Cálculo estocástico.

Asumiremos que nuestras v.a. están definidas en un espacio de prob. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Vectores Gaussianos:

X es una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad \mu \in \mathbb{R}, \ \sigma \in \mathbb{R}_+$

si

- $\mathbb{P}[X \in A] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) f_X(x) dx \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$

$$f_X(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x-\mu)^2 \right\}$$

- Alternativamente:

$$\forall \ \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{E}[e^{i\lambda X}] = e^{i\lambda\mu} e^{-\frac{\sigma^2}{2} x^2}$$

Más generalidad:

Si $X_1, \dots, X_d$ son v.a. decimos que $(X_1, \dots, X_d)$ es un vector gaussiano si

$\forall \quad \xi_1, \dots, \xi_d \in \mathbb{R},$

$\xi_1 X_1 + \dots + \xi_d X_d$ tiene distribución Gaussiana.

Ejemplo:

Si $X_1, \dots, X_d$ son v.a. Gaussianas estandar independientes

¿es $(X_1, \dots, X_d)$ un vector Gaussiano? Si, pues.

Para analizar el problema estudiamos

$Y = \xi_1 X_1 + \cdots + \xi_d X_d$ ← ¿es una v.a. normal?

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda Y}] = \mathbb{E}[e^{i\lambda(\xi_1 X_1 + \cdots + \xi_d X_d)}]$$

$$= \mathbb{E}[e^{i\lambda \xi_1 X_1 + \cdots + i\lambda \xi_d X_d}]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{d} e^{i\lambda \xi_j X_j}\Big]$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \mathbb{E}[e^{i\lambda \xi_j X_j}]$$

$$= \prod_{j=1}^{d} e^{-\frac{(\lambda \xi_j)^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 \left(\sum_{j=1}^{d} \xi_j^2\right)}$$

$\Rightarrow Y \sim$ Normal $\Rightarrow (X_1, \dots, X_d)$ es un vector gaussiano.

Itempool:

Intuición incorrecta:

X, Y Gaussianas.

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$$

- Si (X,Y) es un vector Gaussiano, entonces si $\mathbb{E}[XY] = 0$, X es indep de Y.
- Pero si no es vector conjuntamente Gaussiano, $\mathbb{E}[XY] = 0 \neq X \perp Y$

contraejemplo:

$X \sim N(0,1)$ ξ es una v.a con ley

$Y = \xi X,$ $\mathbb{P}[\xi = -1] = \mathbb{P}[\xi = 1] = \frac{1}{2}$

con $\xi \perp X$.

Tarea: ver que Y es v.a. Gaussiana estándar.

Ley de un vector Gaussiano:

$\vec{X} := (X_1, \dots, X_d) \leftarrow$ mapeo de $\Omega \to \mathbb{R}^d$

Teorema:

Si $\vec{X}$ es un vector Gaussiano, con matriz de covarianzas no degenerada, entonces

transpuesta de x

$$\mathbb{P}[\vec{X} \in A] = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(x) \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^* \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\} dx$$

Para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. donde

$$\Sigma = (\Sigma_{i,j} \; ; \; 1 \leq i,j \leq d). \quad \Sigma_{i,j} := \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$$

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d]).$$

Prueba de la clase:

Lemma: $\vec{X} \overset{ley}{=} \mu + \Sigma^{1/2} \vec{Z}$ $\qquad \vec{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)$,

Como Σ es no degenerada y positiva definida, puedo sacar raíz

con $\{Z_i\}_{i \leq d}$ i.i.d. $Z_1 \sim N(0,1)$.

