Introducción a la Medida e Integración

José Villa Morales

A mis hijos José Ramón, José Miguel, María José y José

A mi esposa Ana Cecilia

A mis padres Irma y Palermo

Prólogo

El origen de este trabajo fue la necesidad de tener una referencia de carácter elemental, autocontenida y actualizada, que sirva como guía en la implementación de cursos en la materia o bien para los estudiantes. Las notas están dirigidas principalmente para aquellos alumnos de los últimos semestres de licenciatura en matemáticas (aplicadas) o los primeros semestres de maestría en matemáticas (aplicadas). Por lo tanto, se asume una cierta madurez matemática por parte del alumno, en el manejo de los conceptos básicos del cálculo y de los espacios métricos.

En el capítulo 1 se introduce la notación elemental que se utilizará en el libro y se presentan algunos resultados preliminares. Se entra en materia propiamente en el capítulo 2 donde se establen las colecciones de conjuntos para las cuales el concepto de medida que se estudiará tiene sentido, éstas son las σ-álgebras; además se introducen otras colecciones de subconjuntos auxiliares, como lo son las álgebras. En el capítulo 3 se trata el concepto de medida, y se dan sus principales propiedades. En general, es más fácil definir una medida en una álgebra, así el problema es extenderla a una medida en una σ-álgebra que contenga a la álgebra dada; este problema se estudia en el capítulo 4. Las funciones factibles de integrar, llamadas funciones medibles; se introducen en el capítulo 5 y el concepto de integral y sus principales propiedades se tratan en el capítulo 6. En el capítulo 7 se da el concepto de medida signada; el cual es una generalización del concepto de medida, en esta parte destaca el teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym. El capítulo 8 trata de los espacios L^p, los cuales son colecciones de una clase particular de funciones integrables. En esta parte se demuestra, entre otras cosas, que los espacios L^p son espacios métricos completos. En el capítulo 9 se estudian las implicaciones entre los distintos modos de convergencia como son: convergencia en medida, convergencia casi uniformemente, etcétera. Finalmente, en el capítulo 10 se introduce el concepto de medida producto y se estudia la relación que existe entre la iteración de las integrales.

El material incluido en el presente trabajo lo he dictado en varias ocasiones y hay mucha gente que ha contribuido en la mejor presentación de este, o quizá más bien en la disminición de errores. Sin embargo, las siguientes personas han jugado un papel especial en esta tarea Gerardo, Toño, Hernán, Rita y Rogelio Aarón. Gracias, pues ustedes en alguna medida han contribuido a que un sueño se convierta en realidad.

El autor

Chapter 1

Preliminares

Con el fin de hacer las notas lo más autocontenidas posible en este capítulo se introduce notación y algunos resultados de la teoría de conjuntos, conjuntos numerables y espacios métricos. En particular, el lema 1.2 y el teorema 1.1 jugarán un papel importante.

1.1 Conjuntos

Como es costumbre, por

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1,2,3,\ldots\}, \\ \mathbb{Z} &= \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}, \\ \mathbb{Q} &= \left\{\frac{m}{n} : m\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{N}\right\} \end{aligned}$$

y

$$\mathbb{R} = \text{ completación de } \mathbb{Q}$$

se denotarán los números *naturales*, *enteros*, *racionales* y *reales*, respectivamente. Por $\mathbb{R}_+$ se indicará el conjunto de los números *reales no negativos*.

La colección de todos los subconjuntos de un conjunto X se llama *conjunto potencia* y se denotará por $\mathscr{P}(X)$. Nótese que el *conjunto vacío* $\varnothing$ es un elemento de $\mathscr{P}(X)$. Si $\mathscr{C}$ es una colección de subconjuntos de X definimos

$$\begin{aligned} \bigcup_{A\in\mathscr{C}} A &= \{x : x\in A \text{ para algún } A\in\mathscr{C}\}, \\ \bigcap_{A\in\mathscr{C}} A &= \{x : x\in A \text{ para todo } A\in\mathscr{C}\}. \end{aligned}$$

En particular, si $\mathscr{C} = \{A_\alpha : \alpha\in I\}$, entonces

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x : x\in A_\alpha \text{ para algún } \alpha\in I\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha \text{ para todo } \alpha \in I\}.$$

Tenemos las siguientes propiedades:

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)\bigcap B = \bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha \cap B),$$
$$\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)\bigcup B = \bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha \cup B),$$

donde $B \subset X$.

Decimos que una colección $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ es *ajena* si para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$, se cumple que $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$.

Una colección ajena $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ de subconjuntos de X es una *partición* para X si $A_\alpha \neq \varnothing$, para todo $\alpha \in I$, y $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = X$.

Sean $A, B \subset X$. La *diferencia de A menos B* se define como

$$A \backslash B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

En particular, al conjunto $X \backslash A$ lo denotaremos por A^c, si no hay confusión con respecto a quién se hace el complemento. La *diferencia simétrica* de A y B se define como

$$A \triangle B = (A\backslash B)\bigcup(B\backslash A).$$

Las leyes de De Morgan nos serán particularmente útiles:

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c, \quad \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c.$$

Si X, Y son dos conjuntos definimos el *producto cartesiano* de X con Y como

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, \ y \in Y\}.$$

Si $f : X \to Y$ es una función y $B \subset Y$, la *imagen inversa* de B bajo f se define como

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Si $\mathscr{C}$ es una colección de subconjuntos de Y, definimos

$$f^{-1}(\mathscr{C}) = \left\{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{C}\right\}.$$

Algunas propiedades de la imagen inversa son:

$$f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c,$$
$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha).$$

Si $f : X \to Y$ y $A \subset X$, denotaremos por $f|_A$ a la *restricción de f a A*, es decir, $f|_A : A \to Y$, $(f|_A)(x) = f(x)$ para cada $x \in A$. A la función $I_X : X \to X$, $I_X(x) = x$, la llamaremos *identidad* en X. Si $A \subset X$ la función $1_A : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$1_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A, \\ 1, & x \in A, \end{cases}$$

se llama *función indicadora* de A.

Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, la *composición* de f y g es la función $g \circ f : X \to Z$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Nótese que si $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(Z)$, entonces

$$(g \circ f)^{-1}(\mathscr{C}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathscr{C})). \tag{1.1}$$

Problemas

Problema 1 *Sea $f : X \to Y$ y $A \subset X$. La imagen directa de A bajo f se define por $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. Demostrar que*

$$f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha),$$
$$f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha),$$

donde $\{A_\alpha : \alpha \in I\} \subset \mathscr{P}(X)$.

Problema 2 *Sea $f : X \to Y$. Demostrar que si $A \subset X$, $B \subset Y$, entonces $f^{-1}(f(A)) \supset A$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.*

Problema 3 *Una función $f : X \to Y$ se llama inyectiva si $f(a) = f(b)$ implica $a = b$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) f es inyectiva.
(ii) $f^{-1}(f(A)) = A$, para toda $A \in \mathscr{P}(X)$.
(iii) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, para cualesquiera $A_1, A_2 \in \mathscr{P}(X)$.
(iv) Existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = I_X$.

Problema 4 *Una función $f : X \to Y$ se llama sobre si para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) f es sobre.
(ii) $f(f^{-1}(B)) = B$, para toda $B \in \mathscr{P}(Y)$.
(iii) Existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = I_Y$.

