


Cálculo de Malliavin en espacio Poisson:

Objetivo: estudiar la ley de objetos que surgen como función de procesos Poisson.

Approach:

Seguiré el libro de Peccati - Ritzner (analogía al caso de cálculo de Malliavin Gaussiano).

Objetivo personal:

Estudiar el límite de la ley de v.a.

$$F_n = \sum_{k=1}^{nt} f(X_k) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ es una función de prueba}$$

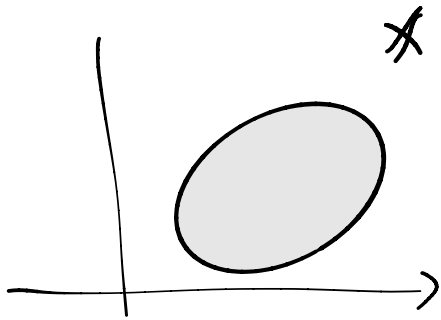
y X_k son v.a. estables que son

"débilmente independientes"

Propiedades básicas de procesos puntuales

de Poisson

$(X, \mathcal{X}) \leftarrow$ un espacio de medida.



Consideremos un mapeo η de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio

$N_\sigma =$ todas las medidas en (X, \mathcal{X})

que son σ -finitas.

análogo $\longleftrightarrow \{ \eta(A); A \in \mathcal{X} \}$

Supondremos que el mapeo

$$\eta: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (N_\sigma, \mathcal{N})$$

es medible, y obtendremos esto pidiendo

pidiendo que \mathcal{N} sea la mínima σ -alg.

que hace a η medible.

Heurística de (N_0, \mathcal{N}) :

Una medida de referencia para obtener buenos ejemplos:

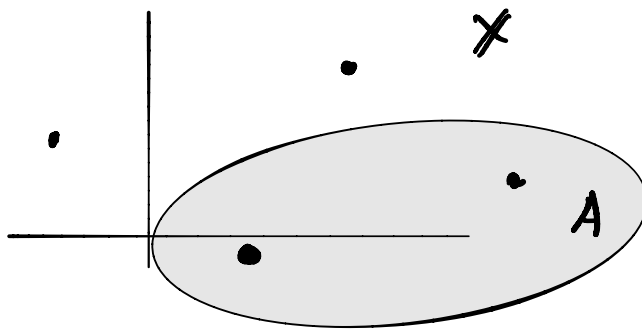
- Ejemplo 1:-)

$\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

$X_k: \Omega \rightarrow \mathbb{X}$

i.i.d con ley común \mathbb{Q}

"lanza n muestras de $\{X_k\}$ "



$\eta(A) := \#\{i \in \mathbb{n}; X_i \in A\}$.

$A \in \mathcal{K}$

Alternativamente

$$\eta = \sum_{k=1}^n \delta_{X_k}$$

- Ejemplo 2:

Tomar una v.a. $k: \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Poisson(λ), $\lambda > 0$.

$$\eta = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{X_k}$$

Tomamos $v: X \rightarrow \mathbb{R}$ medible y acotada.

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int v(x) \eta(dx)} \right]$$

sustituimos $\eta(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{X_k}$

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int v(x) \eta(dx)} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \mathbb{E} \left[e^{-\left(\sum_{j=0}^k \delta_{X_j}\right)(v)} \right]$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{E} \left[e^{-v(X_k)} \right]^k$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\int e^{-u(x)} Q(dx) \right)^k = \dots$$

con $X_i \sim Q(dx)$. Si definimos $\mu = \lambda Q$

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int u(x) \eta(dx)} \right] = e^{-\int (1 - e^{-u(x)}) \mu(dx)}$$

Obs. importante: si $u(x) = 0$, entonces

$1 - e^{-u(x)} = 0$. De aquí se sigue que

si $\{A_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{X}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$,

$\Rightarrow \eta(A_1), \dots, \eta(A_n)$ son indep.

