


Cálculo estocástico.

Asumiremos que nuestras v.a. están definidas en un espacio de prob. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Vectores Gaussianos:

X es una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+$

si

$$\mathbb{P}[X \in A] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) f_X(x) dx \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

$$f_X(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

Alternativamente:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}[e^{i\lambda X}] = e^{i\lambda\mu} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\lambda^2}$$

Más generalidad:

Si X_1, \dots, X_d son v.a. decimos que

(X_1, \dots, X_d) es un vector gaussiano si

$$\forall z_1, \dots, z_d \in \mathbb{R},$$

$z_1 X_1 + \dots + z_d X_d$ tiene distribución Gaussiana.

Ejemplo:

Si X_1, \dots, X_d son v.a. Gaussianas estándar independientes

¿es (X_1, \dots, X_d) un vector Gaussiano? Si, pues.

Para analizar el problema estudiamos

$Y = z_1 X_1 + \dots + z_d X_d$ ← ¿es una v.a. normal?

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda Y}] = \mathbb{E}[e^{i\lambda(z_1 X_1 + \dots + z_d X_d)}]$$

$$= \mathbb{E}[e^{i\lambda z_1 X_1 + \dots + i\lambda z_d X_d}]$$

$$= \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^d e^{i\lambda z_j X_j}\right]$$

$$= \prod_{j=1}^d \mathbb{E}[e^{i\lambda z_j X_j}]$$

$$= \prod_{j=1}^d e^{-\frac{(\lambda z_j)^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2} \lambda^2 \left(\sum_{j=1}^d z_j^2\right)}$$

⇒ $Y \sim \text{Normal}$ ⇒ (X_1, \dots, X_d) es un vector gaussiano.

Intempool:

Intuición incorrecta:

X, Y Gaussianas.

$$E[XY] = E[X]E[Y] = 0$$

. Si (X, Y) es un vector

Gaussiano, entonces si

$$E[XY] = 0, \quad X \text{ es indep de } Y.$$

. Pero si no es vector conjuntamente

$$\text{Gaussiano, } E[XY] = 0 \neq X \perp Y$$

Contraejemplo:

$$X \sim N(0, 1) \quad \zeta \text{ es una v.a con ley}$$

$$Y = \zeta X, \quad P[\zeta = -1] = P[\zeta = 1] = \frac{1}{2}$$

con $\zeta \perp X$.

Tarea: ver que Y es v.a. Gaussiana estándar.

Ley de un vector Gaussiano:

$\vec{x} := (x_1, \dots, x_d) \leftarrow$ mapeo de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$

Teorema:

Si \vec{x} es un vector Gaussiano,
con matriz de covarianzas no degenerada, entonces

$$P(\vec{x} \in A) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(x) \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^* \overset{\text{transpuesta de } x}{\Sigma^{-1}}(x-\mu)\right\} dx$$

Para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, donde

$$\Sigma = (\Sigma_{ij}; \quad 1 \leq i, j \leq d). \quad \Sigma_{ij} := E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$$

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) = (E[X_1], \dots, E[X_d]).$$

Prueba de la clase:

Lemma: $\vec{x} \stackrel{\text{ley}}{=} \mu + \Sigma^{1/2} \vec{z}$ $\vec{z} = (z_1, \dots, z_d)$,
 \uparrow

Como Σ es no degenerada y positiva definida, puedo sacar raíz

con $\{z_i\}_{i=1}^d$ i.i.d. $z_i \sim N(0, 1)$.

Entonces, \vec{x} tiene densidad, que por cambio de variable, es

$$f_{\vec{x}}(x_1, \dots, x_d) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^* \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}$$

Prueba alternativa:

Por cambio de variable, la función característica asociada

$$\alpha \quad g(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^* \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\} \quad \text{cs}$$

$$\vec{\lambda} \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\vec{\lambda} \cdot x} g(x) dx = * \quad \left(\Sigma^{-1/2} (x-\mu) \right)^* \left| \Sigma^{-1/2} (x-\mu) \right|$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\vec{\lambda} \cdot x} \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^* \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\} dx$$

cambiamos x por $y = \Sigma^{-1/2} (x-\mu)$ y obtenemos

$$* = \exp\{i\vec{\lambda} \cdot \mu\} \exp\left\{-\frac{1}{2} \lambda^* \Sigma \lambda\right\}.$$

coincide esto con la función característica de (X_1, \dots, X_d) :

$$\vec{\lambda} \mapsto \mathbb{E} \left[e^{i\lambda_1 X_1 + \dots + i\lambda_d X_d} \right] = *$$

como $Y := \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_d X_d$ es vector Gaussiano

$$* = \mathbb{E} \left[e^{iY} \right] = e^{i\mathbb{E}[Y] - \frac{1}{2} \text{Var}(Y)}$$