Problema 5 *Una función $f : X \to Y$ se llama biyectiva si es inyectiva y sobre. Demostrar que f es biyectiva si y sólo si $(f(A))^c = f(A^c)$, para toda $A \in \mathscr{P}(X)$.*

Problema 6 *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. Demostrar que si $g \circ f$ es inyectiva (sobre), entonces f es inyectiva (g es sobre).*

Problema 7 *Sean $A, E \subset X$ y $B, F \subset Y$. Demostrar que*

$$\begin{aligned} (A \times B)^c &= (A^c \times B) \cup (X \times B^c), \\ (A \times B) \cap (E \times F) &= (A \cap E) \times (B \cap F). \end{aligned}$$

Problema 8 *Sean $A, B \subset X$. Demostrar que*

$$1_{A \triangle B} = |1_A - 1_B|, \quad 1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}.$$

Problema 9 *Sean $A, B, C \subset X$. Demostrar que $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$.*

1.2 Conjuntos numerables y suma de números no negativos

Sean X e Y dos conjuntos. Decimos que la *cardinalidad* de X es menor o igual que la cardinalidad de Y si existe una función inyectiva $f : X \to Y$. En este caso escribiremos $card(X) \leq card(Y)$. Un conjunto X se llama *contable* si $card(X) \leq card(\mathbb{N})$. Si X es finito por $card(X)$ entenderemos el número de elementos en X. A un conjunto contable infinito lo llamaremos *numerable*.

Proposición 1.1 *La unión de una colección contable de conjuntos contables es contable.*

Demostración. Sea $J \subset \mathbb{N}$ y $\{A_j : j \in J\}$ una colección contable de conjuntos contables. Para cada $j \in J$ existe una función inyectiva $f_j : A_j \to \mathbb{N}$. Si $x \in \cup_{j \in J} A_j$, existe $j \in J$ tal que $x \in A_j$. Sea $j(x) = \min\{j : x \in A_j\}$. La función $f : \cup_{j \in J} A_j \to \mathbb{N}$ definida como $f(x) = 2^{j(x)} 3^{f_{j(x)}(x)}$, es inyectiva. En efecto, sean $x, x' \in \cup_{j \in J} A_j$ tal que $f(x) = f(x')$. Supongamos que $j(x) > j(x')$, entonces

$$\begin{aligned} 2[2^{j(x)-j(x')-1} 3^{f_{j(x)}(x)}] &= 3^{f_{j(x')}(x')} \qquad (1.2) \\ &= (2+1)^{f_{j(x')}(x')} \\ &= \sum_{k=0}^{f_{j(x')}(x')} \binom{f_{j(x')}(x')}{k} 2^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{f_{j(x')}(x')} \binom{f_{j(x')}(x')}{k} 2^k. \end{aligned}$$

Así el lado izquierdo de (1.2) es un número par y el derecho un número impar. Por lo tanto, $j(x) \leq j(x')$. De manera análoga se demuestra que $j(x') \leq j(x)$. De este modo $j(x') = j(x)$. La inyectividad de $f_{j(x)}$ implica, $x = x'$. ■

Ejemplo 1.1 $\mathbb{Z} = \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ *es numerable.*

Ejemplo 1.2 $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\right\}$ *es numerable.*

Proposición 1.2 *El producto cartesiano de un número finito de conjuntos contables es contable.*

Demostración. Basta mostrar que si A_1 y A_2 son contables, entonces $A_1 \times A_2$ es contable. El caso general se concluye usando inducción. Nótese que

$$A_1 \times A_2 = \bigcup_{a \in A_1} (\{a\} \times A_2).$$

Puesto que $card(\{a\} \times A_2) \leq card(A_2)$, entonces el resultado se sigue de la proposición 1.1. ■

En teoría de la medida es conveniente usar la siguiente extensión de los números reales. Consideraremos el conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, al cual llamaremos conjunto de los *números reales extendidos*. Convenimos en que los símbolos $-\infty$ y $+\infty$ cumplen que para toda $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$. Además, se definen las siguientes operaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}
x(\pm\infty) &= (\pm\infty)x = \begin{cases} \pm\infty, & 0 < x \leq +\infty, \\ 0, & x = 0, \\ \mp\infty, & -\infty \leq x < 0, \end{cases} \qquad (1.3) \\
\frac{x}{\pm\infty} &= \begin{cases} 0, & -\infty < x < +\infty, \\ \text{no está definida}, & x = \pm\infty. \end{cases} \\
(+\infty) + x &= x + (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & -\infty < x \leq +\infty, \\ \text{no está definida}, & x = -\infty, \end{cases} \\
(-\infty) + x &= x + (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & -\infty \leq x < +\infty, \\ \text{no está definida}, & x = +\infty, \end{cases}
\end{aligned}$$

Por $\overline{\mathbb{R}}_+$ indicaremos al conjunto $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Los límites *inferior y superior* de una sucesión (x_n) en $\overline{\mathbb{R}}$ se definen por

$$\liminf x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geq n} x_k \right) \quad \text{y} \quad \limsup x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n} x_k \right).$$

La suma de un conjunto $\{a_\alpha : \alpha \in I\} \subset \mathbb{R}_+$ se define por

$$\sum_{\alpha \in I} a_\alpha = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} a_\alpha : F \subset I,\ F \text{ finito} \right\}. \qquad (1.4)$$

Nótese que $\sum_{\alpha \in I} a_\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Lema 1.1 *Sea* $\{a_\alpha : \alpha \in I\} \subset \mathbb{R}_+$ *y* $\{P_\beta : \beta \in L\}$ *una partición de* I*. Entonces*

$$\sum_{\alpha \in I} a_\alpha = \sum_{\beta \in L} \sum_{\alpha \in P_\beta} a_\alpha.$$

Demostración. Sea $F \subset I$ finito. Sea $G = \{\beta \in L : F \cap P_\beta \neq \varnothing\} \subset L$, así $\{F \cap P_\beta : \beta \in G\}$ es partición de F (dada $\beta \in G$ tomamos un único $\varphi(\beta) \in F \cap P_\beta$, luego $\varphi : G \longrightarrow F$ es inyectiva, por lo tanto G es finita). De esta manera

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha \in F} a_\alpha &= \sum_{\alpha \in \cup_{\beta \in G}(F \cap P_\beta)} a_\alpha \\ &= \sum_{\beta \in G} \sum_{\alpha \in F \cap P_\beta} a_\alpha \\ &\leq \sum_{\beta \in G} \sum_{\alpha \in P_\beta} a_\alpha \leq \sum_{\beta \in L} \sum_{\alpha \in P_\beta} a_\alpha.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{\alpha \in I} a_\alpha \leq \sum_{\beta \in L} \sum_{\alpha \in P_\beta} a_\alpha. \tag{1.5}$$

Veamos la desigualdad contaria a (1.5). Basta considerar el caso $\sum_{\alpha \in I} a_\alpha < \infty$, esto implica que $\sum_{\alpha \in P_\beta} a_\alpha < \infty$ para cada $\beta \in L$. Sea $\varepsilon > 0$ y $G \subset L$ finito. Existe $F_{\varepsilon,\beta} \subset P_\beta$ finito tal que

$$\sum_{\alpha \in P_\beta} a_\alpha - \frac{\varepsilon}{n_G} \leq \sum_{\alpha \in F_{\varepsilon,\beta}} a_\alpha,$$

donde n_G es el número de elementos de G, por ende

$$\sum_{\beta \in G} \sum_{\alpha \in P_\beta} a_\alpha - \varepsilon \leq \sum_{\beta \in G} \sum_{\alpha \in F_{\varepsilon,\beta}} a_\alpha = \sum_{\alpha \in \cup_{\beta \in G} F_{\varepsilon,\beta}} a_\alpha \leq \sum_{\alpha \in I} a_\alpha.$$

Haciendo $\varepsilon \downarrow 0$ y tomando supremos sobre G obtenemos el resultado. ∎

Para una versión más general del concepto de suma ver el Capítulo IX de Jacques Dixmier, General Topology, Springer1984. Si $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}_+$, de (1.4) es inmediato que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Una *sucesión doble* en $\mathbb{R}$ es una función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. El valor de (m, n) bajo f lo denotaremos por a_{mn} y representaremos a f por (a_{mn}).