Además, satisfacen $\eta(A_i) \sim \text{Pois}(\mu(A_i))$.

Hasta el momento, solo llevamos un ejemplo:

$$\eta = \sum_{k=0}^{\infty} \int \chi_k$$

Notar que funcionales de η



Funciones (k, x_1, x_2, \dots)

Objetivo a "corto" plazo

Si: $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F} = \sigma(\eta), \mathbb{P})$, entonces

$$X = \mathbb{E}[X] + \sum_{q=1}^{\infty} \int_q [X], \quad \text{donde}$$

- $\int_q [X]$ son componentes

ortogonales $\mathbb{E}[\int_q [X] \int_{\tilde{q}} [X]] = 0$

si $q \neq \tilde{q}$

- $J_q(x)$ son fáciles de estudiar.

La elección de $J_q(x)$ van a

ser "integrales múltiples de Itô".

Plan concreto:

1°) Definir $J_q(x)$ adecuadamente

2°) Definir 3 operadores "fundamentales"

sobre v.a. X "adecuadas".

- $D \leftarrow$ Derivada de Malliavin

- $S \leftarrow$ Integral de Skorohod

- $L \leftarrow$ Operador de Ornstein-Uhlenbeck.

$\rightarrow L = -SD \leftarrow$ en cierto subdominio de $L^2(\mathcal{N})$

"Filosóficamente", calcular

$E[X f(x)]$ es "más o menos fácil" si

$$X = S(u)$$

Resultado clave:

$h: \mathbb{N}_0 \times X \rightarrow [0, \infty]$. Entonces

$$\mathbb{E} \left[\int h(\eta, x) \eta(dx) \right] = \mathbb{E} \left[\int h(\eta + \delta_x, x) \mu(dx) \right]$$

↑

Fórmula de Mecke

(intuición: tomar $\eta = \sum_{k=0}^K \delta_{x_k}$

$$-h(\eta, x) := \sum_{i=1}^m k_i \eta(e^{-\tilde{c}_i(\cdot)}) e^{-\tilde{c}_i x}$$

Nota:

Ver a la v.a.

$$h(\omega, x) = 0$$

↑
componente
aleatoria

Parámetro



En cálculo de Malliavin Gaussiano es muy útil considerar

$$\int \dots \int \psi(x_1, \dots, x_n) \mathcal{B}(dx_1) \dots \mathcal{B}(dx_n).$$

Emulando esta construcción, nos gustaría estudiar

$$\mathbb{E} \left[\int_{X^m} h(\eta, x_1, \dots, x_n) \eta(dx_1) \dots \eta(dx_n) \right] = \text{Algo que se integra respecto a } \mu$$

Antes de continuar:

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathcal{X}} h(\eta, x) \eta(dx) \right] = \mathbb{E} \left[\int_{\mathcal{X}} h(\underbrace{\eta + \delta_x}_{\tilde{\eta}}, x) \mathcal{M}(dx) \right]$$

$$\Downarrow \text{Si } \eta = \sum_{k=1}^{\eta(\mathcal{X})} \delta_{X_k}$$

$$\eta(\mathcal{X}) = K \sim \text{Pois}(\lambda)$$

$\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d.

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathcal{X}} h(\eta - \delta_x, x) \eta(dx) \right] = \mathbb{E} \left[\int_{\mathcal{X}} h(\eta, x) \mathcal{M}(dx) \right]_{\oplus} \quad X_i \sim Q$$

Notar que

$$\int_{\mathcal{X}} h(\eta - \delta_x, x) \eta(dx) = \sum_i h\left(\sum_{k \neq i} \delta_{X_k}, X_i\right)$$

Objetivo: hacer que \oplus se generalice a varias variables:

Definir

$\eta^{(m)}$ ← medida aleatoria en \mathcal{X}^m

$$\eta^{(m)}(C) := \sum_{i_1, \dots, i_m \leq \eta(\mathcal{X})} \mathbb{1}_C(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$$

$C \in \mathcal{X}^m$ con $\sum \neq$ indicando que

los índices son distintos 2 a 2.