$$E[Y] = \vec{\lambda} \cdot \mu$$

$$\text{Var}[Y] = E\left[\left(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_d X_d - (\lambda_1 \mu_1 + \dots + \lambda_d \mu_d)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_d X_d\right)^2\right] - (\lambda_1 \mu_1 + \dots + \lambda_d \mu_d)^2$$

$$= \lambda_1^2 E[X_1^2] + \dots + \lambda_d^2 E[X_d^2]$$

$$+ 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j E[X_i X_j]$$

$$- (\lambda_1^2 \mu_1^2 + \dots + \lambda_d^2 \mu_d^2)$$

$$- 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \mu_i \mu_j$$

$$= \lambda_1^2 \text{Var}[X_1] + \dots + \lambda_d^2 \text{Var}[X_d] = \vec{\lambda}^* \Sigma \vec{\lambda}$$

$$+ 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \text{Cov}[X_i, X_j]$$

Pregunta itempool:

El contraejemplo

$X \sim N(0, 1)$, simétrica
↓

$Y = \beta X$, $\beta \sim \text{Ber}(\frac{1}{2}, \{-1, 1\})$.

funciona; pues

$$X + Y = (1 + \beta) X \quad Y$$

$$P[X + Y = 0] \geq P[\beta = -1] = \frac{1}{2}$$

Ruido blanco

Lemma:

Si X es un vector Gaussiano, su ley está determinada por su media $\mu = E[X] = (E[X_1], \dots, E[X_d])$

$$(X = (X_1, \dots, X_d))$$

y su matriz de covarianza $\Sigma = [\Sigma_{ij}]$

$$\text{con } \Sigma_{ij} := \text{Cov}[X_i, X_j].$$

Nota "curiosa"

Si $l: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal la forma general para l es

$$l(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \cdot x$$

$$x = (x_1, \dots, x_d) \quad \text{Para ciertos } \lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$$

En este contexto, X un vector en \mathbb{R}^d es gaussiano si $l(X)$ es v.a. gaussiana

Ruido blanco:

Consideremos el espacio

$$\mathcal{H} = L^2([0, 1]; \mathbb{R}), \text{ es decir}$$

$$f \in \mathcal{H} \text{ si } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ i.g.}$$

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$$

Definición:

Un mapeo $G: \mathcal{H} \rightarrow L^2(\Omega)$ es un ruido blanco si

$$\bullet G(f) \text{ es una v.a. Gaussiana centrada}$$

$$\forall f \in \mathcal{H}$$

$$\bullet E[G(f)G(h)] = \langle f, h \rangle_{\mathcal{H}} := \int_0^1 f(x)h(x)dx$$

Recordar que si X es un vector gaussiano con media cero y covarianza Σ

$$\text{y } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d), \eta = (\eta_1, \dots, \eta_d)$$

$$E[(\lambda \cdot X) \cdot (\eta \cdot X)] = \lambda \cdot \eta = \lambda^T \Sigma \eta$$

Nota:

Esta construcción se puede generalizar

1.) $L^2([0,1]; \mathbb{R})$ puede reemplazarse

por $H := L^2(E; \mathbb{R})$

$(E, \mathcal{B}(E), \mu)$ ← un espacio de medida

E es un métrico separable.

El ruido blanco se define como

- $G(f)$ es gaussiano centrado $\forall f \in H$

- $E[G(f)G(h)] = \langle f, h \rangle_H = \int_E f(x)h(x)\mu(dx)$

Otra generalización:

Definir H^0 como un espacio de funciones escalonadas

$$H^0 = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{I_k} \mid a_k \in \mathbb{R}, I_k \leftarrow \text{intervalos} \right\}$$

Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^0}$ mediante

$$\langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle_{H^0} := R(s,t) \leftarrow \text{"función de covarianza"}$$

$H :=$ cerradura de H^0 respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^0}$

(ver libro libro de Peccati-Nourdin).

De regreso al ruido blanco.

Pregunta natural: ¿existe un ruido blanco?

ingredientes que tenemos

1.) $H = L^2([0,1]; \mathbb{R})$

2.) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

3.) $G: H \rightarrow L^2(\Omega) \leftarrow G: H \rightarrow L^2(\Omega)$

$$\Downarrow \\ G = \{G_h\}_{h \in H}$$

Recordar que si X es un vector gaussiano en \mathbb{R}^d con entradas i.i.d $\sim N(0,1)$.

$\{X_i\}_{1 \leq i \leq d} \leftarrow$ v.a. i.i.d $\sim N(0,1)$

$$X = \sum_{i=1}^d e_i X_i \quad e_i = (0, \dots, \overset{\text{componente } i}{1}, \dots)$$

Pregunta natural: ¿existe un ruido blanco?