Lema 1.2 *Sea* (a_{mn}) *una sucesión doble en* $\mathbb{R}_+$*. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}.$$

Demostración. Las colecciones $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{Q_k : k \in \mathbb{N}\}$, donde $P_n = \{(n,m) : m \in \mathbb{N}\}$ y $Q_k = \{(m,k) : m \in \mathbb{N}\}$, son particiones de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Del lema 1.1 resulta que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{(n,k)\in P_n} a_{nk} \\ &= \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{nk} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{(n,k)\in Q_k} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}.\end{aligned}$$

Como se queria demostrar. ■

El teorema de Tonelli es una versión más general de éste hecho.

Problemas

Problema 10 *Demostrar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable.*

Problema 11 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente demostrar que f tiene un número contable de discontinuidades.*

Problema 12 *Sean $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ y $M > 0$ tal que si $x_1, ..., x_n \in [0,1]$, entonces*

$$|f(x_1) + \cdots + f(x_n)| \leq M.$$

Demostrar que $\{x \in [0,1] : f(x) \neq 0\}$ es contable.

Problema 13 *Sea X un conjunto finito. Demostrar que $f : X \to X$ es sobre si y sólo si f es inyectiva.*

Problema 14 *Sea X un conjunto finito y $f : X \to X$ inyectiva. Demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}} = I_X.$$

Problema 15 *Sean (a_{mn}) una sucesión doble en $\mathbb{R}_+$ y $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\eta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dos funciones biyectivas. Demostrar que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{\eta(m,n)}.$$

Problema 16 *Encontrar las sumas:* $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^\alpha}$, $\sum_{\alpha\in[0,1]} \frac{1}{2^\alpha}$.

1.3 Espacios métricos

Sea X un conjunto no vacío. Una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se llama *métrica* (o distancia) en X si para cualesquiera $x, y, z \in X$ se cumple:

(i) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$.

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

La pareja (X,d) se llama *espacio métrico*.

Nótese que d es una función no negativa:

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y).$$

La *bola abierta* con centro en $a \in X$ y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B(a,r) = \{x \in X : d(x,a) < r\}.$$

Un conjunto $A \subset X$ se llama *conjunto abierto* si para cada $a \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset A$. La colección de todos los conjuntos abiertos de X la denotaremos por τ (o por, τ_X) y la llamaremos topología. Un conjunto $F \subset X$ se llama *cerrado* si F^c es abierto. Si $F \subset X$, por $\overline{F}$ denotaremos al mínimo cerrado que contiene a F. Un conjunto $D \subset X$ se dice *denso* en X si para cualesquiera $x \in X$ y $r > 0$ se tiene que $B(x,r) \cap D \neq \emptyset$. X se dice *separable* si existe un conjunto denso contable.

Teorema 1.1 (Lindelöf) *Sea X un espacio métrico separable y $\mathscr{C}$ una colección de conjuntos abiertos en X. Entonces existe una subcolección $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ tal que*

$$\bigcup_{\mathscr{O} \in \mathscr{C}} \mathscr{O} = \bigcup_{\mathscr{O} \in \mathscr{C}'} \mathscr{O}.$$

Demostración. Sea D un conjunto contable denso en X y $U = \cup_{\mathscr{O} \in \mathscr{C}} \mathscr{O}$. Sea $x \in U$, existe $\mathscr{O} \in \mathscr{C}$ tal que $x \in \mathscr{O}$. Entonces existe $r > 0$ para el cual $B(x,r) \subset \mathscr{O}$. Por otra parte, existe $m(x) \in \mathbb{N}$ tal que $1/m(x) < r/2$ y $a(x) \in D \cap B(x, 1/m(x))$. Nótese que si $y \in B(a(x), 1/m(x))$, entonces

$$d(x,y) \leq d(x, a(x)) + d(a(x), y) < 2/m(x) < r.$$

Esto indica que, $B(a(x), 1/m(x)) \subset B(x,r)$. Puesto que la colección $\{B(a, 1/m) : a \in D, m \in \mathbb{N}\}$ es contable, entonces $\{B(a(x), 1/m(x)), x \in U\}$ es contable, y $U = \cup_{x \in U} B(a(x), 1/m(x))$. Para cada $B(a, 1/m)$ en $\{B(a(x), 1/m(x)) : x \in U\}$ tómese un $\mathscr{O}$ en $\mathscr{C}$ tal que $B(a, 1/m) \subset \mathscr{O}$, esto forma una subcolección contable $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ que cumple lo deseado. ■

Una sucesión (x_n) en X se dice *convergente* si existe $x \in X$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$, para toda $n \geq N$. A su vez, decimos que (x_n) es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, para cualesquiera n, $m \geq N$. Toda sucesión convergente es de Cauchy, sin embargo, el recíproco no es cierto en general. Un espacio métrico en el que toda sucesión de Cauchy es convergente se llama *completo*. Si (x_n) es una sucesión en X y $(n_k)_k$ es una sucesión en $\mathbb{N}$ tal que $n_1 < n_2 < \cdots$, la sucesión $(x_{n_k})_k$ se llama *subsucesión* de (x_n). Un elemento $x \in X$ se llama *valor adherente* de (x_n) si existe un subsucesión de (x_n) que converja a x. El resultado que a continuación presentamos a menudo nos permite mostrar la completez de un espacio métrico.

Proposición 1.3 (Extracción al estilo de Cauchy) *Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X y $a > 0$. Entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de (x_n), tal que $d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq a^k$, para toda $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por hipótesis, existe $n(a) \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_n, x_m) \leq a$, para cualesquiera $n, m \geq n(a)$. Sea $n_1 = n(a)$. Supongamos que hemos tomado los enteros $n_1 < \cdots < n_k$ tal que $d(x_{n_{j+1}}, x_{n_j}) \leq a^j$, para toda $j = 1, ..., k-1$. Elijamos $n(a^{k+1}) \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_n, x_m) \leq a^{k+1}$, para cualesquiera $n, m \geq n(a^{k+1})$. Sea $n_{k+1} = \max\{n(a^{k+1}), n_k\} + 1$. De esta forma se construye por inducción una subsucesión creciente $(n_k)_k$ de (n) que cumple lo requerido. ■

Sean (X_1, d_1), (X_2, d_2) dos espacios métricos y $f : X_1 \to X_2$. Se dice que f es *continua* en X_1 si para cada $x \in X_1$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_1(x, y) < \delta$, entonces $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Sea V un espacio vectorial real. Una función $N : V \to \mathbb{R}$ se llama *norma* si

(i) $N(v) = 0$ si y sólo si $v = 0$.

(ii) $N(\alpha v) = |\alpha| N(v) \quad \alpha \in \mathbb{R},\ v \in V.$

(iii) $N(u + v) \leq N(u) + N(v) \quad v, u \in V.$

La pareja (V, N) se llama *espacio vectorial normado*.

