Cálculo de Malliavin en espacio Poisson:

Objetivo: estudiar la ley de objetos que surgen como función de procesos Poisson.

Approach:

Seguiré el libro de Peccati-Reitzner (analogía al caso de cálculo de Malliavin Gaussiano).

Objetivo personal:

Estudiar el límite de la ley de v.a.

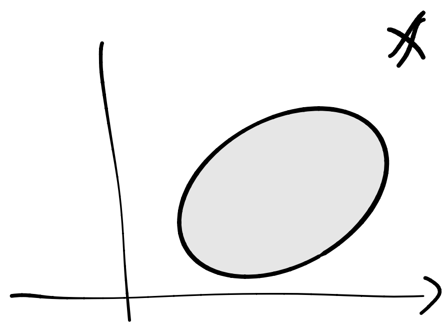
$$F_n = \sum_{k=1}^{nt} f(X_k)$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de prueba

y X_k son v.a. estables que son "débilmente independientes"

Propiedades básicas de procesos puntuales de Poisson

$(\mathbb{X}, \mathcal{X}) \leftarrow$ un espacio de medida.



Consideremos un mapeo η de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio

$\mathbf{N}_\sigma$ = todas las medidas en $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ que son σ-finitas.

$$\overset{\text{analogo}}{\longleftrightarrow} \quad \{\eta(A) \,;\, A \in \mathcal{X}\}$$

Supondremos que el mapeo

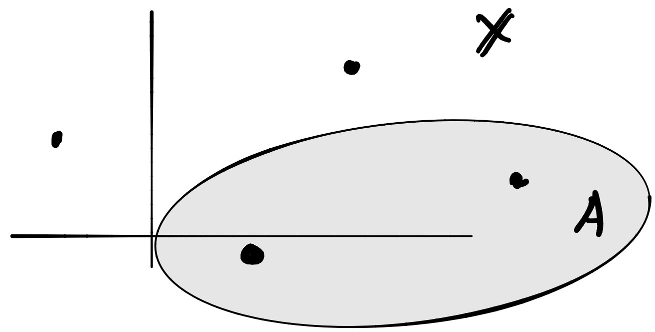
$$\eta : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbf{N}_\sigma, \mathcal{N})$$

es medible, y obtendremos ésto pidiendo pidiendo que $\mathcal{N}$ sea la mínima σ-alg. que hace a η medible.

Heurística de $(N_\sigma, \mathcal{N})$:

Una medida de referencia para obtener buenos ejemplos:

- Ejemplo 1.-)



$\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

$X_k : \Omega \to \mathbb{X}$

i.i.d con ley común $\mathbb{Q}$

"lanza n muestras de $\{X_k\}$

$$\eta(A) := \#\{i \leq n;\ X_i \in A\}.$$

$A \in \mathcal{X}$

Alternativamente

$$\eta = \sum_{k=1}^{n} \delta_{X_k}$$

- Ejemplo 2:

Tomar una v.a. $K : \Omega \to \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Poisson(λ), $\lambda > 0$.

$$\eta = \sum_{k=0}^{K} \delta_{X_k}$$

Tomamos $u : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ medible y acotada.

$$\mathbb{E}\left[e^{-\int u(x)\, \eta(dx)} \right] =$$

$\uparrow$ sustituimos $\eta(dx) = \sum_{k=0}^{K} \delta_{X_k}$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\int u(x)\, \eta(dx)} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\, \mathbb{E}\left[e^{-\left(\sum_{j=0}^{k} \delta_{X_j}\right)(u)} \right]$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{E}\left[e^{-u(X_1)} \right]^k$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\lambda \int e^{-u(x)} \, Q(dx) \right)^k = \cdots$$

con $X_1 \sim Q(dx)$. Si definimos $\mu = \lambda Q$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\int u(x) \, \eta(dx)} \right] = e^{-\int (1 - e^{-u(x)}) \, \mu(dx)}$$

Obs. importante: si $u(x) = 0$, entonces

$1 - e^{-u(x)} = 0$. De aquí se sigue que

si $\{A_i\}_{i \le n} \subset \mathcal{X}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$,

$\Rightarrow$ $\eta(A_1), \ldots, \eta(A_n)$ son indep.

Además, satisfacen $\eta(A_i) \sim \text{Poiss}(\mu(A_i))$.

