Cálculo de Malliavin en espacio Poisson:

Objetivo: estudiar la ley de objetos que surgen como función de procesos Poisson.

Approach:

Seguiré el libro de Peccati - Reitzner (analogía al caso de cálculo de Malliavin Gaussiano).

Objetivo personal:

Estudiar el límite de la ley de v.a.

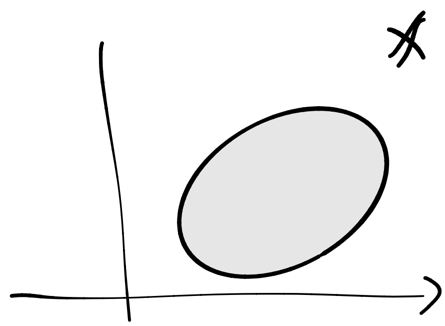
$$F_n = \sum_{k=1}^{nt} f(X_k)$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de prueba

y X_k son v.a. estables que son "débilmente independientes"

Propiedades básicas de procesos puntuales de Poisson

$(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ ← un espacio de medida.



Consideremos un mapeo η de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio

$\mathbf{N}_\sigma$ = todas las medidas en $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ que son σ-finitas.

$\xleftrightarrow{\text{análogo}}$ $\{ \eta(A) ; A \in \mathcal{X} \}$

Supondremos que el mapeo

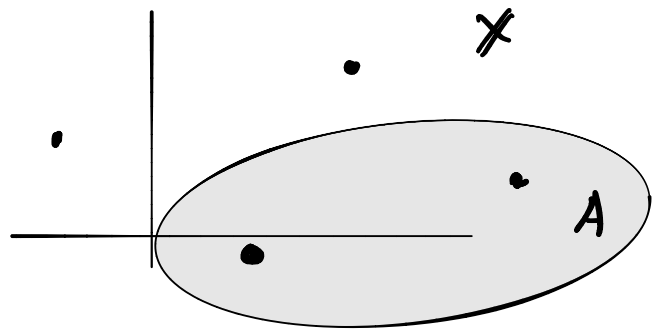
$$\eta : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbf{N}_\sigma, \mathcal{N})$$

es medible, y obtendremos ésto pidiendo pidiendo que $\mathcal{N}$ sea la mínima σ-alg. que hace a η medible.

Heurística de $(N_\sigma, \mathcal{N})$:

Una medida de referencia para obtener buenos ejemplos:

- Ejemplo 1.-)



$\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

$X_k : \Omega \to \mathbb{X}$

i.i.d con ley común $\mathbb{Q}$

"lanza n muestras de $\{X_k\}$

$$\eta(A) := \#\{i \leq n ;\ X_i \in A\}.$$

$A \in \mathcal{X}$

Alternativamente

$$\eta = \sum_{k=1}^{n} \delta_{X_k}$$

- Ejemplo 2:

Tomar una v.a. $K : \Omega \to \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Poisson(λ), $\lambda > 0$.

$$\eta = \sum_{k=0}^{K} \delta_{X_k}$$

Tomamos $u: \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ medible y acotada.

$$\mathbb{E}\left[e^{-\int u(x)\,\eta(dx)} \right] \underset{\uparrow}{=}$$

sustituimos $\eta(dx) = \sum_{k=0}^{K} \delta_{X_k}$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\int u(x)\,\eta(dx)} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\, \mathbb{E}\left[e^{-\left(\sum_{j=0}^{k} \delta_{X_j}\right)(u)} \right]$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\, \mathbb{E}\left[e^{-u(X_1)} \right]^k$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\lambda \int e^{-u(x)} \, Q(dx) \right)^{k} = \cdots$$

con $X_1 \sim Q(dx)$. Si definimos $\mu = \lambda Q$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\int u(x) \, \eta(dx)} \right] = e^{-\int \left(1 - e^{-u(x)}\right) \mu(dx)}$$

Obs. importante: si $u(x) = 0$, entonces

$1 - e^{-u(x)} = 0$. De aquí se sigue que

si $\{A_i\}_{i \leq n} \subset \mathcal{X}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$,

$\Rightarrow$ $\eta(A_1), \ldots, \eta(A_n)$ son indep.

Además, satisfacen $\eta(A_i) \sim \text{Poiss}(\mu(A_i))$.

Hasta el momento, solo llevamos un ejemplo:

$$\eta = \sum_{k=0}^{K} \delta_{X_k}$$

Notar que Funcionales de η

$$\updownarrow$$

Funciones $(K, X_1, X_2, \dots)$

Objetivo a "corto" plazo

Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F} = \sigma(\eta), \mathbb{P})$, entonces

$$X = \mathbb{E}[X] + \sum_{q=1}^{\infty} J_q[X],$$ donde

- $J_q[X]$ son componentes ortogonales $\mathbb{E}[J_q[X] J_{\tilde{q}}[X]] = 0$

si $q \neq \tilde{q}$

- $J_q[X]$ son fáciles de estudiar.