Respuesta: sí, pues se puede construir G de la siguiente manera

1.) Sea $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $L^2([0,1]; \mathbb{R})$. \leftarrow Usar base de Fourier

• Usar funciones de Haar.

2.) \exists una elección de v.a. $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ i.i.d. $\sim N(0,1)$.

3.) Si $h \in \mathcal{H} = L^2([0,1]; \mathbb{R})$.

$$\Rightarrow h = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i \quad (\alpha_j = \langle h, f_j \rangle) \\ = \int_0^1 h(x) f_j(x) dx$$

$$G(h) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i$$

↑
jugar el rol de $G(f_i)$.

(las G 's tienen propiedades análogas a las X_i).

Necesitamos ver que

$$G(h) := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i \quad \text{converge}$$

en $L^2(\Omega)$. Para esto basta ver

que $\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ es de Cauchy

Prueba (sketch): si $n, m \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i - \sum_{i=1}^m \alpha_i X_i \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$= \left\| \sum_{i=n+1}^{n+m} \alpha_i X_i \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \leftarrow \text{se puede calcular fácil}$$

$$= \sum_{i=n+1}^{n+m} \alpha_i^2 \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

pues $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i^2 < \infty$

La covarianza es lo correcto?

$$\mathbb{E}[G(f)G(h)]$$

$$= \mathbb{E}\left[G\left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle_{\mathcal{H}} f_i\right) G\left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle h, f_j \rangle_{\mathcal{H}} f_j\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle_{\mathcal{H}} \langle h, f_j \rangle_{\mathcal{H}} \underbrace{\mathbb{E}[G(f_i)G(f_j)]}_{= \langle f_i, f_j \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{i,j}}$$

checcar

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle_{\mathcal{H}} \langle h, f_i \rangle_{\mathcal{H}}$$

$$\mathbb{E}[G(f_i)G(f_j)] = \delta_{i,j}$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle_{\mathcal{H}} f_i, \sum_{j=1}^{\infty} \langle h, f_j \rangle_{\mathcal{H}} f_j \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$= \langle f, h \rangle_{\mathcal{H}}$$

Evidentemente $\mathbb{E}[G(f)] = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}$

□

Movimiento Browniano

Definiremos un proceso $B = \{B_t\}_{t \in [0,1]}$
a partir del ruido blanco.

Si G es un ruido blanco y $A \in \mathcal{B}([0,1])$,

$G(\mathbb{1}_A)$ es una v.a. Gaussiana centrada.

Más aún, si $A, B \in \mathcal{B}([0,1])$ y

A, B son ajenos (pensar en $A =]0, s[$, $B =]s, s+1[$),

$G(\mathbb{1}_A)$ y $G(\mathbb{1}_B)$ son independientes:

$$\mathbb{E}[G(\mathbb{1}_A)G(\mathbb{1}_B)] = \langle \mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 \mathbb{1}_A^{(x)} \mathbb{1}_B^{(x)} dx = 0$$

Definimos, para $s \in [0, 1]$,

$$B_s := G(\mathbb{1}_{[0, s]}).$$

Diremos que $B = \{B_s; s \in [0, 1]\}$ es un movimiento pre-Browniano.

Propiedades

- $\forall s_1, \dots, s_d \in \mathbb{R}_+$, y $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$,
 $\lambda_1 B_{s_1} + \dots + \lambda_d B_{s_d}$ es una variable Gaussiana centrada. (i.e. $(B_{s_1}, \dots, B_{s_d})$ es un vector Gaussiano).

(justificación:

$$\begin{aligned} \lambda_1 B_{s_1} + \dots + \lambda_d B_{s_d} &= \lambda_1 G(\mathbb{1}_{[0, s_1]}) + \dots + \lambda_d G(\mathbb{1}_{[0, s_d]}) \\ &= G(\lambda_1 \mathbb{1}_{[0, s_1]} + \dots + \lambda_d \mathbb{1}_{[0, s_d]}) \sim \text{Normal} \end{aligned}$$

- $\forall 0 \leq s < t \leq 1$,

$$B_t - B_s \sim N(0, t-s)$$

(justificación:

$$\begin{aligned} B_t - B_s &= G(\mathbb{1}_{[0, t]}) - G(\mathbb{1}_{[0, s]}) \\ &= G(\mathbb{1}_{(s, t]}) \sim N(0, \|\mathbb{1}_{(s, t]}\|_{L^2([0, 1]; \mathbb{R})}^2) \\ &= N(0, \underbrace{\int_s^t \mathbb{1}_{(s, t]}(u) du}_{t-s}) \end{aligned}$$

- $0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_d$, entonces

$B_{s_0}, B_{s_1} - B_{s_0}, B_{s_2} - B_{s_1}, \dots, B_{s_d} - B_{s_{d-1}}$ son v.a. independientes

$H \leftarrow$ Hilbert. Con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$

$$X: \Omega \rightarrow H$$

Ingrediente extra: $Q: H \rightarrow H$ no
negativa definida.

$$\langle f, h \rangle_Q := \langle f, Qh \rangle_H$$

$\mu \leftarrow$ medida en H es una medida

Q -Gaussiana centrada si

$$(H, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$$

$h \rightarrow \ell(h)$ es una v.a. gaussiana centrada

$\forall \ell: H \rightarrow \mathbb{R}$ func. lineal.