Al igual que con la distancia se tiene que $N \geq 0$. La función $d(\cdot, \cdot\cdot) = N(\cdot - \cdot\cdot)$ es una distancia en V y esta es la que usaremos al hablar de los conceptos referentes a espacios métricos en V.

Ejemplo 1.3 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$*, es un espacio vectorial normado separable y completo.*

Problemas

Problema 17 *Demostrar que la función $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$, definida por*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x = -\infty, \\ \frac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R}, \\ 1, & x = +\infty, \end{cases}$$

es creciente, es sobre y $d(\cdot, \cdot\cdot) = |f(\cdot) - f(\cdot\cdot)|$ es una distancia en $\overline{\mathbb{R}}$.

Problema 18 *Demostrar que* $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ *es un espacio vectorial normado separable y completo, donde*

$$||x-y|| = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2},$$

si $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$.

Problema 19 *Demostrar que en un espacio métrico separable todas las colecciones ajenas de conjuntos abiertos no vacíos son contables.*

Problema 20 *Sean* (X_1,d_1), (X_2,d_2) *dos espacios métricos y* $f : X_1 \to X_2$. *Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) f *es continua.*
(ii) $f^{-1}\left(\tau_{X_2}\right) \subset \tau_{X_1}$.
(iii) Si (x_n) *converge a* x, *entonces* $(f(x_n))$ *converge a* $f(x)$.

Problema 21 *Sea* (x_n) *una sucesión en el espacio métrico* X, *tal que las subsucesiones* (x_{2n}), (x_{2n+1}) *y* (x_{3n}) *son convergentes. Demostrar que* (x_n) *es convergente.*

Problema 22 *Dar un ejemplo de una sucesión que tenga un único valor adherente pero que no sea convergente.*

Problema 23 *Sea* (x_n) *una sucesión en* $\overline{\mathbb{R}}$. *Demostrar que* $\liminf x_n$ *y* $\limsup x_n$ *son el mínimo y máximo de los valores adherentes de* (x_n).

Problema 24 *Demostrar que toda sucesión de Cauchy con un valor adherente es convergente.*

Chapter 2

Colecciones de conjuntos

Al estudiar un conjunto X surgen usualmente preguntas acerca de cuáles elementos del conjunto cumplen cierta propiedad. Esto produce, en principio para cada condición, distintos subconjuntos de X. Para tales subconjuntos nos gustaría, por ejemplo, conocer su “tamaño”. Así, el objetivo de este capítulo es introducir algunas colecciones de subconjuntos de X para las cuales tenga sentido (o sea posible) medir su tamaño.

2.1 σ-Álgebras

Definición 2.1 *Sea X un conjunto. Una colección de subconjuntos $\mathscr{A}$ de X se llama σ-álgebra si:*
(i) $X \in \mathscr{A}$.
(ii) *Si $A \in \mathscr{A}$, entonces $A^c \in \mathscr{A}$.*
(iii) *Si (A_n) es una sucesión en $\mathscr{A}$, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.*
La pareja ordenada $(X, \mathscr{A})$ se llama espacio medible. Un elemento de la colección $\mathscr{A}$ se llama conjunto $\mathscr{A}$-medible o simplemente conjunto medible, si no hay confusión.

Una colección de conjuntos que satisface las condiciones (ii) y (iii) de la definición anterior, se dice que es cerrada bajo complementos y uniones numerables.

Por ser la σ-álgebra $\mathscr{A}$ cerrada bajo complementos tenemos, que $\emptyset \in \mathscr{A}$ y si (B_n) es una sucesión en $\mathscr{A}$, de las leyes de De Morgan, se sigue que $\cap_{n=1}^{\infty} B_n = \left(\cup_{n=1}^{\infty} B_n^c\right)^c$ también está en $\mathscr{A}$.

A continuación se dan algunos ejemplos de σ-álgebras.

Ejemplo 2.1 *Sea X un conjunto. Entonces $\mathscr{A} = \{X, \emptyset\}$ es una σ-álgebra (es la σ-álgebra más pequeña).*

Ejemplo 2.2 *Sea X un conjunto. Entonces el conjunto potencia de X es una σ-álgebra (es al σ-álgebra más grande).*

Ejemplo 2.3 *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y $B \subset X$. Entonces $(B, \mathscr{A} \cap B)$, con $\mathscr{A} \cap B = \{A \cap B : A \in \mathscr{A}\}$, es un espacio medible.*

Ejemplo 2.4 (σ-álgebra co-contable) *Sea X un conjunto. Entonces*

$$\mathscr{A} = \{A \subset X : A \text{ es contable o } A^c \text{ es contable}\}.$$

es una σ-álgebra. En efecto, si X es contable, entonces $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$ es una σ-álgebra. Supongamos que X no es contable y veamos la condición (iii) de la definición de σ-álgebra. Sea (A_n) una sucesión en A. Si $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es contable no hay nada que probar. Por otra parte, si $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ no es contable entonces existe A_{n_0} tal que A_{n_0} no es contable, por lo tanto, $A_{n_0}^c$ es contable, pues $A_{n_0} \in \mathscr{A}$. En consecuencia

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subset A_{n_0}^c,$$

es contable. Así $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

Ejemplo 2.5 *Sea $\{\mathscr{A}_\alpha : \alpha \in I\}$ una colección de σ-álgebras de X, entonces $\cap_{\alpha \in I} \mathscr{A}_\alpha$ es también una σ-álgebra de X. De igual forma que en el ejemplo anterior verificamos la última condición de la definición de σ-álgebra. Sea $\beta \in I$ y (A_n) una sucesión en $\cap_{\alpha \in I} \mathscr{A}_\alpha \subset \mathscr{A}_\beta$, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}_\beta$. Puesto que $\beta \in I$ es arbitrario resulta que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \cap_{\alpha \in I} \mathscr{A}_\alpha$.*

Teorema 2.1 *Sea $\mathscr{C}$ una colección de subconjuntos de X. Entonces existe una σ-álgebra $\mathscr{A}_0$, tal que $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}_0$ y $\mathscr{A}_0$ está contenida en toda σ-álgebra que contenga a $\mathscr{C}$.*

Demostración. Sea $I = \{\mathscr{B} : \mathscr{B}$ es una σ-álgebra de X y $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}\}$. Notemos que $I \neq \emptyset$, pues $\mathscr{P}(X) \in I$. Sea $\mathscr{A}_0 = \cap_{\mathscr{B} \in I} \mathscr{B}$. Por el ejemplo 2.5 tenemos que $\mathscr{A}_0$ es una σ-álgebra, y es la más pequeña σ-álgebra en la familia I. ■

Este resultado nos produce la:

Definición 2.2 *La σ-álgebra $\mathscr{A}_0$ (descrita en el teorema 2.1) se llama σ-álgebra generada por la colección $\mathscr{C}$ y se denota por $\sigma(\mathscr{C})$.*

Nótese que si $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_2$, entonces $\sigma(\mathscr{C}_1) \subset \sigma(\mathscr{C}_2)$.