La elección de $J_q[X]$ van a ser "integrales múltiples de Itô".

Plan concreto:

1º) Definir $J_q[X]$ adecuadamente

2º) Definir 3 operadores "fundamentales" sobre v.a. X "adecuadas".

- D ← Derivada de Malliavin
- δ ← Integral de Skorohod
- L ← Operador de Ornstein-Uhlenbeck.

$L = -\delta D$ ← en cierto subdominio de $L^2(\Omega)$

"Filosóficamente", calcular

$\mathbb{E}[X f(X)]$ es "más o menos fácil" si

$X = \delta(u)$

Resultado clave:

$h: \mathbf{N}_\sigma \times \mathbb{X} \to [0,\infty]$. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\int h(\eta, x)\,\eta(dx)\right] = \mathbb{E}\left[\int h(\eta+\delta_x, x)\,\mu(dx)\right]$$

$\uparrow$

Fórmula de Mecke

(intuición: Tomen $\cdot\ \eta = \sum_{k=0}^{K} \delta_{X_k}$

$$- h(\eta, x) := \sum_{i=1}^{m} \kappa_i \eta\left(e^{-\tau_i(\cdot)}\right) e^{-\hat{c}_i x}$$

Nota:

Ver a la v.a. $h(\omega, x) = \circ\circ\ Y_x(\omega)$

$\uparrow$ componente aleatoria

Parámetro

En cálculo de Malliavin Gaussiano es muy útil considerar

$$\int \cdots \int \psi(x_1, \ldots, x_\ell)\, B(dx_1) \cdots B(dx_\ell).$$

Emulando esta construcción, nos gustaría estudiar

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}^m} h(\eta, x_1, \ldots, x_n)\,\eta(dx_1)\cdots\eta(dx_n)\right] =$$ Algo que se integra respecto a μ

Antes de continuar:

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} h(\eta, x)\, \eta(dx)\right] = \mathbb{E}\left[\int h(\underbrace{\eta + \delta_x}_{\tilde{\eta}}, x)\, \mu(dx)\right]$$

$\Downarrow$ Si $\quad \eta = \sum_{k=1}^{\eta(\mathbb{X})} \delta_{X_k}$ $\qquad \eta(\mathbb{X}) = k \sim \text{Pois}(\lambda)$

$\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d.

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} h(\eta - \delta_x, x)\, \eta(dx)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} h(\eta, x) \mu(dx)\right] \quad (*) \qquad X_1 \sim Q$$

Notar que

$$\int_{\mathbb{X}} h(\eta - \delta_x, x)\, \eta(dx) = \sum_i h\Big(\sum_{k \neq i} \delta_{X_k}, X_i\Big)$$

Objetivo: hacer que $(*)$ se generalice a varias variables.

Definir

$\eta^{(m)} \leftarrow$ medida aleatoria en $\mathbb{X}^m$

$$\eta^{(m)}(C) := \sum_{i_1, \dots, i_m \leq \eta(\mathbb{X})}^{\neq} \mathbb{1}_C(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$$

$C \in \mathcal{X}^m$ con $\sum^{\neq}$ indicando que los índices son distintos 2 a 2.

Notación:

$$\sum_{i_1,\dots,i_m \leq \eta(\mathbb{X})}^{\neq} f(X_{i_1},\dots, f_{X_{i_m}})$$

$$= \sum_{i_1=1}^{\eta(\mathbb{X})} \sum_{i_2=1}^{\eta(\mathbb{X})} \sum_{i_3=1}^{\eta(\mathbb{X})} \mathbb{1}_{\{ i_1 \neq i_2,\, i_1 \neq i_3,\, i_2 \neq i_3 \}} f(X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3})$$

$\uparrow$ si $m = 3$

Cómo evaluamos $\eta^{(m)}$

Tomar $C \in \mathcal{X}^{\otimes m}$ $C = B^m$ con $B \in \mathcal{X}$

$$\eta^{(m)}(B^m) = \sum_{i_1,\dots,i_m \leq \eta(\mathbb{X})}^{\neq} \mathbb{1}_B(x_1) \dots \mathbb{1}_B(x_m)$$

$$= \eta(B)(\eta(B)-1)(\eta(B)-2)\dots(\eta(B)-m+1)$$

En lo sucesivo, llamaremos a $\eta^{(m)}$ la medida factorial de η (definida en $\mathbb{X}^m$)

Nota: Notar que

$$\eta^{(m+1)}(C) = \int_{\mathbb{X}^m} \left[\int \mathbb{1}_{\{(x_1,\dots,x_{m+1}) \in C\}} \eta(dx_{m+1}) - \sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{\{(x_1,\dots,x_m, x_j \in C\}} \right] \eta^{(m)}(dx_1,\dots,dx_m)$$

Proposición

Sea $\eta \leftarrow$ proceso puntual en $\mathbb{X}$. Entonces existe una elección única c.s. de medidas $\eta^{(m)}$ definidas en $\mathbb{X}^m$ y t.q.