Notación:

$$\sum_{i_1, \dots, i_m \in \mathcal{X}} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$$

$$= \sum_{i_1=1}^{\eta(\mathcal{X})} \sum_{i_2=1}^{\eta(\mathcal{X})} \sum_{i_3=1}^{\eta(\mathcal{X})} \mathbb{1}_{\{i_1 \neq i_2, i_1 \neq i_3, i_2 \neq i_3\}} f(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$$

\uparrow
 s_i
 $m=3$

Cómo evaluamos $\eta^{(m)}$

Tomar $C \in \mathcal{P}^{\otimes m}$ $C = B^m$ con $B \in \mathcal{X}$

$$\eta^{(m)}(B^m) = \sum_{i_1, \dots, i_m \in \mathcal{X}} \mathbb{1}_B(x_{i_1}) \dots \mathbb{1}_B(x_{i_m})$$

$$= \eta(B)(\eta(B)-1)(\eta(B)-2) \dots (\eta(B)-m+1)$$

En lo sucesivo, llamaremos a $\eta^{(m)}$ la medida factorial de η (definida en \mathcal{X}^m)

Nota: Notar que

$$\eta^{(m+1)}(C) = \int_{\mathcal{X}^m} \left[\int \mathbb{1}_{\{(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \in C\}} \eta(dx_{m+1}) - \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{\{(x_1, \dots, x_m, x_j) \in C\}} \right] \eta^{(m)}(dx_1, \dots, dx_m)$$

Proposición

Sea $\eta \leftarrow$ proceso puntual en \mathbb{X} . Entonces existe una elección única c.s. de medidas

$\eta^{(m)}$ definidas en \mathbb{X}^m y t.g.

$$- \eta^{(1)} = \eta$$

$$- \eta^{(m+1)}(C) = \int_{\mathbb{X}^m} \left[\int \mathbb{1}_{\{(x_1, \dots, x_m, x) \in C\}} \eta(dx_{m+1}) - \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{\{(x_1, \dots, x_m, x_i) \in C\}} \right] \eta^{(m)}(dx_1, \dots, dx_m)$$

Esto nos permite definir $\eta^{(m)} \leftarrow$ la medida factorial aún cuando η no tiene la forma

$$\eta = \sum_{k=1}^{\eta(\mathbb{X})} \delta_{X_k} \quad \checkmark$$

Para dónde vamos:

Representación de Fock:

Hay ocasiones en que descomponer un espacio de Hilbert V de la siguiente manera

$$V \approx \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes k} \quad \text{donde } \mathcal{H} \text{ es un Hilbert "sencillo".}$$

En el caso Gaussiano (si tengo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ i.g. $(L^2(\Omega), \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es i.g. $\mathcal{F} = \sigma(\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+})$)

existe el teorema de descomposición en cuos

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_q.$$

\mathcal{H}_q son espacios ortogonales generados

por v.a. del tipo $\int \dots \int \psi(t_1, \dots, t_m) B(dt_1) \dots B(dt_m)$ se interseca con $\in L^2([0, \infty))^{\otimes m}$

$$\mathcal{H}_q = \left\{ \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_m} \psi(t_1, \dots, t_m) B(dt_1) \dots B(dt_m) \right\}$$

Usaremos $\eta^{(m)}(\cdot)$ como reemplazo de

$B(dt_1) \dots B(dt_m) \leftarrow$ se define de manera sutil.