Entonces, $\vec{X}$ tiene densidad, que por cambio de variable, es

$$f_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_d) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^* \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}$$

Prueba alternativa:

Por cambio de variable, la función característica asociada

a $g(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^* \Sigma^{-1}(x-\mu)\}$ es

$$\vec{\lambda} \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\vec{\lambda}\cdot x} g(x)\,dx =*$$

$$(\Sigma^{-1/2}(x-\mu))^* / \Sigma^{-1/2}(x-\mu))$$

$$\downarrow$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\vec{\lambda}\cdot x} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^*\Sigma^{-1}(x-\mu)\}\,dx$$

cambiamos x por $y = \Sigma^{-1/2}(x-\mu)$ y obtenemos

$$* = \exp\{i\vec{\lambda}\cdot\mu\} \exp\{-\frac{1}{2}\lambda^t\Sigma\lambda\}.$$

Coincide ésta con la función característica de $(X_1, \dots, X_d)$:

$$\vec{\lambda} \longmapsto \mathbb{E}[e^{i\lambda_1 X_1 + \dots + i\lambda_d X_d}] =*$$

como $Y := \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_d X_d$ es vector Gaussiano

$$* = \mathbb{E}[e^{iY}] = e^{i\mathbb{E}[Y] - \frac{1}{2}\mathrm{Var}[Y]}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \vec{\lambda} \cdot \mu$$

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}[((\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_d X_d) - (\lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_d \mu_d))^2]$$

$$= \mathbb{E}[(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_d X_d)^2] - (\lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_d \mu_d)^2$$

$$= \lambda_1^2 \mathbb{E}[X_1^2] + \cdots + \lambda_d^2 \mathbb{E}[X_d^2]$$

$$+ 2 \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j \mathbb{E}[X_i X_j]$$

$$- (\lambda_1^2 \mu_1^2 + \cdots + \lambda_d^2 \mu_d^2)$$

$$- 2 \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j \mu_i \mu_j$$

$$= \lambda_1^2 \mathrm{Var}[X_1] + \cdots + \lambda_d^2 \mathrm{Var}[X_d] = \vec{\lambda}^* \Sigma \vec{\lambda}$$

$$+ 2 \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j \mathrm{Cov}[X_i, X_j]$$

Pregunta itempool:

El contraejemplo

$X \sim N(0,1)$.

$Y = \xi X$, $\quad \xi \sim \overset{\text{simétrica}}{\overset{\downarrow}{\mathrm{Ber}}}\left(\frac{1}{2}, \{-1, 1\}\right)$.

funciona; pues

$$X + Y = (1+\xi) X \qquad \text{y}$$

$$\mathbb{P}[X + Y = 0] \geq \mathbb{P}[\xi = -1] = \frac{1}{2}$$

Ruido blanco

Lemma:

Si X es un vector Gaussiano, su ley está determinada por su media $\mu = \mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])$

$(X = (X_1, \dots, X_d))$

y su matriz de covarianza $\Sigma = [\Sigma_{ij}]$

con $\Sigma_{i,j} := \mathrm{Cov}[X_i, X_j]$.

Nota "curiosa"

Si $\ell: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal la forma general para ℓ es

$\ell(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \cdot x$

$x = (x_1, \dots, x_d)$ $\quad$ Para ciertos $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$

En este contexto, X un vector en $\mathbb{R}^d$ es gaussiano si $\ell(X)$ es v.a. gaussiana

Ruido blanco:

Consideremos el espacio

$H = L^2([0,1]; \mathbb{R})$, es decir

$f \in H$ si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ t.q.

$\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx < \infty$

Definición:

Un mapeo $G : H \to L^2(\Omega)$ es un ruido blanco si

- $G(f)$ es una v.a. Gaussiana centrada $\forall f \in H$
- $\mathbb{E}[G(f) G(h)] = \langle f, h \rangle_H := \int_0^1 f(x) h(x) \, dx$

Recordar que si X es un vector gaussiano con media cero y covarianza I_d

y $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d)$

$\mathbb{E}[(\lambda \cdot X) \times (\eta \cdot x)] = \lambda \cdot \eta$ $\quad$ $= \lambda^* \Sigma \eta$

Nota:

Esta construcción se puede generalizar

1.) $L^2([0,1];\mathbb{R})$ puede reemplazarse

por $\mathcal{H} := L^2(E;\mathbb{R})$

$(E, \mathcal{B}(E), \mu) \leftarrow$ un espacio de medida

E es un métrico separable.