Ver libro de Da-Prato.

Teorema:

Si Q satisface cierta condición; entonces

\exists una medida Q -Gaussiana

Nota:

Si $X \sim F_x(dx) \leftarrow F_x(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\}$.

$F^{-1}(y) := \inf \{ u \in \mathbb{R} \text{ t.q. } F(u) \geq y \}$,

entonces

si $U \sim \text{Unif}(0,1)$,

$F^{-1}(U) \sim$ Distribución F :

$$\mathbb{P}\{F^{-1}(U) \leq x\} = \mathbb{P}\{U \leq F(x)\} = F(x)$$

Kallenberg & Pawitan

Ruido blanco:

$$G: \mathcal{H} \longrightarrow L^2(\Omega) \quad \mathcal{H} = L^2([0,1]; \mathbb{R})$$

Usamos muchas veces que G era lineal.

$$\mathbb{E}[G(h)G(f)] = \langle h, f \rangle_{\mathcal{H}}$$

Lemma:

G es lineal

prueba (sketch)

Queremos ver que si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $h, f \in \mathcal{H}$

$$G(\lambda_1 h + \lambda_2 f) - \lambda_1 G(h) - \lambda_2 G(f) = 0? \quad \textcircled{*}$$

Para probar $\textcircled{*}$ sacamos

$$\|G(\lambda_1 h + \lambda_2 f) - \lambda_1 G(h) - \lambda_2 G(f)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$= -2 \mathbb{E}[G(\lambda_1 h + \lambda_2 f) \lambda_1 G(h)] + \mathbb{E}[G(\lambda_1 h + \lambda_2 f)^2]$$

$$- 2 \mathbb{E}[G(\lambda_1 h + \lambda_2 f) \lambda_2 G(f)] + \lambda_1^2 \mathbb{E}[G(h)^2]$$

$$+ 2 \mathbb{E}[\lambda_1 G(h) \lambda_2 G(f)] + \lambda_2^2 \mathbb{E}[G(f)^2] = \dots = 0$$

Pre-mov Browniano

$$B_t := G(\mathbb{1}_{[0,t]})^{\otimes} \quad \mathbb{1}_{[0,t]} \in L^2([0,1]; \mathbb{R})$$

Propiedades:

B_t definido como en $\textcircled{1}$ es un proceso Gaussiano con media cero y covarianza

$$R(s,t) := \mathbb{E}[B_s B_t] = s \wedge t.$$

prueba:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_s B_t] &= \mathbb{E}[G(\mathbb{1}_{[0,s]}) G(\mathbb{1}_{[0,t]})] \\ &\stackrel{t > s}{\uparrow} = \langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle_H \stackrel{\text{cheocar}}{\downarrow} = s \wedge t \quad \square \end{aligned}$$

Teorema:

Un proceso $X = \{X_t\}_{t \in [0,1]}$

tiene la misma ley que B

(i.e. $\forall t_1, \dots, t_d \in [0,1]$,

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_d}) \stackrel{\text{ley}}{=} (B_{t_1}, \dots, B_{t_d}).$$
 sii alguna

de las siguientes condiciones se cumple

i) X es un proceso Gaussiano centrado

$$\text{y } \mathbb{E}[X_s X_t] =: R(s, t) = st.$$

ii) $X_0 = 0$ c.s. y $\forall s < t$,

$$X_t - X_s \sim N(0, t-s) \text{ y } X_t - X_s \text{ es}$$

independiente de $\sigma(X_u; u \leq s)$.

iii) $X_0 = 0$ c.s. y $\forall 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_d$, las

variables $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_d} - X_{t_{d-1}}$

son independientes con ley

$$X_t - X_s \sim N(0, t-s), \quad s < t.$$

Probar esto de tarea

Pequeño hint para el inciso ii).

Suponer que X es un proceso Gaussiano centrado, con covarianza $R(s, t) = t \wedge s$.