- $\eta^{(1)} = \eta$

- $$\eta^{(m+1)}(C) = \int_{\mathbb{X}^m} \Big[\int \mathbb{1}_{\{(x_1,\dots,x_{m+1}) \in C\}} \, \eta(dx_{m+1}) - \sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{\{(x_1,\dots,x_m,x_j) \in C\}} \Big] \eta^{(m)}(dx_1,\dots,dx_m)$$

Esto nos permite definir $\eta^{(m)} \leftarrow$ la medida factorial aún cuando η no tiene la forma

$$\eta = \sum_{k=1}^{\eta(\mathbb{X})} \delta_{X_k}.$$

Para dónde vamos:

Representación de Fock:

Hay ocasiones en que descomponer un espacio de Hilbert V de la siguiente manera

$$V \approx \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes k}$$ donde $\mathcal{H}$ es un Hilbert "sencillo".

En el caso Gaussiano (si tengo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ t.q. $(L^2(\Omega), \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es t.q. $\mathcal{F} = \sigma(\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ existe el teorema de descomposición en caos

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_q.$$

$\mathcal{H}_q$ son espacios ortogonales generados por v.a. del tipo

se intersecta con $\in L^2([0,\infty))^{\otimes m}$

$$\mathcal{H}_q = \Big\{ \int_0^{\infty}\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{m-1}} \varphi(t_1,\dots,t_m)\, B(dt_m)\dots B(dt_1)$$

Usaremos $\eta^{(m)}(\cdot)$ como reemplazo de

$B(dt_m)\dots B(dt_1) \leftarrow$ se define de manera sutil.

Las propiedades de isometría de B las reemplazaremos por la fórmula de Mecke generalizada:

$$\mathbb{E}\left[\int_{X^m} h(\eta, x_1, \dots, x_m)\, \eta^{(m)}(dx_1, \dots, dx_m)\right]$$

No se cumple si reemplazo $\eta^{(m)}$ por η^m

$$= \mathbb{E}\left[\int_{X} h(\eta + \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_m}, x_1, \dots, x_n)\, \mu^{\otimes m}(dx_1, \dots, dx_n)\right]$$

Notar que $\forall \quad A \in \mathcal{X}^{\otimes m}$,

$$\mathbb{E}\left[\eta^{(m)}(A)\right] = \mu(A).$$

En las siguientes sesiones probaremos que

Si $\quad X = f(\eta), \quad Y = g(\eta). \quad X, Y \in L^2(\Omega).$

Entonces

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] + \sum_{q=1}^{\infty} \langle J_q[X], J_q[Y] \rangle_{L^2(\mu)^{\otimes q}}$$

Fórmula de Strook

$$= \mathbb{E}[f(\eta)]\,\mathbb{E}[g(\eta)] + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \langle T_n f, T_n g \rangle_{L^2(\mu)^{\otimes q}}$$

$$\iint f(x_1,x_2,x_3)\, f(x_4,x_5)\, \eta^{(3)}(dx_1,dx_2,dx_3)\, \eta^{(2)}(dx_4,dx_5)$$

$$= \sum_{i_1,i_2,i_3}^{\neq} \sum_{j_1,j_2}^{\neq} f(\underline{X_{i_1}}, X_{i_2}, X_{i_3})\, f(\underline{X_{i_4}}, X_{i_5})$$

Intro a la representación de espacio de Fock.

- $\eta^{(1)} \leftarrow$ medida factorial
- Fórmula de Mecke.

Definición

Si $f : N_\sigma \to \mathbb{R}$ medible, definimos

$$Df = \{D_x f\}_{x \in \mathbb{X}},$$ con

$$D_x f : N_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}$$ definida por

$$D_x f(\eta) = f(\eta + \delta_x) - f(\eta).$$

Iterativamente definimos

$$D^n f = \{D^n_{x_1,\dots,x_n} f\}_{x_1,\dots,x_n \in \mathbb{X}}$$ con

$$D^n_{x_1,\dots,x_n} f = D_{x_1}(D^{n-1}_{x_2,\dots,x_n} f).$$

Definimos

$D^1 = D$ y $D^0 = \text{Identidad}$.