Las propiedades de isometría de B las reemplazaremos por la fórmula de Mecke generalizada:

$$\mathbb{E} \left[\int_{X^m} h(\eta, x_1, \dots, x_m) \eta^{(m)}(dx_1, \dots, dx_m) \right]$$

↙ No se cumple si reemplazo $\eta^{(m)}$ por η^m

$$= \mathbb{E} \left[\int_X h(\eta + \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_m}, x_1, \dots, x_m) \mu^{\otimes m}(dx_1, \dots, dx_m) \right]$$

Notar que $\forall A \in \mathcal{X}^{\otimes n}$,

$$\mathbb{E} \left[\eta^{(n)}(A) \right] = \mu(A).$$

En las siguientes sesiones probaremos que

Si $X = f(\eta)$, $Y = g(\eta)$. $X, Y \in L^2(\mathcal{A})$.

Entonces

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \sum_{q=1}^{\infty} \langle J_q[X], J_q[Y] \rangle_{L^2(\mu)^{\otimes q}}$$

Formula de Strook $\Rightarrow \mathbb{E}[f(\eta)]\mathbb{E}[g(\eta)] + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \langle T_q f, T_q g \rangle_{L^2(\mu)^{\otimes q}}$

$$\iint f(x_1, x_2, x_3) f(x_4, x_5) \eta^{(3)}(dx_1, dx_2, dx_3) \eta^{(2)}(dx_4, dx_5)$$

$$= \sum_{i_1, i_2, i_3}^{\neq} \sum_{j_1, j_2}^{\neq} f(\underline{X}_{i_1, i_2, i_3}) f(\underline{X}_{j_1, j_2})$$

Intro a la representación de espacio de Fock.

- $\eta^{(n)}$ ← medida factorial
- Fórmula de Mecke.

Definición

Si: $f: N_{\sigma} \rightarrow \mathbb{R}$ medible, definimos

$$Df = \{ D_x f \}_{x \in X}, \quad \text{con}$$

$D_x f: N_{\sigma} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$D_x f(\eta) = f(\eta + \delta_x) - f(\eta).$$

Iterativamente definimos

$$D^n f = \{ D_{x_1, \dots, x_n}^n f \}_{x_1, \dots, x_n \in X} \quad \text{con}$$

$$D_{x_1, \dots, x_n}^n f = D_{x_1} (D_{x_2, \dots, x_n}^{n-1} f).$$

Definimos

$$D^1 = D \quad \text{y} \quad D^0 = \text{Identidad.}$$

Ejemplo:

$$- D_x^1 f(\eta) = f(\eta + \delta x) - f(\eta). \quad \checkmark$$

$$- D_{x_1, x_2}^2 f(\eta) = f(\eta + \delta x_1 + \delta x_2) - f(\eta + \delta x_1) - f(\eta + \delta x_2) + f(\eta)$$

$$\begin{aligned} - D_{x_1, x_2, x_3}^3 f(\eta) &= f(\eta + \delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3) - f(\eta + \delta x_1 + \delta x_2) \\ &\quad - f(\eta + \delta x_1 + \delta x_3) + f(\eta + \delta x_1) \\ &\quad - f(\eta + \delta x_2 + \delta x_3) + f(\eta + \delta x_2) \\ &\quad + f(\eta + \delta x_3) - f(\eta) \end{aligned}$$

Notar que

$$D_{x_1, \dots, x_n}^n f(\eta) = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|} f(\eta + \sum_{j \in J} \delta x_j)$$

Finalmente, definimos (recordemos que $f: N_0 \rightarrow \mathbb{R}$).

$$T_n f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$T_n f(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{E} \left[\hat{D}_{x_1, \dots, x_n} f(\eta) \right]$$

$$- T_0 f = \mathbb{E} [f(\eta)].$$

Notación: $\langle f, g \rangle_n$ si $f, g \in L^2(\mu^n)$, es

$$\langle f, g \rangle_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) g(x_1, \dots, x_n) \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n).$$

Teorema:

Si $f, g: N_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ t.g. $\mathbb{E}[f(\eta)^2], \mathbb{E}[g(\eta)^2] < \infty$

Entonces

$$\mathbb{E}[f(\eta)g(\eta)] = \mathbb{E}[f(\eta)]\mathbb{E}[g(\eta)] + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \langle T_q f, T_q g \rangle_q$$

Producto interno en el espacio de Fock $\bigoplus_{q=0}^{\infty} L^2(X, \mathbb{R})^{\otimes q}$

prueba:

Ingredientes: $f, g: N_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$

Approach:

- Tomamos f, g "muy sencillas" y probamos la identidad
- Extendemos la identidad.