Queremos probar que:

$\forall A \in \sigma(B_u; 0 \leq u \leq s)$ y $\forall \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
continua y acotada (recordar que $s < t$)

$$\mathbb{E}[1_A \psi(B_t - B_s)] = \mathbb{P}(A) \mathbb{E}[\psi(B_t - B_s)] \quad (\star)$$

Basta probar (\star) para el caso en que

$A \in \mathcal{C} \subset \sigma(B_u; 0 \leq u \leq s)$, con

$\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(B_u; 0 \leq u \leq s)$, y t.q. \mathcal{C} es

cerrado bajo intersecciones. Candidato para \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} = \left\{ \left\{ B_{u_i} \leq x_i, \{1 \dots n\} B_{u_d} \leq x_d \right\}; \begin{array}{l} u_i \in [0, s] \\ x_i \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Si $A = \{ B_{0_1} \leq x_1, \dots, B_{0_d} \leq x_d \}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \psi(B_t - B_s)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \psi(B_t - B_s) | B_{0_1}, \dots, B_{0_d}]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{E}[\psi(B_t - B_s) | B_{0_1}, \dots, B_{0_d}]] \end{aligned}$$

Sabemos que B_0 es un proceso Gaussiano

$\Rightarrow B_t - B_s$ es indep. de B_{0_1}, \dots, B_{0_d}

\uparrow

- $(B_{0_1}, \dots, B_{0_d}, B_t - B_s)$ \leftarrow vector Gaussiano.

- Usaríamos que si (V, W) es un vector Gaussiano centrado,

$\mathbb{E}[WV] = 0 \Rightarrow V$ es indep. de W .

El resto queda de tarea.

Nota: Suponer que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_d$.

$(B_{t_1}, \dots, B_{t_d})$ es un vector

Gaussiano centrado. (se puede ver que es no degenerado)

¿Cuál es la densidad de dicho vector?

la densidad

$p(x_1, \dots, x_d) \leftarrow$ densidad de $(B_{t_1}, \dots, B_{t_d})$

se determina mediante las covarianzas. La

fórmula es

$$p(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{t_1(t_2-t_1)\dots(t_d-t_{d-1})}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^d \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right\}$$

Propiedades adicionales:

Si $X \stackrel{\text{ley}}{=} B$. Entonces se cumple que

i) $-X \stackrel{\text{ley}}{=} X$ (simetría)

ii) $\forall \lambda > 0$, el proceso $X^\lambda = \{X_t^\lambda\}_{t \in [0,1]}$

$X_t^\lambda := \frac{1}{\lambda} X_{\lambda^2 t}$ satisface $X^\lambda \stackrel{\text{ley}}{=} X$

(autosimilitud)

$$\text{iii) } \forall s \geq 0, \quad B_t^{(s)} := B_{t+s} - B_s$$

es un movimiento Browniano es

independiente de $\sigma(B_u; u \leq s)$ (propiedad de Markov simple)

Propiedades de las trayectorias

Definición:

El mapeo

$$[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto X_t(\omega)$$

se conoce como

la "trayectoria del

proceso X .

para $\omega \in \Omega$ dada

hasta el momento, no sabemos mucho

de la "trayectoria" de un mov.

pre-browniano.

Definición: $I \subset \mathbb{R}_+$ un intervalo

Considerar procesos $X = \{X_t; t \in I\}$ y $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t; t \in I\}$

Decimos que X es una modificación de

\tilde{X} si $\forall t \in I, \mathbb{P}[X_t = \tilde{X}_t] = 1$.

Pregunta de Itempool.

Problema: la igualdad

$\mathbb{P}[X_t = \tilde{X}_t] = 1$ se cumple
para t dado.

→ sii $X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)$ para
 $\omega \in \Omega_t$ t.q. $\mathbb{P}[\Omega_t] = 1$.

Contraejemplo:

$$X_t = 0 \quad \forall t \in (0, 1].$$

$$Y_t = \begin{cases} X_t & \text{si } t \neq U \\ 1 & \text{si } t = U \end{cases}$$

$U \sim \text{Uni}[(0, 1)]$. Ahora, $\forall t \in (0, 1]$,

$$\mathbb{P}[X_t \neq Y_t] = \mathbb{P}[U = t] = 0$$

Definición:

$X = \{X_t\}_{t \in I}$ y $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t\}_{t \in I}$ son procesos indistinguibles si $\exists N \subset \Omega$ t.g. $\mathbb{P}(N) = 0$

t.g. $\forall \omega \in \Omega \setminus N$, y $\forall t \in I$,

$$X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)$$



$$\mathbb{P}[X_t = \tilde{X}_t \quad \forall t \in I] = 1$$

Nota: Las definiciones tienen sentido cuando los procesos toman valores en un espacio métrico separable (E, d) .