El ruido blanco se define como

- $G(f)$ es gaussiano centrado $\forall f \in \mathcal{H}$
- $\mathbb{E}[G(f)G(h)] = \langle f,h\rangle_{\mathcal{H}} = \int_E f(x)h(x)\mu(dx).$

Otra generalización:

"Definir $\mathcal{H}^0$ como un espacio de funciones escalonadas

$$\mathcal{H}^0 = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{I_k} \quad a_k \in \mathbb{R}, \ I_k \leftarrow \text{intervalos} \right\}$$

Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^0}$ mediante

$$\langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle_{\mathcal{H}^0} := R(s,t) \leftarrow \text{"función de covarianza"}$$

$\mathcal{H} :=$ cerradura de $\mathcal{H}^0$ respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}^0}$

(ver libro libro de Peccati - Nourdin).

De regreso al ruido blanco.

Pregunta natural: ¿existe un ruido blanco?

ingredientes que tenemos

1.) $\mathcal{H} = L^2([0,1];\mathbb{R})$

2.) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

3.) $G : \mathcal{H} \to L^2(\Omega) \leftarrow \quad G : \mathcal{H} \to L^2(\Omega).$

$$\Updownarrow$$

$$G = \{ G_h \}_{h \in \mathcal{H}}$$

Recordar que si X es un vector gaussiano en $\mathbb{R}^d$ con entradas i.i.d $\sim N(0,1)$.

$\{X_i\}_{1\le i\le d} \leftarrow$ v.a.i.i.d $\sim N(0,1)$

$$X = \sum_{i=1}^{d} e_i X_i \qquad e_i = (0,..0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{componente } i}}{1},0,...)$$

Pregunta natural: ¿existe un ruido blanco?

Respuesta: si! pues se puede construir G de la siguiente manera

1:) Sea $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $L^2([0,1];\mathbb{R})$. $\leftarrow$ • Usar base de Fourier

• Usar funciones de Haar.

2:) $\exists$ una elección de v.a. $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ i.i.d $\sim N(0,1)$.

3:) Si $h \in H = L^2([0,1];\mathbb{R})$.

$$\Rightarrow \quad h = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i \qquad \left(\alpha_j = \langle h, f_j \rangle = \int_0^1 h(x) f_j(x)\,dx\right)$$

$$G(h) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i$$

$\uparrow$ juegan el rol de $G(f_i)$.

(las cuales tienen propiedades análogas a las X_i).

Necesitamos ver que

$$G(h) := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i \quad \text{converge}$$

en $L^2(\Omega)$. Para esto basta ver que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ es de Cauchy

Prueba (sketch): si $n,m \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$= \left\| \sum_{i=n\wedge m}^{n\vee m} \alpha_i X_i \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leftarrow \text{se puede calcular fácil}$$

$$= \sum_{i=n\wedge m}^{n\vee m} \alpha_i^2 \leq \sum_{i=n\wedge m}^{\infty} \alpha_i^2 \xrightarrow{n\wedge m \to \infty} 0$$

pues $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i^2 < \infty$

La covarianza es lo correcto?

$\mathbb{E}[G(f)G(h)]$

$$= \mathbb{E}\Big[G\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\langle f, f_i\rangle_{\mathcal{H}} f_i\Big)G\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\langle h, f_j\rangle_{\mathcal{H}} f_j\Big)\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\langle f, f_i\rangle_{\mathcal{H}}\langle h, f_j\rangle_{\mathcal{H}}\underbrace{\mathbb{E}[G(f_i)G(f_j)]}_{=\langle f_i, f_j\rangle = \delta_{i,j}}$$

checar

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\langle f, f_i\rangle_{\mathcal{H}}\langle h, f_i\rangle_{\mathcal{H}}$$

$\mathbb{E}[G(f_i)G(f_j)] = \delta_{i,j}$

$$= \Big\langle \sum_{i=1}^{\infty}\langle f, f_i\rangle_{\mathcal{H}} f_i, \sum_{j=1}^{\infty}\langle h, f_j\rangle_{\mathcal{H}} f_j\Big\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$= \langle f, h\rangle_{\mathcal{H}}$$

Evidentemente $\mathbb{E}[G(f)] = 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{H}$ $\blacksquare$

Movimiento Browniano

Definiremos un poceso $B = \{B_t\}_{t\in[0,1]}$ a partir del ruido blanco.

