] = \mathbb{P}[\xi=1] = \frac{1}{2}$

con $\xi \perp X$.

Tarea: ver que Y es v.a. Gaussiana estándar.

Ley de un vector Gaussiano:

$\vec{X} := (X_1, \dots, X_d) \leftarrow$ mapeo de $\Omega \to \mathbb{R}^d$

Teorema:

Si $\vec{X}$ es un vector Gaussiano, con matriz de covarianzas no degenerada, entonces

$$\mathbb{P}[\vec{X} \in A] = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(x) \exp\{ -\tfrac{1}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{transpuesta de } x}}{(x-\mu)^*} \Sigma^{-1} (x-\mu) \} \, dx$$

Para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. donde

$\Sigma = (\Sigma_{i,j} \;;\; 1 \leq i,j \leq d)$. $\Sigma_{i,j} := \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$

$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])$.

Prueba de la clase:

Lemma: $\vec{X} \overset{\text{ley}}{=} \mu + \Sigma^{1/2} \vec{Z}$ $\qquad \vec{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)$,

$\uparrow$

Como Σ es no degenerada y positiva definida, puedo sacar raíz

con $\{Z_i\}_{i \leq d}$ i.i.d. $Z_1 \sim N(0,1)$.

Entonces, $\vec{X}$ tiene densidad, que por cambio de variable, es

$$f_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_d) = \exp\{ -\tfrac{1}{2} (x-\mu)^* \Sigma^{-1} (x-\mu) \}$$

Prueba alternativa:

Por cambio de variable, la función característica asociada a

$$g(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^* \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}$$

es

$$\vec{\lambda} \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\vec{\lambda}\cdot x} g(x)\,dx =*$$

$$(\Sigma^{-1/2}(x-\mu))^* / \Sigma^{-1/2}(x-\mu))$$

$$\downarrow$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\vec{\lambda}\cdot x} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^* \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\} dx$$

cambiamos x por $y = \Sigma^{-1/2}(x-\mu)$ y obtenemos

$$* = \exp\{i\vec{\lambda}\cdot\mu\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^t \Sigma \lambda\right\}.$$

Coincide ésta con la función característica de $(X_1, \dots, X_d)$:

$$\vec{\lambda} \longmapsto \mathbb{E}\left[e^{i\lambda_1 X_1 + \dots + i\lambda_d X_d}\right] =*$$

como $Y := \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_d X_d$ es vector Gaussiano

$$* = \mathbb{E}\left[e^{iY}\right] = e^{i\mathbb{E}[Y] - \frac{1}{2}\mathrm{Var}[Y]}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \vec{\lambda} \cdot \mu$$

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}[((\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_d X_d) - (\lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_d \mu_d))^2]$$

$$= \mathbb{E}[(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_d X_d)^2] - (\lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_d \mu_d)^2$$

$$= \lambda_1^2 \mathbb{E}[X_1^2] + \cdots + \lambda_d^2 \mathbb{E}[X_d^2]$$

$$+ 2 \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j \mathbb{E}[X_i X_j]$$

$$- (\lambda_1^2 \mu_1^2 + \cdots + \lambda_d^2 \mu_d^2)$$

$$- 2 \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j \mu_i \mu_j$$

$$= \lambda_1^2 \mathrm{Var}[X_1] + \cdots + \lambda_d^2 \mathrm{Var}[X_d] = \vec{\lambda}^* \Sigma \vec{\lambda}$$

$$+ 2 \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j \mathrm{Cov}[X_i, X_j]$$

Pregunta itempool:

El contraejemplo

simétrica

$X \sim N(0,1)$.

$Y = \xi X$, $\quad \xi \sim Ber\left(\frac{1}{2}, \{-1, 1\}\right)$.

funciona; pues

$$X + Y = (1+\xi) X \qquad y$$

$$\mathbb{P}[X + Y = 0] \geq \mathbb{P}[\xi = -1] = \frac{1}{2}$$