Ejemplo:

- $D_x f(\eta) = f(\eta + \delta_x) - f(\eta)$. ✓

- $D^2_{x_1,x_2} f(\eta) = f(\eta + \delta_{x_1} + \delta_{x_2}) - f(\eta + \delta_{x_1}) - f(\eta + \delta_{x_2}) + f(\eta)$

- $D^3_{x_1,x_2,x_3} f(\eta) = f(\eta + \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \delta_{x_3}) - f(\eta + \delta_{x_1} + \delta_{x_2})$

$$- f(\eta + \delta_{x_1} + \delta_{x_3}) + f(\eta + \delta_{x_1})$$

$$- f(\eta + \delta_{x_2} + \delta_{x_3}) + f(\eta + \delta_{x_2})$$

$$+ f(\eta + \delta_{x_3}) - f(\eta)$$

Notar que

$$D^n_{x_1,\dots,x_n} f(\eta) = \sum_{J \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{n-|J|} f\Big(\eta + \sum_{j\in J} \delta_{x_j}\Big)$$

Finalmente, definimos (recordemos que $f : N_\sigma \to \mathbb{R}$).

$T_n f : \mathbb{X}^n \to \mathbb{R}$

$$T_n f(x_1,\dots,x_n) = \mathbb{E}\left[D^n_{x_1,\dots,x_n} f(\eta) \right]$$

- $T_0 f = \mathbb{E}[f(\eta)]$.

Notación: $\langle f, g\rangle_n$ si $f, g \in L^2(\mu^n)$, es

$$\langle f,g\rangle_n = \iint_{\mathbb{X}^n} f(x_1,\dots,x_n)\, g(x_1,\dots,x_n)\, \mu(dx_1)\cdots\mu(dx_n).$$

Teorema:

Si $f, g : N_\sigma \to \mathbb{R}$ t.q. $\mathbb{E}[f(\eta)^2], \mathbb{E}[g(\eta)^2] < \infty$

Entonces

$$\mathbb{E}[f(\eta)g(\eta)] = \mathbb{E}[f(\eta)]\,\mathbb{E}[g(\eta)] + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \langle T_q f, T_q g\rangle_q$$

Producto interno en el espacio de Fock $\bigoplus_{q=0}^{\infty} L^2(\mathbb{X},\mathbb{R})^{\otimes q}$

prueba:

Ingredientes: $f, g : N_\sigma \to \mathbb{R}$

Approach:

- Tomamos f, g "muy sencillas" y probamos la identidad
- Extendemos la identidad.

¿Cómo tomamos f, g fáciles?

- $\mathcal{X}_0 = \{ B \in \mathcal{X} ; \ \mu(B) < \infty \}$.

- $F_0 = \{ v : \mathbb{X} \to [0, \infty)$ son medibles y acotadas t.q. $v \equiv 0$ en el complemento de algún $B \in \mathcal{X}_0 \}$.

- $G = \{$ Funciones $: N_0 \to \mathbb{R}$ fáciles $\}$

$= \{ g : N_0 \to \mathbb{R}$ t.q.

$g(\eta) = a_1 \exp\{-\eta(v_1)\} + \dots + a_n \exp\{-\eta(v_n)\}$.

donde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ y $v_1, \dots, v_n \in F_0 \}$.

Lema:

la identidad

$$\mathbb{E}[f(\eta) g(\eta)] = \mathbb{E}[f(\eta)] \mathbb{E}[g(\eta)] + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \langle T_q f, T_q g \rangle_q \quad *$$

se cumple cuando $f, g \in G$.

prueba:

Por bilinealidad, es suficiente considerar el caso

$$f(\eta) = \exp\{-\eta(v)\} \quad \text{y} \quad g(\eta) = \exp\{\eta(w)\},$$

con $v, w \in F_0$

¿Cómo calculamos T_q?

$$T_q f(x_1, \dots, x_q) = \mathbb{E}[D^q_{x_1, \dots, x_q} f(\eta)] = \mathbb{E}[D^q_{x_1, \dots, x_q} e^{-\eta(v)}]$$