Sea X un espacio métrico y τ su topología respectiva. Entonces la σ-álgebra $\sigma(\tau)$ se llama *σ-álgebra de Borel* y se denota por $\mathscr{B}(X)$, sus elementos se llaman borelianos o conjuntos de Borel. En particular, si $X = \mathbb{R}$ veremos, en el teorema 2.2, que $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ es generada por los intervalos abiertos. Pero antes estableceremos el:

Lema 2.1 *Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ no vacío. Entonces existe una colección contable de intervalos abiertos ajenos cuya unión es U.*

Demostración. Por ser U un conjunto abierto tenemos que para cada $x \in U$ la colección $\mathscr{U}_x$ de intervalos abiertos que son subconjuntos de U y contienen a x es no vacía. Sea I_x el intervalo[1] abierto $\cup_{I \in \mathscr{U}_x} I$. Por el teorema 1.1 existe una colección $\{I_{x(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ tal que,

$$U = \bigcup_{x \in U} I_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{x(n)}.$$

Además, si $I_{x(n)} \cap I_{x(m)} \neq \varnothing$, entonces $I_{x(n)} \cup I_{x(m)}$ es un intervalo y $I_{x(n)} \subset I_{x(n)} \cup I_{x(m)} \supset I_{x(m)}$, luego por la definición de $\mathscr{U}_x$ e I_x, se concluye que $I_{x(n)} = I_{x(n)} \cup I_{x(m)} = I_{x(m)}$. De esta forma se tiene que, $\{I_{x(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de intervalos ajenos. ■

Teorema 2.2 *Denotaremos por $\mathscr{C}((a,b))$ a la colección de todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, las colecciones de conjuntos $\mathscr{C}([a,b])$, $\mathscr{C}([a,b))$, $\mathscr{C}((a,b])$, $\mathscr{C}((a,+\infty))$, $\mathscr{C}([a,+\infty))$, $\mathscr{C}((-\infty,a))$ y $\mathscr{C}((-\infty,a])$ se definen de manera análoga. Entonces*

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(\mathbb{R}) &= \sigma(\mathscr{C}((a,b))) = \sigma(\mathscr{C}([a,b])) \\ &= \sigma(\mathscr{C}([a,b))) = \sigma(\mathscr{C}((a,b])) \\ &= \sigma(\mathscr{C}((a,+\infty))) = \sigma(\mathscr{C}([a,+\infty))) \\ &= \sigma(\mathscr{C}((-\infty,a))) = \sigma(\mathscr{C}((-\infty,a])).\end{aligned}$$

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Para demostrar el resultado comencemos observando:

$$\begin{aligned}(a,b) &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right], \\ [a,b] &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[a, b+\frac{1}{n}\right) \\ [a,b) &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n}, \frac{a+b}{2}\right] \bigcup \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a+b}{2}, b-\frac{1}{n}\right], \\ (a,b] &= (a,+\infty) \cap (b,+\infty)^c, \\ (a,+\infty) &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n}, +\infty\right), \\ [a,+\infty) &= (-\infty,a)^c, \\ (-\infty,a) &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-\infty, a-\frac{1}{n}\right], \\ (-\infty,a] &= (a,+\infty)^c.\end{aligned}$$

[1] I_x es un intervalo puesto que es unión de conjuntos conexos con intersección no vacía.

Sea $U \in \tau$, entonces $U = \cup_{n=1}^{\infty}(U \cap (-n, n))$. Por el lema 2.1 tenemos que el abierto $U \cap (-n, n)$ es unión contable de intervalos abiertos de la forma (a, b), en consecuencia $U \in \sigma\left(\mathscr{C}\left((a, b)\right)\right)$. Por lo tanto, $\tau \subset \sigma\left(\mathscr{C}\left((a, b)\right)\right)$. De las expresiones dadas anteriormente, para los diferentes tipos de intervalos, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sigma(\tau) &\subset \sigma(\mathscr{C}((a, b))) \\
&\subset \sigma(\mathscr{C}([a, b])) \subset \sigma(\mathscr{C}([a, b))) \\
&\subset \sigma(\mathscr{C}((a, b])) \subset \sigma(\mathscr{C}((a, +\infty))) \\
&\subset \sigma(\mathscr{C}([a, +\infty))) \subset \sigma(\mathscr{C}((-\infty, a))) \\
&\subset \sigma(\mathscr{C}((-\infty, a])) \subset \sigma(\tau).
\end{aligned}$$

Con lo cual el resultado queda demostrado. ■

Ejemplo 2.6 *La σ-álgebra generada por la colección $\{A, \{-\infty\}, \{+\infty\} : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$ se denotará por $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ y la llamaremos σ-álgebra de Borel extendida.*

Problemas

Problema 25 *Demostrar que $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathscr{C}((a, +\infty])) = \sigma(\mathscr{C}((a, b)))$.*

Problema 26 *Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $\mathscr{C} = \{\{a, b, c\}, \{c, d, e\}\}$. Encontrar $\sigma(\mathscr{C})$.*

Problema 27 *Sean $b \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Demostrar que $A + b = \{a + b : a \in A\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.*

Problema 28 *Sea $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$ y $B \subset X$. Demostrar que $B \cap \sigma_X(\mathscr{C}) = \sigma_B(B \cap \mathscr{C})$, el subíndice indica donde está la σ-álgebra (Ver la notación del ejemplo 2.3. Hint, $\mathscr{K} = \{E \in \sigma_X(\mathscr{C}) : B \cap E \in \sigma_B(B \cap \mathscr{C})\}$.)*

Problema 29 *Dar un ejemplo de una sucesión $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2 \subset \cdots$ de σ-álgebras de algún conjunto X tal que $\cup_{n=1}^{\infty}\mathscr{A}_n$ no sea una σ-álgebra.*

Problema 30 *Sean $I \neq \emptyset$ un conjunto de índices arbitrario y $\mathscr{A} = \sigma(\{E_\alpha : \alpha \in I\}) \subset \mathscr{P}(X)$. Demostrar que para cada $E \in \mathscr{A}$ existe $I_E \subset I$ contable tal que $E \in \sigma(\{E_\alpha : \alpha \in I_E\})$.*

Problema 31 *Si $\mathscr{A}$ es la σ-álgebra generada por una colección numerable (A_n) de conjuntos ajenos tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty}A_n$. Demostrar que cada miembro de $\mathscr{A}$ es la unión de una subcolección contable de (A_n).*

Problema 32 *Demostrar que X es contable si y sólo si $\mathscr{P}(X) = \sigma(\{\{x\} : x \in X\})$.*

Problema 33 *Demostrar que una σ-álgebra es finita o no es numerable.*

Problema 34 *Una σ-álgebra se dice separable (o contablemente generada) si es generada por una colección contable. Sea $(\mathscr{A}_j)$ una sucesión de σ-álgebras de X. Demostrar que si cada $\mathscr{A}_j$ es separable, entonces $\sigma\left(\cup_{j=1}^{\infty}\mathscr{A}_j\right)$ es separable.*

Problema 35 *Demostrar que $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ es separable.*

Problema 36 *Sea $\mathscr{A}$ la σ-álgebra del ejemplo 2.4. Demostrar que $\mathscr{A}$ no es separable.*

Problema 37 *Sean $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2$ dos σ-álgebras, con $\mathscr{A}_2$ separable. ¿Es $\mathscr{A}_1$ separable?.*

2.2 Clases monótonas y álgebras

Definición 2.3 *Sea (A_n) una sucesión de subconjuntos de X. Decimos que (A_n) es creciente si $A_n \subset A_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y este hecho lo denotamos por $A_n \uparrow$. Similarmente, (A_n) es decreciente si (A_n^c) es creciente y se denota por $A_n \downarrow$. En cualesquiera de los dos casos anteriores decimos que la sucesión (A_n) es monótona.*

Otro concepto es:

Definición 2.4 *Una colección de subconjuntos $\mathscr{M}$ de X se llama clase monótona si para cualquier sucesión (A_n) en $\mathscr{M}$ tal que (A_n) es creciente, se cumple que $\cup_{n=1}^{\infty}A_n \in \mathscr{M}$, y si (A_n) es decreciente entonces $\cap_{n=1}^{\infty}A_n \in \mathscr{M}$.*

El siguiente resultado nos da ejemplos de clases monótonas.