Propiedades trayectoriales

$X \leftarrow X = \{X_t\}_{t \in I}$ es un proceso estocástico

Hipótesis:

- $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo acotado
- X toma valores en un espacio métrico completo y separable
- \exists constantes $q, \varepsilon, C > 0$, t.q.

$$E |d(X_s, X_t)|^q \leq C |t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Entonces $\exists \tilde{X} = \{\tilde{X}_t\}_{t \in I}$ t.q. \tilde{X} es una modificación de X , definido en

(Ω, \mathcal{F}, P) , t.q. $\forall \alpha \in (0, \frac{\varepsilon}{q})$,

$$\exists \Omega_\alpha \in \mathcal{F} \quad P[\Omega_\alpha] = 1$$

$$|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)| \leq C(\omega) |t-s|^\alpha \quad \forall \omega \in \Omega_\alpha.$$

↑

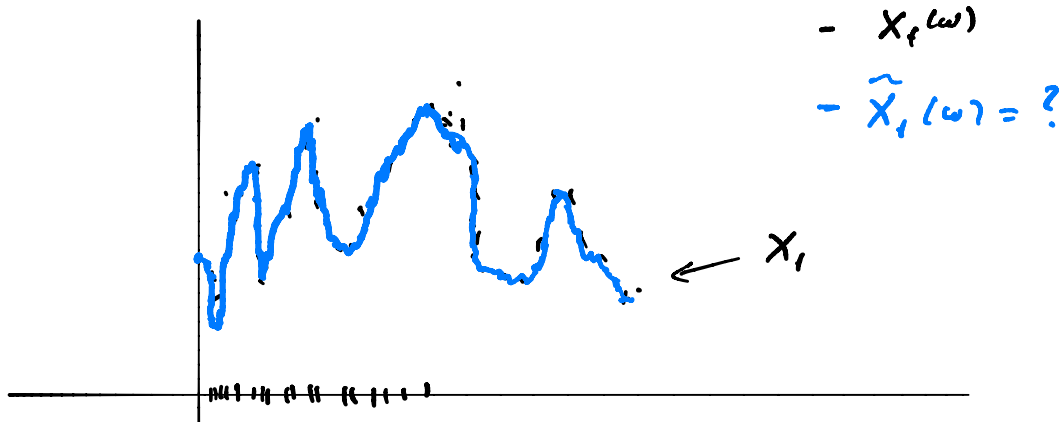
Hölder continuidad de orden α .

Este resultado se conoce como teorema de continuidad de Kolmogorov.

prueba:

Intuición: $\dots 0$

$\tilde{X}_t(\omega) \stackrel{?}{=} X_t(\omega)$ para "muchos" valores de t



Heurística:

Sea D un conjunto "grande" DCI que definiéramos
más tarde: Queremos definir \tilde{X} de la

siguiente manera:

$$\tilde{X}_t = \begin{cases} X_t & \text{si } t \in D \\ \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in D}} X_s & \text{si } s \notin D \end{cases} \quad \leftarrow \text{esto es sólo heurístico}$$

Problema de ésta definición:

$\lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in D}} X_s$ sólo está bien definido en un conjunto de probabilidad 1.

Formalización:

Paso 1: Considerar el proceso $t \mapsto X_t$, pero restringido a $t \in D$

$$D = \{\text{diádicos en } I\} = \{s \in I; s = i \cdot 2^{-n}, i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$$

Veremos que $D \rightarrow \mathbb{R}$ es Hölder continuo
 $t \mapsto X_t$

de orden $\alpha \in (0, \frac{\epsilon}{q}]$ con probabilidad 1, es

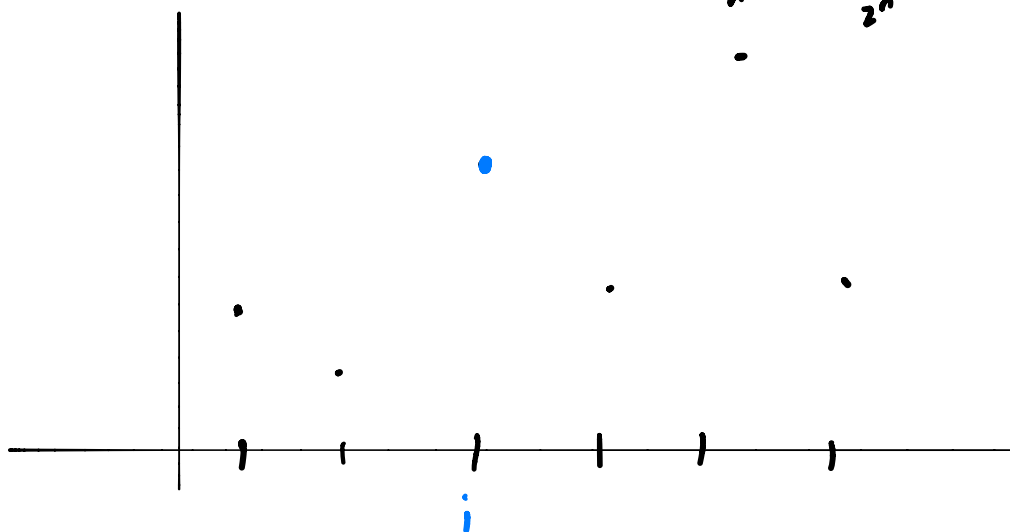
decir, $\exists \Omega_\alpha \in \mathcal{F}$ t.q. $\forall \omega \in \Omega_\alpha$