¿Cómo tomamos f, g fáciles?

$$\cdot \mathcal{X}_0 = \{ B \in \mathcal{R}; \mu(B) < \infty \}.$$

$\cdot F_0 = \{ \nu: \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty) \text{ son medibles y acotadas t.q. } \nu \equiv 0 \text{ en el complemento de algún } B \in \mathcal{X}_0 \}.$

$\cdot G = \{ \text{Funciones: } N_0 \rightarrow \mathbb{R} \text{ fáciles} \}$

$$= \{ g: N_0 \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q.} \}$$

$$g(\eta) = a_1 \exp\{-\eta(\nu_1)\} + \dots + a_n \exp\{-\eta(\nu_n)\}.$$

donde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ y $\nu_1, \dots, \nu_n \in F_0$.

Lema:

la identidad

$$\mathbb{E}[f(\eta)g(\eta)] = \mathbb{E}[f(\eta)]\mathbb{E}[g(\eta)] + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \langle T_q f, T_q g \rangle, *$$

se cumple cuando $f, g \in G$.

prueba:

Por bilinealidad, es suficiente considerar el caso

$$f(\eta) = \exp\{-\eta(\nu)\} \quad \text{y} \quad g(\eta) = \exp\{\eta(w)\},$$

con $\nu, w \in F_0$

¿Cómo calculamos T_q ?

$$T_q f(x_1, \dots, x_q) = \mathbb{E}[D_{x_1, \dots, x_q}^q f(\eta)] = \mathbb{E}[D_{x_1, \dots, x_q}^q e^{-\eta(\nu)}]$$

Notar que:

$$D e^{-\eta(v)} = e^{-(\eta + \delta_x)(v)} - e^{-\eta(v)} = e^{-\eta(v)} (e^{-v(x)} - 1)$$

$$\begin{aligned} D_{x_1, \dots, x_g}^g e^{-\eta(v)} &= e^{-\eta(v)} (e^{-v(x_1)} - 1) \dots (e^{-v(x_g)} - 1) \\ &= e^{-\eta(v)} (e^{-v} - 1)^{\otimes g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{T}(x_1, \dots, x_g) &= \mathbb{E} \left[D_{x_1, \dots, x_g}^g e^{-\eta(v)} \right] \\ &= \exp\{-\mu(1 - e^{-v})\} (e^{-v} - 1)^{\otimes g} \end{aligned}$$

Ingredientes \checkmark

- Notamos que el lado izquierdo es

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(\eta)g(\eta)] &= \mathbb{E}[\exp\{-\eta(v+w)\}] \\ &= \exp\{-\mu(1 - e^{-(v+w)})\} \end{aligned}$$

- El lado derecho es

$$\sum_{g=0}^{\infty} \frac{1}{g!} \langle T_g f, T_g g \rangle_g$$

$$\langle T_g f, T_g g \rangle_g =$$

$$\langle \exp\{-\mu(1 - e^{-v})\} (e^{-v} - 1)^{\otimes g}, \exp\{-\mu(1 - e^{-w})\} (e^{-w} - 1)^{\otimes g} \rangle_g$$

$$\exp\{-\mu(2 - e^{-v} - e^{-w})\} \mu (e^{-v} - 1) (e^{-w} - 1)^g$$

Ahora,

$$\mu((e^{-v}-1)(e^{-w}-1)) = \mu(e^{-v-w} - e^{-v} - e^{-w} + 1) \leftarrow \text{tener cuidado.}$$