Lema 2.2 *Una σ-álgebra es una clase monótona.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de las definiciones. ∎

El recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, si $X = \{a, b\}$, entonces $\mathscr{M} = \{\{a\}, X\}$ es una clase monótona y no es una σ-álgebra.

Como ocurre en las σ-álgebras, la intersección arbitraria de clases monótonas es una clase monótona. Entonces, dada una colección de subconjuntos $\mathscr{C}$ de X existe una mínima clase monótona que contiene a $\mathscr{C}$. Esta clase monótona mínima se denota por $m(\mathscr{C})$ y se llama *clase monótona generada por $\mathscr{C}$*.

Otra colección de subconjuntos es la que a continuación se introduce.

Definición 2.5 *Una colección $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X se llama álgebra en X si:*

(i) $X \in \mathscr{F}$.

(ii) *Si* $A \in \mathscr{F}$, *entonces* $A^c \in \mathscr{F}$.

(iii) *Si* $(A_k)_{k=1}^{n}$ *es una sucesión finita en* $\mathscr{F}$, *entonces* $\cup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{F}$.

Como ejemplos de álgebras tenemos a las σ-álgebras dadas en la sección anterior. La intersección arbitarias de álgebras es también una álgebra. A continuación damos otros dos ejemplos concretos de álgebras. Es importante señalar que el segundo de ellos, el del lema 2.3, juega un papel importante en nuestro desarrollo de la teoría de la medida.

Ejemplo 2.7 *Sea X un conjunto no vacío y*

$$\mathscr{F} = \{A \subset X : A \text{ es finito o } A^c \text{ es finito}\}.$$

Si X es finito entonces $\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$, que es una σ-álgebra. Si X es infinito entonces procediendo como en el ejemplo 2.4 se demuestra que $\mathscr{F}$ es una álgebra. Veamos que $\mathscr{F}$ no es una σ-álgebra. Sean $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ y $A = \{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $A \notin \mathscr{F}$ (puesto que A es infinito y $A^c \supset \{x_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, por lo cual A^c también es infinito). Si $\mathscr{F}$ fuera una σ-álgebra, entonces $A = \cup_{n=1}^{\infty}\{x_{2n}\} \in \mathscr{F}$, ya que $\{x_{2n}\} \in \mathscr{F}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y de la última parte de la definición de σ-álgebra. Lo que sería una contradicción.

Sea $X = \mathbb{R}$. Definamos la colección

$$\mathscr{C}(\mathbb{R}) = \{(-\infty, a], (a, b], (b, +\infty) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}.$$

Nótese que $\emptyset$ está en $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ y que $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ es cerrada bajo intersecciones, es decir, si $I, J \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, entonces $I \cap J \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Lema 2.3 *La colección*

$$\mathscr{F}(\mathbb{R}) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} I_i : I_i \in \mathscr{C}(\mathbb{R}),\ I_i \cap I_j = \emptyset,\ i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

es una álgebra en $\mathbb{R}$.

Demostración. Ya que $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty)$, la primera condición de la definición de álgebra se cumple. Sea $A \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$, entonces $A = \emptyset$ o A es de una de las siguientes formas

$$(a_1, b_1] \cup \cdots \cup (a_n, b_n], \tag{2.1}$$
$$(-\infty, l] \cup (a_1, b_1] \cup \cdots \cup (a_n, b_n] \cup (r, +\infty), \tag{2.2}$$
$$(-\infty, l] \cup (a_1, b_1] \cup \cdots \cup (a_n, b_n], \tag{2.3}$$
$$(a_1, b_1] \cup \cdots \cup (a_n, b_n] \cup (r, +\infty), \tag{2.4}$$
$$(-\infty, l] \cup (r, +\infty) \tag{2.5}$$
$$(-\infty, l], \tag{2.6}$$
$$(r, +\infty), \tag{2.7}$$

con $l \leq a_1 < b_1 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq r$. Si A es de la forma (2.1) (respectivamente, (2.2), (2.3), (2.4), (2.6), (2.7)), entonces A^c es de la forma (2.2) (respectivamente, (2.1), (2.4), (2.3), (2.1), (2.7), (2.6)). Así, en cualquier caso $A^c \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$. Si $A, B \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$, entonces $A^c, B^c \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$, así $A^c = \cup_{i=1}^n I_i$ y $B^c = \cup_{j=1}^m J_j$. Por lo tanto $A^c \cap B^c = \cup_{i=1}^n \cup_{j=1}^m (I_i \cap J_j) \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$, por ser $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ cerrada bajo intersecciones finitas. Luego, la tercera parte de la definición de álgebra se sigue de que $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$. ■

La colección $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ es pequeña, pues conjuntos como el intervalo $(0,1)$ no están en $\mathscr{F}(\mathbb{R})$. En efecto, si $(0,1) \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$, entonces

$$(0,1) = \bigcup_{i=1}^{n} I_i,$$

con $\{I_i : i = 1, ..., n\}$ una colección ajena en $\mathscr{C}(\mathbb{R})$. Bajo estas circunstancias, los intervalos I_i son de la forma $(a_i, b_i]$, $(0,1) = \cup_{i=1}^n (a_i, b_i]$. Sea $b_n = \max\{b_i : i = 1, ..., n\}$, entonces $b_n \in \cup_{i=1}^n (a_i, b_i] = (0,1)$. Por lo tanto, $0 < b_n < 1$. Tomemos un $0 < b_n < x < 1$. Así, $x \in (0,1) = \cup_{i=1}^n (a_i, b_i]$. Por ende, existe $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \in (a_{i_0}, b_{i_0}]$. En consecuencia, $b_n < x \leq b_{i_0}$. Lo que contradice la definición de b_n.

La colección $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ no es una σ-álgebra, puesto que $\mathscr{C}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{F}(\mathbb{R})$ y

$$(0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right].$$

Por otra parte, del teorema 2.2 se sigue que $\sigma(\mathscr{F}(\mathbb{R})) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. En efecto,

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{C}((a,b])) \subset \sigma(\mathscr{C}(\mathbb{R})) \subset \sigma(\mathscr{F}(\mathbb{R})) \subset \sigma(\mathscr{B}(\mathbb{R})) = \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Lema 2.4 *Si $\mathscr{F}$ es una álgebra y una clase monótona, entonces $\mathscr{F}$ es una σ-álgebra.*

Demostración. Para mostrar que $\mathscr{F}$ es una σ-álgebra falta ver que se cumple la condición (iii) de la definición 2.1. Sea (A_n) una sucesión en $\mathscr{F}$ y definamos $B_n = \cup_{k=1}^n A_k$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $B_n \in \mathscr{F}$, pues $\mathscr{F}$ es una álgebra. Además, por ser (B_n) una sucesión monótona creciente y $\mathscr{F}$ una clase monótona tenemos que $\cup_{n=1}^\infty A_n = \cup_{n=1}^\infty B_n \in \mathscr{F}$. ■