Notar que:

$$D e^{-\eta(v)} = e^{-(\eta+\delta_x)(v)} - e^{-\eta(v)} = e^{-\eta(v)}(e^{-v(x)} - 1)$$

$$D^q_{x_1,\dots,x_q} e^{-\eta(v)} = e^{-\eta(v)}(e^{-v(x_1)}-1)\cdots(e^{-v(x_q)}-1)$$

$$= e^{-\eta(v)}(e^{-v}-1)^{\otimes q}$$

$$\Rightarrow T(x_1,\dots,x_q) = \mathbb{E}[D^q_{x_1,\dots,x_q} e^{-\eta(v)}]$$

$$= \exp\{-\mu(1-e^{-v})\}(e^{-v}-1)^{\otimes q}$$

Ingredientes ✓

- Notamos que el lado izquierdo es

$$\mathbb{E}[f(\eta)g(\eta)] = \mathbb{E}[\exp\{-\eta(v+w)\}]$$

$$= \exp\{-\mu(1-e^{-(v+w)})\}$$

- El lado derecho es

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!}\langle T_q f, T_q g\rangle_q$$

$$\langle T_q f, T_q g\rangle_q =$$

$$\langle \exp\{-\mu(1-e^{-v})\}(e^{-v}-1)^{\otimes q}, \exp\{-\mu(1-e^{-w})\}(e^{-w}-1)^{\otimes q}\rangle_q$$

$$\exp\{-\mu(2-e^{-v}-e^{-w})\}\,\mu((e^{-v}-1)(e^{-w}-1))^q$$

Ahora,

$$\mu((e^{-v}-1)(e^{-w}-1)) = \mu(e^{-v-w} - e^{-v} - e^{-w} + 1) \leftarrow \text{tener cuidado.}$$

$$\Rightarrow$$

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \langle T_q f, T_q g \rangle_q$$

$$= \exp\{-\mu(2 - e^{-v} - e^{-w})\} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \mu(e^{-v-w} - e^{-v} - e^{-w} + 1)^q$$

$$= \exp\{-\mu(2 - e^{-v} - e^{-w})\} \exp\{\mu(e^{-v-w} - e^{-v} - e^{-w} + 1)\}$$

$$= \exp\{-\mu(1 - e^{-v-w})\} \quad \checkmark$$

El resultado ya está para funciones fáciles

2º Paso: extensión:

Primero veremos que

$\mathcal{G}$ = {funciones fáciles} es denso en

$L^2(N_\sigma, \mathbb{P}_\eta)$.

Sea

$W = \overline{G}$ (cerrado en $L^2(N_\sigma)$).

Contrastaremos

$\sigma(W)$ v.s. $\mathcal{N}' = \sigma(h \in G)$.

- "Probaremos" que si $f : N_\sigma \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{N}'$-medible, entonces $f \in W$. i.e.

$$\{ f : N_\sigma \to \mathbb{R} \quad \mathcal{N}'\text{-medibles y acotadas} \} \subset W.$$

- Probaremos que

$$\mathcal{N}' = \sigma(\eta).$$

De aquí se seguiría que

$$\{ f : N_\sigma \to \mathbb{R} \quad \sigma(\eta)\text{-medibles y acotadas} \} \subset W.$$

de donde se sigue el resultado (cerramos la contención en $L^2(N_\sigma)$).

Para probar

$\mathcal{N}' \supseteq \sigma(\eta)$:

es suficiente probar que

$\eta(c)$ es $\mathcal{N}'$-medible. Esto se cumple pues

$$\eta(c) = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}\left(1 - \underbrace{e^{-t\eta(c)}}_{\in \mathcal{N}'\text{-medibles.}}\right)$$

Para probar:

$\{ f : N_\sigma \to \mathbb{R}$ $\mathcal{N}'$-medibles y acotadas $\} \subset W$. (#)

Esto se cumple siempre y cuando:

- W es cerrado bajo multiplicación
- W es cerrado bajo convergencia monótona acotada
- W es cerrado bajo converg. uniforme.

$\Rightarrow$ (#) por una generalización funcional del tma de clases monótonas.

(alternativamente, usen tma de Dynkin).

Prueba de ⊛

ver que

$$\mathbb{E}[f(\eta)g(\eta)] = \mathbb{E}[f(\eta)]\,\mathbb{E}[g(\eta)] + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \langle T_q f, T_q g \rangle_q \qquad ⊕$$

se cumple en general:

Por la fórmula de polarización

$$4\langle u, v\rangle_n = \langle u+v, u+v\rangle_n - \langle u-v, u-v\rangle_n$$

basta ver que ⊕ se cumple si $f = g \in L^2(N_0)$.