\Rightarrow

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \langle T_q f, T_q g \rangle_q$$

$$= \exp\{-\mu(2 - e^{-v} - e^{-w})\} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \mu(e^{-v-w} - e^{-v} - e^{-w} + 1)^q$$

$$= \exp\{-\mu(2 - e^{-v} - e^{-w})\}$$

$$\exp\{\mu(e^{-v-w} - e^{-v} - e^{-w} + 1)\}$$

$$= \exp\{-\mu(1 - e^{-v-w})\} \quad \checkmark$$

El resultado ya está para funciones fáciles

2^o Paso: extensión:

Primero veremos que

$\mathcal{G} = \{ \text{funciones fáciles} \}$ es denso en

$$L^2(N_\sigma, \mathbb{P}_\eta).$$

Sea

$$W = \bar{G} \quad (\text{cerrado en } L^2(N_\sigma)).$$

Contrastaremos

$$\sigma(W) \quad \text{v.s.} \quad \mathcal{N}' = \sigma(h \in G).$$

- "Probaremos" que si $f: N_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{N}' -medible, entonces $f \in W$. i.e.

$$\{f: N_\sigma \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{N}'\text{-medibles y acotadas}\} \subset W.$$

- Probaremos que

$$\mathcal{N}' = \sigma(\eta).$$

De aquí se seguiría que

$$\{f: N_\sigma \rightarrow \mathbb{R} \quad \sigma(\eta)\text{-medibles y acotadas}\} \subset W.$$

de donde se sigue el resultado

(cerramos la contención en $L^2(N_\sigma)$).

Para probar

$$\mathcal{N}' \ni \sigma(\eta):$$

es suficiente probar que

$\eta(c)$ es \mathcal{N}' -medible. Esto se cumple pues

$$\eta(c) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (1 - \underbrace{e^{-t\eta(c)}}_{\in \mathcal{N}'\text{-medibles}})$$

Para probar:

$\{f: N_0 \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ } \mathcal{N}'\text{-medibles y acotadas}\} \subset W. \textcircled{\#}$

Esto se cumple siempre y cuando:

- W es cerrado bajo multiplicación
- W es cerrado bajo convergencia monótona acotada
- W es cerrado bajo converg. uniforme.

$\Rightarrow \textcircled{\#}$ por una generalización funcional del tma de clases monótonas.

(alternativamente, usen tma de Dynkin).

Prueba de \otimes

ver que

$$E[f(\eta)g(\eta)] = E[f(\eta)]E[g(\eta)] + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \langle T_q f, T_q g \rangle, \quad \otimes$$

se cumple en general:

Por la fórmula de polarización

$$4\langle u, v \rangle_n = \langle u+v, u+v \rangle_n - \langle u-v, u-v \rangle_n$$

basta ver que \otimes se cumple si $f, g \in L^2(N_0)$.

Paso 1:

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}, \quad \text{con } f^{(n)} \in G = \{f: N_0 \rightarrow \mathbb{R} \text{ "nice"}\}.$$

Tenemos, por el lema de approx con v.a. en G .

$$E[f(\eta)f(\eta)] = \lim_n E[f^{(n)}(\eta)f^{(n)}(\eta)]$$

$$= \lim_n \left[E[f^{(n)}(\eta)]E[f^{(n)}(\eta)] + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \langle T_q f^{(n)}, T_q f^{(n)} \rangle \right]$$

Para analizar

$\langle T_q f^{(n)}, T_q f^{(n)} \rangle$, necesitamos probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_B |D_{x_1, \dots, x_n}^q f(\eta) - D_{x_1, \dots, x_n}^q f^{(n)}(\eta)|_{\mu(dx_1) \dots \mu(dx_n)} \right] = 0$$

con $B \in \mathcal{C}^q$, $c \in \mathcal{X}_0$

El resultado se sigue, con tecnicidades,
de aquí.