Un resultado que es muy útil en análisis y probabilidad es el:

Teorema 2.3 (Clases monótonas de Halmos) *Si $\mathscr{F}$ una álgebra, entonces $\sigma(\mathscr{F}) = m(\mathscr{F})$.*

Demostración. Por el lema 2.2 tenemos que $\sigma(\mathscr{F})$ es una clase monótona y además $\mathscr{F} \subset \sigma(\mathscr{F})$, entonces $m(\mathscr{F}) \subset \sigma(\mathscr{F})$. Para mostrar la otra contención basta ver que $m(\mathscr{F})$ es una álgebra, esto por el lema 2.4. Tomemos un $E \in m(\mathscr{F})$, arbitrario fijo, y definamos la colección

$$\mathscr{M}_E = \{F \in m(\mathscr{F}) : E\backslash F, E \cup F, F\backslash E \text{ están en } m(\mathscr{F})\}.$$

Nótese que $\mathscr{M}_E$ es una clase monótona y que si $F \in m(\mathscr{F})$, entonces

$$F \in \mathscr{M}_E \text{ si y sólo si } E \in \mathscr{M}_F. \tag{2.8}$$

Veamos que $\mathscr{M}_E = m(\mathscr{F})$. Para esto basta mostrar que $\mathscr{F} \subset \mathscr{M}_E$. Sea pues $F \in \mathscr{F}$, por ser $\mathscr{F}$ una álgebra $\mathscr{F} \subset \mathscr{M}_F$, por lo tanto $\mathscr{M}_F = m(\mathscr{F})$. Luego $E \in m(\mathscr{F}) = \mathscr{M}_F$, implica $F \in \mathscr{M}_E$, por (2.8).

Sean $E, F \in m(\mathscr{F})$, entonces $F \in m(\mathscr{F}) = \mathscr{M}_E$, por lo tanto $E\backslash F, E \cup F, F\backslash E \in m(\mathscr{F})$, es decir, $m(\mathscr{F})$ es cerrada bajo intersecciones finitas y complementos relativos (además $X \in m(\mathscr{F})$). ■

Problemas

Problema 38 *Sea $\mathscr{C}$ una colección de subconjuntos de X. Demostrar que las inclusiones, $\mathscr{C} \subset m(\mathscr{C}) \subset \mathscr{P}(X)$ pueden ser propias.*

Problema 39 *Sea $(\mathscr{F}_n)$ una sucesión creciente de álgebras de X. Demostrar que $\cup_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_n$ es una álgebra (comparar esto con el ejercicio 29).*

Problema 40 *Dar un ejemplo de una álgebra numerable (comparar esto con el ejercicio 33).*

2.3 π-Sistemas y d-sistemas

Definición 2.6 *Una colección $\mathscr{C}$ de subconjuntos de X se llama π-sistema si para cualesquiera $A, B \in \mathscr{C}$ se tiene que $A \cap B \in \mathscr{C}$.*

Ejemplo 2.8 *La colección $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ es un π-sistema.*

Otra clase importante de colecciones es:

Definición 2.7 *Una colección $\mathscr{L}$ de subconjuntos de X se llama d-sistema si:*
(i) $X \in \mathscr{L}$.
(ii) *Si $A \in \mathscr{L}$, entonces $A^c \in \mathscr{L}$.*
(iii) *Si (A_n) es una sucesión ajena en $\mathscr{L}$, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{L}$.*

La intersecccción arbitraria de d-sistemas es un d-sistema.

Proposición 2.1 *$\mathscr{L} \subset \mathscr{P}(X)$ es un d-sistema si y sólo si*
(i) $X \in \mathscr{L}$.
(ii) *Si $A, B \in \mathscr{L}$ y $A \subset B$, entonces $B \backslash A \in \mathscr{L}$.*
(iii) *Si (A_n) es una sucesión en $\mathscr{L}$ y $A_n \uparrow$, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{L}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathscr{L}$ es un d-sistema. Sean $A, B \in \mathscr{L}$ y $A \subset B$, entonces $B^c \cap A = \emptyset$. Lo que implica que, $B \backslash A = (B^c \cup A)^c \in \mathscr{L}$. Ahora, sea (A_n) una sucesión en $\mathscr{L}$ tal que $A_n \uparrow$. La sucesión (B_n) definida por $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$, $n > 1$, está en $\mathscr{L}$ y es ajena, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{L}$.

Recíprocamente, $\mathscr{L}$ es cerrada bajo complementos. Sean $A, B \in \mathscr{L}$ ajenos, entonces $B \subset A^c$, así $A \cup B = (A^c \backslash B)^c \in \mathscr{L}$, de lo cual se sigue que $\mathscr{L}$ es cerrada bajo uniones finitas ajenas. Por otra parte, sea (A_n) una sucesión ajena en $\mathscr{L}$, entonces la sucesión (B_n) definida por $B_n = \cup_{k=1}^{n} A_k$, $n \geq 1$, está en $\mathscr{L}$ y es creciente, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{L}$. ■

Una σ-álgebra siempre es un d-sistema, sin embargo el recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, sea el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ y $\mathscr{L} = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$. La colección $\mathscr{L}$ es un d-sistema que no es un π-sistema, pues $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\} \notin \mathscr{L}$. Por lo tanto $\mathscr{L}$ tampoco es una σ-álgebra. Veremos a continuación que si un d-sistema es también un π-sistema entonces éste sí es una σ-álgebra.

Lema 2.5 *Si $\mathscr{L}$ es un π-sistema y un d-sistema, entonces $\mathscr{L}$ es una σ-álgebra.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathscr{L}$, entonces por ser $\mathscr{L}$ un π-sistema $A \cap B \in \mathscr{L}$. Además, por la proposición 2.1, $A \cup B = (A \backslash (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash (A \cap B)) \in \mathscr{L}$. Por lo tanto, $\mathscr{L}$ es una álgebra. Sea (A_n) una sucesión en $\mathscr{L}$ tal que $A_n \downarrow$. Entonces $A_n^c \uparrow$ y de nuevo por la proposición 2.1, $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = (\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c \in \mathscr{L}$. Así, $\mathscr{L}$ es una clase monótona. El resultado se sigue del lema 2.4. ■

Corolario 2.1 *Si $\mathscr{F}$ es una álgebra cerrada bajo uniones numerables crecientes, entonces $\mathscr{F}$ es una σ-álgebra.*

Demostración. Esto se sigue de la proposición 2.1 y del lema 2.5. ■

Sea $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$. Entonces $d(\mathscr{C})$ denotará al *d-sistema generado por la colección* $\mathscr{C}$, es decir, $d(\mathscr{C})$ es la intersección de todos los d-sistemas que contienen a $\mathscr{C}$.

Otro hecho cuya utilidad se pondrá de manifiesto en los siguientes capítulos es el resultado que a continuación se demuestra.

Teorema 2.4 (Dynkin) *Sea $\mathscr{C}$ un π-sistema. Entonces $\sigma(\mathscr{C}) = d(\mathscr{C})$.*

Demostración. Puesto que $\mathscr{C} \subset \sigma(\mathscr{C})$ y $\sigma(\mathscr{C})$ es un d-sistema, $d(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C})$. Para mostrar la otra contención basta, debido al lema 2.5, ver que $d(\mathscr{C})$ es un π-sistema. Para cada $A \in d(\mathscr{C})$ sea

$$\mathscr{L}_A = \{B \in d(\mathscr{C}) : A \cap B \in d(\mathscr{C})\}.$$

No es difícil mostrar que la colección $\mathscr{L}_A$ es un d-sistema. Veamos, por ejemplo, que se cumple la condición (ii) de la definición 2.7. Sea $B \in \mathscr{L}_A$, entonces $A^c, B^c, A \cap B \in d(\mathscr{C})$. Puesto que $A^c \cap (A \cap B) = \emptyset$, resulta $A \cap B^c = (A^c \cup (A \cap B))^c \in d(\mathscr{C})$. Por lo tanto, $B^c \in \mathscr{L}_A$.