Si G es un ruido blanco y $A \in \mathcal{B}([0,1])$, $G(\mathbb{1}_A)$ es una v.a. Gaussiana centrada.

Más aún, si $A, B \in \mathcal{B}([0,1])$ y A, B son ajenos (pensar en $A = [0,s]$, $B = [s+\varepsilon, s+\varepsilon+\delta]$)

$G(\mathbb{1}_A)$ y $G(\mathbb{1}_B)$ son independientes:

$$\mathbb{E}[G(\mathbb{1}_A)G(\mathbb{1}_B)] = \langle \mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)\,dx = 0$$

Definimos, para $s \in [0,1]$,

$$B_s := G(\mathbb{1}_{[0,s]}).$$

Diremos que $B = \{B_s ; s \in [0,1]\}$ es un movimiento pre-Browniano.

Propiedades

- $\forall$ $s_1, \dots, s_d \in \mathbb{R}_+$, y $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 B_{s_1} + \dots + \lambda_d B_{s_d}$ es una varia Gaussiano centrado. (i.e. $(B_{s_1}, \dots, B_{s_d})$ es un vector Gaussiano).

(justificación:

$$\lambda_1 B_{s_1} + \dots + \lambda_d B_{s_d} = \lambda_1 G(\mathbb{1}_{[0,s_1]}) + \dots + \lambda_d G(\mathbb{1}_{[0,s_d]})$$
$$= G(\lambda_1 \mathbb{1}_{[0,s_1]} + \dots + \lambda_d \mathbb{1}_{[0,s_d]}) \sim \text{Normal}$$
)

- $\forall$ $0 \leq s < t \leq 1$,

$$B_t - B_s \sim N(0, t-s)$$

(justificación:

$$B_t - B_s = G(\mathbb{1}_{[0,t]}) - G(\mathbb{1}_{[0,s]})$$
$$= G(\mathbb{1}_{(s,t]}) \sim N(0, \|\mathbb{1}_{(s,t]}\|^2_{L^2([0,1];\mathbb{R})})$$
$$= N(0, \underbrace{\int_0^1 \mathbb{1}_{(s,t]}(u)\, du}_{t-s})$$

- $0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_d$, entonces $B_{s_0}, B_{s_1} - B_{s_0}, B_{s_2} - B_{s_1}, \dots, B_{s_d} - B_{s_{d-1}}$ son v.a. independientes

$H \leftarrow$ Hilbert. Con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$

$X : \Omega \to H$

Ingrediente extra: $Q : H \to H$ no negativa definida.

$$\langle f, h \rangle_Q := \langle f, Qh \rangle_H$$

$\mu \leftarrow$ medida en H es una medida Q-Gaussiana centrada si

$(H, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$

$h \to \ell(h)$ es una v.a. gaussiana centrada $\forall\ \ell : H \to \mathbb{R}$ func. lineal.

Ver libro de Da-Prato.

Teorema:

Si Q satisface cierta condición; entonces $\exists$ una medida Q-Gaussiana

---

Nota:

Si $Y \sim F_Y(dx) \leftarrow F_Y(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$.

$F^{-1}(y) := \inf\{u \in \mathbb{R} \text{ t.q. } F(u) \geq y\}$,

entonces

si $U \sim \mathrm{Unif}(0,1)$,

$F^{-1}(U) \sim$ Distribución F:

$$\mathbb{P}[F^{-1}(U) \leq x] = \mathbb{P}[U \leq F(x)] = F(x)$$

Kallenberg & Pawitan