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq C(\omega) |t-s|^\alpha \quad \text{p.a. } C(\omega) \in \mathbb{R}$$

Considerar los eventos

$$\left\{ d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\right) \geq 2^{-n\alpha} \right\} = \left\{ d(X_s, X_t) \geq |t-s|^\alpha \right\}$$

$$s = \frac{i-1}{2^n}, \quad t = \frac{i}{2^n}$$



Probaremos que

$$\leq C 2^{nq\alpha} 2^{-(1+\epsilon)n}$$

$$\mathbb{P} \left[d \left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}} \right) \geq 2^{-n\alpha} \right]^{qq}$$

$$= \mathbb{P} \left[d \left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}} \right)^q \geq 2^{-n\alpha q} \right]$$

$$\leq 2^{n\alpha q} \mathbb{P} \left[d \left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}} \right)^q \right] \leq C 2^{n\alpha q} (2^{-n})^{1+\epsilon}$$

$$= C 2^{nq\alpha} 2^{-(1+\epsilon)n}$$

Ahora, vamos a controlar:

$$\mathbb{P} \left[\bigcup_{i=1}^{2^n} \left\{ d \left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}} \right) \geq 2^{-n\alpha} \right\} \right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{2^n} \mathbb{P} \left[d \left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}} \right) \geq 2^{-n\alpha} \right]$$

$$\leq C \sum_{i=1}^{2^n} 2^{n\alpha q} (2^{-n})^{1+\epsilon} = C 2^{n\alpha q - n\epsilon} = C 2^{-n(\epsilon - \frac{\alpha}{q})}$$

Ahora voy a analizar

$$\overline{\lim}_n \bigcup_{i=1}^{2^n} \left\{ d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\right) \geq 2^{-n\alpha} \right\}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{2^n} \left\{ d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\right) \geq 2^{-n\alpha} \right\} \right).$$

Vamos a probar que

$$\mathbb{P} \left[\overline{\lim}_n \bigcup_{i=1}^{2^n} \left\{ d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\right) \geq 2^{-n\alpha} \right\} \right] = 0. \quad \textcircled{*}$$

$$\uparrow$$

$$\left\{ d(X_s, X_t) \geq |t-s|^\alpha \right\} \leftarrow s = \frac{i-1}{2^n}, t = \frac{i}{2^n}$$

Supongamos que $\textcircled{*}$ pasa. Entonces

$$\text{si } \omega \in \left(\overline{\lim}_n \bigcup_{i=1}^{2^n} \left\{ d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\right) \geq 2^{-n\alpha} \right\} \right)^c$$

$$\Rightarrow \# \left\{ n \in \mathbb{N} \mid d\left(\underbrace{X_{\frac{i-1}{2^n}}}_s, \underbrace{X_{\frac{i}{2^n}}}_t\right) \geq \underbrace{2^{-n\alpha}}_{|t-s|^\alpha} \text{ p.a. } i \leq 2^n \right\} < \infty$$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N,$

(tomar
 $N = \max \# \{n \in \mathbb{N} \mid d(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}) \geq 2^{-n\alpha} \text{ p.a. } i \leq 2^n\}$)

$$d(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}) \leq 2^{-n\alpha} \quad \forall \quad i \leq 2^n$$

$$\Rightarrow K_\alpha(\omega) := \sup_{n \geq 1} \sup_{i \leq 2^n} \frac{d(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}})}{2^{-n\alpha}} < \infty \quad \text{c.s.}$$

$$\frac{X_t - X_s}{|t - s|^\alpha}$$

s y t son de cierta manera

Hasta ahora, tenemos que para

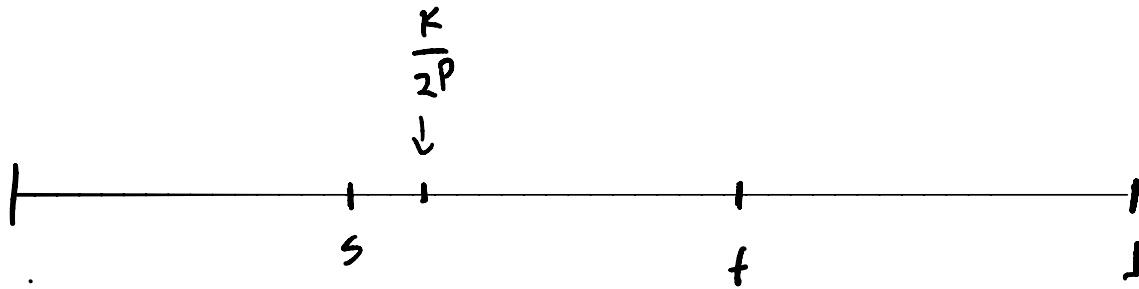
$$\omega \in \Omega_\alpha := \left(\overline{\lim}_n \bigcup_{i=1}^{2^n} \{d(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}) \geq 2^{-n\alpha}\} \right)^c$$