Paso 1:

$$\underset{(\text{en } L^2(N_0))}{f =} \lim_{n\to\infty} f^{(n)}, \quad \text{con} \quad f^{(n)} \in G = \{ f : N_0 \to \mathbb{R} \text{ "nice"} \}.$$

Tenemos, por el lema de approx con v.a. en G.

$$\mathbb{E}[f(\eta)f(\eta)] = \lim_{n} \mathbb{E}[f^{(n)}(\eta) f^{(n)}(\eta)]$$

$$= \lim_{n} \mathbb{E}[f^{(n)}(\eta)]\,\mathbb{E}[f^{(n)}(\eta)] + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \langle T_q f^{(n)}, T_q f^{(n)} \rangle_q$$

Para analizar

$\langle T_q f^{(n)}, T_q f^{(n)} \rangle_q$ necesitamos probar que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_B \left| D^q_{x_1,\dots,x_n} f(\eta) - D^q_{x_1,\dots,x_n} f^{(n)}(\eta) \right| \mu(dx_1)\cdots\mu(dx_q) \right] = 0$$

con $B = C^q$, $C \in \mathcal{X}_0$

El resultado se sigue, con tecnicalidades, de aquí.

Descomposición en caos:

Hasta el momento:

$f: N_\sigma \to \mathbb{R}$ $\qquad f(\eta) \leftarrow$ v.a.

$$f \longmapsto \begin{cases} - \; T_0 f = \mathbb{E}[D^0 f] = \mathbb{E}[f(\eta)] \\ - \; T_1^f(x) = \mathbb{E}[D_x f(\eta)] \\ - \; T_2^f(x_1,x_2) = \mathbb{E}[D^2_{x_1,x_2} f(\eta)] \\ \quad \vdots \\ - \; T_n^f(x_1,\dots,x_n) = \mathbb{E}[D^n_{x_1,\dots,x_n} f(\eta)]. \end{cases}$$

$$f \longleftrightarrow \{T_n^f\}$$

Funciones y teorema de Taylor	v.a. y descomposición en caos
$f \xrightarrow{\text{perfiles}} \{D^q f\} \xrightarrow{\text{evaluar}} \{D^q f(0)\}$	$f \longrightarrow \{D^q f\} \xrightarrow{\text{esperanza}} \{T_q\}$
$f = \sum \frac{1}{q!} D^q f(0)(x-0)^q$	$f = \sum_{q=0}^{\infty} \text{Operación}_q(T_q)$

¿Que tipo de operación vamos a aplicar para recobrar f?

Integrales multiples de Ito:

Para $q \geq 1$, y $g \in L^1(\mu^q)$, definimos

$$I_q(g) = \sum_{J \subset [q]} (-1)^{q-|J|} \iint_{\mathcal{X}^2} g(x_1, \ldots, x_q)\, \eta^{(|J|)}(dx_J)\, \mu^{q-|J|}(dx_{J^c})$$

$[q] = \{1, \ldots, q\}$ $J^c = [n] \setminus J$. y

$x_J = (x_j \,;\, j \in J)$.

Ejmp: $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $J = \{1, 3\}$

$x_J = (x_1, x_3)$

Ejmp:

Si $g(x_1, \ldots, x_q) = \left(\bigotimes_{i=1}^{q} h\right)(x_1, \ldots, x_q) = h(x_1) \cdots h(x_q)$

$$I_q(g) = \sum_{J \subset [q]} (-1)^{q-|J|} \iint_{\mathcal{X}^2} h(x_1) \cdots h(x_q)\, \eta^{(|J|)}(dx_J)\, \mu^{q-|J|}(dx_{J^c})$$

$$= \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^{q-k}\, \eta^{(k)}(h^{\otimes k})\, \mu(h)^{q-k}$$

Ingrediente 2:

$g \in \mathcal{X}^q \to \mathbb{R}$

$$\tilde{g}(x_1, \dots, x_q) = \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in \Sigma_q} g(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(q)}).$$

$\Sigma_q \leftarrow$ cjto de permutaciones de $[q]$.

Lema:

Si $g: \mathcal{X}^m \to \mathbb{R}$ $h: \mathcal{X}^n \to \mathbb{R}$ son "nice", i.e. t.q. $\{g \neq 0\} \subset B^m$ y $\{h \neq 0\} \subset B^n$, con $\mu(B) < \infty$
$B \in \mathcal{X}_0$

entonces

$$\mathbb{E}[I_m(g) I_n(h)] = \mathbb{1}_{\{m=n\}} m! \langle \tilde{g}, \tilde{h} \rangle_m$$

prueba:

$$I_m(g)\, \tilde{I}_n(h) =$$

$$\sum_{J \subset [m]} (-1)^{m-|J|} \iint_{\mathcal{X}^2} g(x_1, \dots, x_m) \quad \eta^{(|J|)}(dx_J)\, \mu^{m-|J|}(dx_{J^c})$$

$$\times \sum_{J \subset [n]} (-1)^{n-|J|} \iint_{\mathcal{X}^2} h(x_1, \dots, x_n) \quad \eta^{(|J|)}(dx_J)\, \mu^{n-|J|}(dx_{J^c})$$