Hasta el momento, solo llevamos un ejemplo:

$$\eta = \sum_{k=0}^{K} \delta_{X_k}$$

Notar que Funcionales de η

$$\updownarrow$$

Funciones $(K, X_1, X_2, \dots)$

Objetivo a "corto" plazo

Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F} = \sigma(\eta), \mathbb{P})$, entonces

$$X = \mathbb{E}[X] + \sum_{q=1}^{\infty} J_q[X],$$ donde

- $J_q[X]$ son componentes ortogonales $\mathbb{E}[J_q[X] J_{\tilde{q}}[X]] = 0$

si $q \neq \tilde{q}$

- $J_q[X]$ son fáciles de estudiar.

La elección de $J_q[X]$ van a ser "integrales múltiples de Itô".

Plan concreto:

1º) Definir $J_q[X]$ adecuadamente

2º) Definir 3 operadores "fundamentales" sobre v.a. X "adecuadas".

- D ← Derivada de Malliavin
- δ ← Integral de Skorohod
- L ← Operador de Ornstein-Uhlenbeck.

$$L = -\delta D$$ ← en cierto subdominio de $L^2(\Omega)$

"Filosóficamente", calcular

$\mathbb{E}[X f(X)]$ es "más o menos fácil" si

$X = \delta(u)$

Resultado clave:

$h: \mathbf{N}_\sigma \times \mathbb{X} \to [0,\infty]$. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\int h(\eta, x)\, \eta(dx)\right] = \mathbb{E}\left[\int h(\eta + \delta_x, x)\, \mu(dx)\right]$$

$\uparrow$

Fórmula de Mecke

(intuición: Tomen $\cdot\ \eta = \sum_{k=0}^{K} \delta_{X_k}$

$$- h(\eta, x) := \sum_{i=1}^{m} K_i\, \eta(e^{-c_i(\cdot)})\, e^{-\hat{c}_i x}$$

Nota:

Ver a la v.a. $h(\omega, x) = \circ\circ\ Y_x(\omega)$

$\uparrow$ componente aleatoria

Parámetro

En cálculo de Malliavin Gaussiano es muy útil considerar

$$\int \cdots \int \psi(x_1, \dots, x_\ell)\, B(dx_1) \cdots B(dx_\ell).$$

Emulando esta construcción, nos gustaría estudiar

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}^m} h(\eta, x_1, \dots, x_n)\, \eta(dx_1) \cdots \eta(dx_n)\right] =$$ Algo que se integra respecto a μ

Antes de continuar:

$$\mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{X}} h(\eta, x)\,\eta(dx)\Big] = \mathbb{E}\Big[\int h(\overbrace{\eta+\delta_x}^{\tilde{\eta}}, x)\,\mu(dx)\Big]$$

$\Downarrow$ Si $\quad \eta = \sum_{k=1}^{\eta(\mathbb{X})} \delta_{X_k}$

$\eta(\mathbb{X}) = k \sim Pois(\lambda)$

$\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d.

$$\mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{X}} h(\eta-\delta_x, x)\,\eta(dx)\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{X}} h(\eta, x)\mu(dx)\Big] \quad (*) \qquad X_1 \sim Q$$

Notar que

$$\int_{\mathbb{X}} h(\eta-\delta_x, x)\,\eta(dx) = \sum_i h\Big(\sum_{k\neq i} \delta_{X_k}, X_i\Big)$$

Objetivo: hacer que $(*)$ se generalice a varias variables.

Definir

$\eta^{(m)} \leftarrow$ medida aleatoria en $\mathbb{X}^m$

$$\eta^{(m)}(C) := \sum_{i_1,\dots,i_m \leq \eta(\mathbb{X})}^{\neq} \mathbb{1}_C(X_{i_1},\dots,X_{i_m})$$

$C \in \mathcal{X}^m$ con $\sum^{\neq}$ indicando que los índices son distintos 2 a 2.