$$d(X_{\frac{i-1}{2^n}}(\omega), X_{\frac{i}{2^n}}(\omega)) \leq K_\alpha 2^{-n\alpha} \quad (**)$$

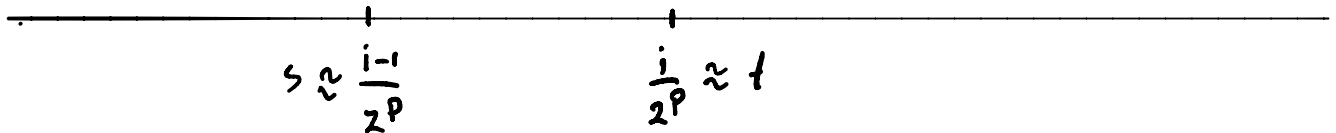
Falta analizar $d(X_s(\omega), X_t(\omega))$ para s y t generales.

Probaremos que si $s < t$, $s, t \in D$

$$d(X_s(\omega), X_t(\omega)) \leq \frac{2K_\alpha(\omega)}{1-2^{-\alpha}} |t-s|^\alpha \quad \leftarrow \text{casi lo que queremos probar.}$$



↓ comparar con



Tomar $p \in \mathbb{N}$ como $p = \min\{n \in \mathbb{N} ; 2^{-n} \leq |t-s|\}$
 y definimos a K como el menor entero

t.q. $\frac{K}{2^p} \geq s$. Entonces

$$s = \frac{K}{2^p} - \varepsilon_1 2^{-p-1} - \varepsilon_2 2^{-p-2} - \dots - \varepsilon_\ell 2^{-p-\ell} \quad \left. \vphantom{s} \right\} \varepsilon_i, \tilde{\varepsilon}_i \in \{0,1\}$$

$$t = \frac{K}{2^p} + \tilde{\varepsilon}_1 2^{-p-1} + \varepsilon_2 2^{-p-2} + \dots + \varepsilon_\ell 2^{-p-\ell}$$

Finalmente,

$$s_i = K 2^i - \varepsilon_i 2^{-p-1} - \dots - \varepsilon_i 2^{-p-i}$$

$$t_j = K 2^j + \tilde{\varepsilon}_1 2^{-p-1} + \dots + \tilde{\varepsilon}_j 2^{-p-j}$$

Entonces, como $s = s_\ell$ y $t = t_m$, de

manera que podemos escribir (omitiendo la dependencia en ω).

$$d(X_s, X_t) = d(X_{s_\ell}, X_{t_m})$$

$$\leq d(X_{s_0}, X_{t_0}) + \sum_{i=1}^{\ell} d(X_{s_{i-1}}, X_{s_i}) + \sum_{j=1}^m d(X_{t_{j-1}}, X_{t_j})$$

$$\leq K_\alpha(\omega) 2^{-p\alpha} + \sum_{i=1}^{\ell} K_\alpha(\omega) 2^{-(p+i)\alpha} + \sum_{j=1}^m K_\alpha(\omega) 2^{-(p+j)\alpha}$$

de $\textcircled{+}$

= ... \leftarrow usar la suma geométrica

$$= 2 K_\alpha(\omega) (1 - 2^{-\alpha}) 2^{-p\alpha} \leq 2 K_\alpha(\omega) (1 - 2^{-\alpha}) |t - s|^\alpha$$

Propuesta de Luis: usar

$$s = \frac{i}{2^p} \quad t = \frac{j}{2^p}$$

Finalmente, definimos

$$\tilde{X}_t(\omega) := \left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{s \uparrow \\ s \in D}} X_s(\omega) \quad \text{si } \omega \in \Omega_\alpha \\ 0 \quad \text{si } \omega \in \Omega_\alpha^c \end{array} \right\} \text{(El límite existe por lo probado antes)}$$

La Hölder continuidad de $\widehat{X}_t(\omega)$ se sigue de la Hölder continuidad en D (sobre el conjunto Ω_a).

Tarea:

Ver que existe una modificación de

$B_t = G(\mathbb{1}_{[0,t]})$ que tiene trayectorias

Hölder continuas de índice $\alpha \forall \alpha \in (0, \frac{1}{2})$.