$$= \sum_{J \subset [m]} \sum_{\tilde{J} \subset [n]} (-1)^{m-|J|} \quad (-1)^{n-|\tilde{J}|}$$

$$\times \iint_{\mathcal{X}^2} \iint_{\mathcal{X}^2} g(x_1, \dots, x_m)\, h(x_1, \dots, x_n) \quad \eta^{(|\tilde{J}|)}(dx_{\tilde{J}})\, \eta^{(|J|)}(dx_J)\, \mu^{n-|\tilde{J}|}(dx_{\tilde{J}^c})\, \mu^{m-|J|}(dx_{J^c})$$

$$= \sum_{J \subset [m]} \sum_{\tilde{J} \subset [n]} (-1)^{m+n-|J|-|\tilde{J}|}$$

$$\times \iiint_{\mathcal{X}^3} g(x_1, \dots, x_m)\, h(x_1, \dots, x_n)\, \eta^{(|\tilde{J}|)}(dx_{\tilde{J}})\, \eta^{(|J|)}(dx_J)\, \mu^{m+n-|J|-|\tilde{J}|}(dx_{\tilde{J}^c}, dx_{J^c})$$

Idea: codificar $\displaystyle\sum_{J \subset [m]} \sum_{\tilde{J} [n]}$

como una suma simple:

$I_m(g)\, I_n(h)$

$$= \sum_{I \subset [k]} (-1)^{k-|I|} \iiint_{\mathbb{X}^3} f(x_1,\dots,x_k)\, \eta^{(|I\cap J_1|)}(dx_{I\cap J_1})\, \eta^{(|I\cap J_2|)}(dx_{I\cap J_2})\, \mu^{k-|I|}(dx_{I^c})$$

$I = J \cup \tilde{J}$

$k = m+n$

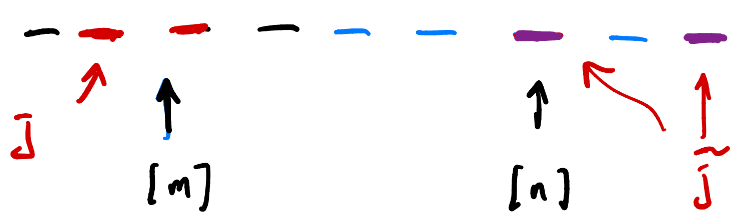
$f(x_1,\dots,x_k) = g(x_1,\dots,x_m)\, h(x_1,\dots,x_n)$

$\tilde{J} = I \cap J_1$

$J = I \cap J_2$

$J_1 = \{1,\dots,m\}$

$J_2 = \{m+1,\dots,m+n\}$

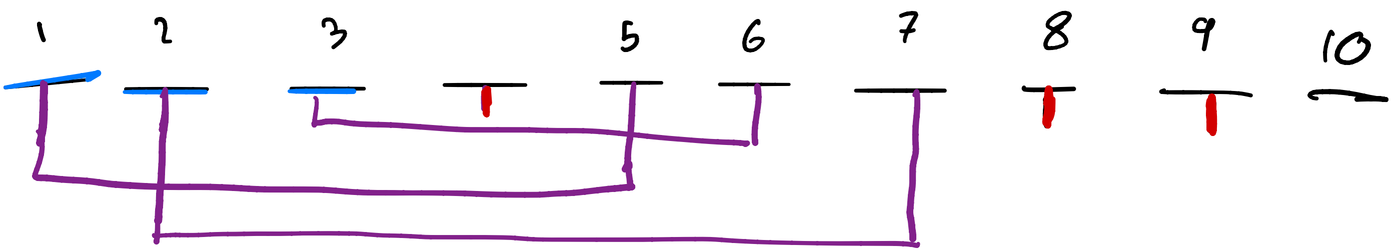


Para $u : \mathbb{X}^k \to \mathbb{R}$.

Decimos que σ es una subpartición de $[n]$. Si es una colección de subconjuntos de $[n]$, ajenos a pares.

Para $m,n \in \mathbb{Z}_+$ t.q. $m+n \geq 1$, definimos $\Sigma_{m,n}$ como el conjunto de todas las particiones de $[m+n]$ t.q. si $\sigma \in \Sigma_{m,n}$, y $J \in \sigma$, entonces $|J \cap \{1,\dots,m\}| \leq 1$ y $|J \cap \{m+1,\dots,m+n\}| \leq 1$

Ejemplo de σ. $\sigma = \{\{1,5\},\{2,7\},\{3,6\},\{4\}\}$



$m=3$

$n=4$

Con esta notación.