Notación:

$$\sum_{i_1,\dots,i_m \leq \eta(\mathbb{X})}^{\neq} f(X_{i_1},\dots, f_{X_{i_m}})$$

$$\underset{\substack{\text{si}\\ m=3}}{\uparrow}= \sum_{i_1=1}^{\eta(\mathbb{X})} \sum_{i_2=1}^{\eta(\mathbb{X})} \sum_{i_3=1}^{\eta(\mathbb{X})} \mathbb{1}_{\{i_1\neq i_2,\ i_1\neq i_3,\ i_2\neq i_3\}} f(X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3})$$

Cómo evaluamos $\eta^{(m)}$

Tomar $C \in \mathcal{X}^{\otimes m}$ $C = B^m$ con $B \in \mathcal{X}$

$$\eta^{(m)}(B^m) = \sum_{i_1,\dots,i_m \leq \eta(\mathbb{X})}^{\neq} \mathbb{1}_B(x_1)\dots \mathbb{1}_B(x_m)$$

$$= \eta(B)(\eta(B)-1)(\eta(B)-2)\dots(\eta(B)-m+1)$$

En lo sucesivo, llamaremos a $\eta^{(m)}$ la medida factorial de η (definida en $\mathbb{X}^m$)

Nota: Notar que

$$\eta^{(m+1)}(C) = \int_{\mathbb{X}^m} \Big[\int \mathbb{1}_{\{(x_1,\dots,x_{m+1})\in C\}}\, \eta(dx_{m+1}) - \sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{\{(x_1,\dots,x_m, x_j) \in C\}} \Big] \eta^{(m)}(dx_1,\dots,dx_m)$$

Proposición

Sea $\eta \leftarrow$ proceso puntual en $\mathbb{X}$. Entonces existe una elección única c.s. de medidas $\eta^{(m)}$ definidas en $\mathbb{X}^m$ y t.q.

- $\eta^{(1)} = \eta$

- $$\eta^{(m+1)}(C) = \int_{\mathbb{X}^m} \left[\int \mathbb{1}_{\{(x_1,\dots,x_{m+1}) \in C\}} \, \eta(dx_{m+1}) - \sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{\{(x_1,\dots,x_m,x_j) \in C\}} \right] \eta^{(m)}(dx_1,\dots,dx_m)$$

Esto nos permite definir $\eta^{(m)} \leftarrow$ la medida factorial aún cuando η no tiene la forma

$$\eta = \sum_{k=1}^{\eta(\mathbb{X})} \delta_{X_k}.$$

Para dónde vamos:

Representación de Fock:

Hay ocasiones en que descomponer un espacio de Hilbert V de la siguiente manera

$$V \approx \bigoplus_{K=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes K}$$

donde $\mathcal{H}$ es un Hilbert "sencillo".

En el caso Gaussiano (si tengo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ t.q. $(L^2(\Omega), \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es t.q. $\mathcal{F} = \sigma(\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+})$ existe el teorema de descomposición en caos

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_q.$$

$\mathcal{H}_q$ son espacios ortogonales generados por v.a. del tipo

se intersecta con $\in L^2([0,\infty))^{\otimes m}$

$$\mathcal{H}_q = \left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{m-1}} \varphi(t_1, \dots, t_m) B(dt_m) \dots B(dt_1) \right.$$

Usaremos $\eta^{(m)}(\cdot)$ como reemplazo de $B(dt_m) \dots B(dt_1)$ ← se define de manera sutil.

Las propiedades de isometría de B las reemplazaremos por la fórmula de Mecke generalizada:

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}^m} h(\eta, x_1, \ldots, x_m)\ \eta^{(m)}(dx_1, \ldots, dx_m)\right]$$

No se cumple si reemplazo $\eta^{(m)}$ por η^m

$$= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} h(\eta + \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_m}, x_1, \ldots, x_n)\ \mu^{\otimes m}(dx_1, \ldots, dx_n)\right]$$

Notar que $\forall\ A \in \mathcal{X}^{\otimes m}$,

$$\mathbb{E}[\eta^{(m)}(A)] = \mu(A).$$

En las siguientes sesiones probaremos que

Si $\quad X = f(\eta), \quad Y = g(\eta). \quad X, Y \in L^2(\Omega).$

Entonces

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] + \sum_{q=1}^{\infty} \langle J_q[X], J_q[Y] \rangle_{L^2(\mu)^{\otimes q}}$$

Formula de Strook $\Rightarrow$

$$= \mathbb{E}[f(\eta)]\,\mathbb{E}[g(\eta)] + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \langle T_n f, T_n g \rangle_{L^2(\mu)^{\otimes q}}$$