Pensar en el ejemplo $\eta = \sum_{k=0}^{K} \delta_{X_k}$

$$\iint f(x_1,\dots,x_k)\,\eta^{(|I\cap J_1|)}(dx_{I\cap J_1})\,\eta^{(|I\cap J_2|)}(dx_{I\cap J_2})$$

$$= \iint \mathring{f}(x_{I\cap J_1}, x_{I\cap J_2})\,\eta^{(|I\cap J_1|)}(dx_{I\cap J_1})\,\eta^{(|I\cap J_2|)}(dx_{I\cap J_2})$$

$$= \sum^{\neq}_{k_1,\dots,k_{|I\cap J_1|}} \sum^{\neq}_{k_{|I\cap J_1|+1},\dots,k_{|I|}} \mathring{f}(X_{I\cap J_1})\,\mathring{f}(X_{I\cap J_2})$$

$$= \sum_{\sigma\in\Sigma_{m,n}} \sum^{\neq}_{k_1,\dots,k_{|I|}} \mathring{f}(X_{I\cap J_1})\,\mathring{f}(X_{I\cap J_2})$$

$$= \sum_{\sigma\in\Sigma_{m,n}} \int_{\mathbb{X}^{|\sigma|}} f_\sigma(z)\,\eta^{(|\sigma|)}(dz)$$

$$\iint f(x_1,\dots,x_k)\,\eta^{(I\cap J_1)}(dx_{I\cap J_1})\,\eta^{(I\cap J_2)}(dx_{I\cap J_2})$$

$$= \sum_{\sigma\in\Sigma_{m,n}} \int_{\mathbb{X}^{|\sigma|}} f_\sigma(z)\,\eta^{(|\sigma|)}(dz)$$

Por la fórmula de Mecke

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} u(\eta,x_1,\dots,x_k)\,\eta^{(k)}(d\vec{x})\right]$$

$$= \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E}\left[u(\eta+\sum\delta_{x_i}, x_1,\dots,x_k)\right]\mu^{k}(dx)$$

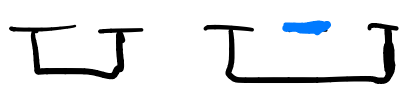
se sigue

$$\mathbb{E}\left[I_m(g)\,I_n(h)\right]$$

$$= \sum_{e\in\Sigma^*_{m,n}} (-1)^{k-\|e\|}\int_{\mathbb{X}^{|e|}} f_e(x)\,\mu^{k+|e|-\|e\|}$$

Notación:

e ← es una subpartición de $[1,\dots,k]$.

Ejmp  $e=\{\{1,2\},\{3,5\}\}$

$\|e\|$ = # conjunto sobre el que actúa e:

$$= \#\bigcup_{J\in e} J$$

donde

$$\Sigma^*_{m,n} = \{ \text{subparticiones } \ell \text{ de } [k] \text{ t.q. } |J \cap J_1| \leq 1 \text{ y } |J \cap J_2| \leq 1 \ \forall\ J \in \ell \}.$$

Sea $\Sigma^{*,2}_{m,n} \subset \Sigma^*_{m,n}$ t.q. $\ell \in \Sigma^{*,2}_{m,n}$

si $|v| = 2 \ \forall\ v \in \ell$.

Se puede ver

$$\int f_\ell \, d\mu^{(k + |\ell| - \|\ell\|)} = \int f_\pi \, d\mu^{k - \|\pi\| + |\pi|}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[I_m(g) I_n(h)]$$

$$= \sum_{\pi \in \Sigma^{*,2}_{m,n}} \int f_\pi \, \mu^{k - \|\pi\|} \sum_{\ell \in \Sigma^*_{m,n}(\pi)} (-1)^{k - \|\ell\|}$$

$$\Sigma^*_{m,n}(\pi) = \{ \ell \in \Sigma^*_{m,n} \text{ t.q. } \pi \subset \ell \}$$

Se puede ver que

$$\sum_{\sigma \in \Sigma^{*}_{m,n}(\pi)} (-1)^{k-\|\sigma\|} = 0, \quad \text{salvo que } \|\pi\| = k.$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathbb{E}\left[I_n(g)\, I_n(h) \right] = \sum_{\pi \in \Sigma^{*,2}_{m,n}} \int f_\pi \, \mu^{\overbrace{k-\|\pi\|}^{k} + \overbrace{|\pi|}^{m}}$$

$$= \delta_{m,n} \sum_{\pi \in \Sigma^{*,2}_{n,n}} \int \underbrace{f_\pi}_{(g\otimes h)_\pi}(dz)\, \mu^{m}(dz)$$

$$= \delta_{m,n}\, m! \langle \tilde{g}, \tilde{h} \rangle_m, \quad \blacksquare$$