Si $B \in d(\mathscr{C})$, entonces

$$A \in \mathscr{L}_B \text{ si y sólo si } B \in \mathscr{L}_A. \tag{2.9}$$

Veamos ahora que

$$\text{si } A \in d(\mathscr{C}), \text{ entonces } \mathscr{L}_A = d(\mathscr{C}). \tag{2.10}$$

Para verificar (2.10) es suficiente con mostrar que $\mathscr{C} \subset \mathscr{L}_A$. Sea $B \in \mathscr{C}$, entonces por ser $\mathscr{C}$ un π-sistema $\mathscr{C} \subset \mathscr{L}_B$, por lo tanto $\mathscr{L}_B = d(\mathscr{C})$. Pero $A \in d(\mathscr{C}) = \mathscr{L}_B$, implica $B \in \mathscr{L}_A$, por (2.9).

Ahora, si $A, B \in d(\mathscr{C})$, por (2.10) resulta $A \in d(\mathscr{C}) = \mathscr{L}_B$, así $A \cap B \in d(\mathscr{C})$. ■

Problemas

Problema 41 *Sea $\mathscr{C}$ un π-sistema y $\mathscr{M}$ una clase monótona. Demostrar que $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}$ no implica $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{M}$.*

Problema 42 *Sea $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Un subintervalo p-ádico de $[0, 1)$ es un intervalo de la forma $[k/p^m, (k+1)/p^m)$ donde $k \in \{0, 1, \ldots, p^m - 1\}$ y $m \in \mathbb{N}$. Encontrar el d-sistema generado por todos los intervalos p-ádicos.*

Problema 43 *Sea $\mathscr{L}$ la colección de subconjuntos A de $\mathbb{N}$ para los cuales el límite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{card(A \cap \{1, ..., n\})}{n}$$

existe. ¿Cuáles propiedades de d-sistema o σ-álgebra cumple la colección $\mathscr{L}$?.

Chapter 3

Medidas

Una vez que se ha establecido una colección $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X nos proponemos "medir" el tamaño de sus elementos. Es decir, a cada $A \in \mathscr{A}$ le asociamos un número real no negativo $\mu(A)$, llamado medida de A. Una de las primeras medidas fue la de contar; en este caso, $\mu(A)$ es el número de elementos del conjunto A. Otras medidas, de uso frecuente, son las que aparecieron en la geometría, como lo son, la longitud, el área y el volumen. En este capítulo se introducen los axiomas que debe cumplir una función μ para llamarse medida y se estudiarán las principales propiedades de éstas.

3.1 Propiedades básicas de las medidas

Definición 3.1 *Sea $\mathscr{A}$ una σ-álgebra de X. Una función $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ se llama medida si:*
(i) $\mu(\varnothing) = 0$.
(ii) *Si (A_n) es una sucesión ajena en $\mathscr{A}$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{3.1}$$

En este caso $\mu(A)$ se llama medida del conjunto A y $(X, \mathscr{A}, \mu)$ se llama espacio de medida.

La condición (3.1) recibe el nombre de σ-aditividad (o contablemente aditiva).

Ejemplo 3.1 *Sea $\mathscr{A}$ una σ-álgebra en X. La función $\mu_\infty : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definida por*

$$\mu_\infty(E) = \begin{cases} 0, & E = \varnothing, \\ +\infty, & E \neq \varnothing. \end{cases}$$

es una medida en $\mathscr{A}$.

Si μ es una función σ-aditiva que toma por lo menos un valor en $\mathbb{R}_+$, entonces la condición (i) en la definición de medida es cierta. En efecto, sea $E \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(E) < +\infty$, entonces

$$\mu(E) = \mu(E \cup \varnothing \cup \cdots) = \mu(E) + \mu(\varnothing) + \cdots,$$

por lo tanto, $\mu(\varnothing) = 0$. Es decir, excepto por las medidas del ejemplo 3.1, todas las funciones no negativas σ-aditivas cumplen la condición (i) de la definición 3.1.

Ejemplo 3.2 *Sea $\mathscr{A}$ una σ-álgebra en X. La función $\mu_0 : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definida por $\mu_0(E) = 0$, para cada $E \in \mathscr{A}$, es una medida en $\mathscr{A}$.*

Ejemplo 3.3 *Sea X un conjunto no vacío y $\mathscr{A}$ una σ-álgebra en X. Para $x_0 \in X$ fijo se define $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ por*

$$\mu(E) = 1_E(x_0) = \begin{cases} 0, & x_0 \notin E, \\ 1, & x_0 \in E, \end{cases}$$

Entonces μ es una medida en $\mathscr{A}$ y se llama medida unidad (o delta de Dirac) concentrada en x_0.

Ejemplo 3.4 *Sea X un conjunto y $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$. Definimos μ en $\mathscr{A}$ como*

$$\mu(E) = \begin{cases} card(E), & E \text{ es finito}, \\ +\infty, & E \text{ es infinito}. \end{cases}$$

Veamos que se cumple la segunda condición de la definición de medida, la primera condición es inmediata. Sea (A_n) una sucesión ajena en $\mathscr{A}$. Hay dos posibilidades. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. Por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_n) < 1$, para toda $n \geq n_0$. Así, $A_n = \varnothing$, para toda $n \geq n_0$. Además, $\mu(A_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Es decir, A_n es finito para toda $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\cup_{n=1}^{n_0-1} A_n\right) = \sum_{n=1}^{n_0-1} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = +\infty$, entonces $+\infty = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\cup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \mu\left(\cup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$. La medida μ se llama medida de contar.

Ejemplo 3.5 *En $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ se mostrará (ver la sección 4.4) que existe una medida λ en $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ tal que $\lambda((a,b]) = b - a$. Esta medida se llama medida de Borel.*

Ejemplo 3.6 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente. Existe (ver la sección 4.4) una medida λ_f en $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ tal que $\lambda_f((a,b]) = f(b+) - f(a+)$. La función λ_f se llama medida de Borel-Stieltjes generada por f.*

Un ejemplo de una función que no es una medida es:

Ejemplo 3.7 *Sea X un conjunto con por lo menos dos elementos y $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$. Definamos $\mu^* : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ como*

$$\mu^*(E) = \begin{cases} 0, & E = \varnothing, \\ 1, & E \neq \varnothing. \end{cases}$$

Si μ^* fuese una medida, entonces para A_1 y A_2 subconjuntos ajenos de X, no vacíos, tendríamos que

$$1 = \mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) = 2.$$

Compare este resultado con la medida μ_∞.

Lema 3.1 *Sea μ una medida en $(X, \mathscr{A})$. Si $E, F \in \mathscr{A}$ y $E \subset F$, entonces $\mu(E) \leq \mu(F)$. Si $\mu(E) < +\infty$, entonces $\mu(F \backslash E) = \mu(F) - \mu(E)$.*

Demostración. Puesto que $E \subset F$, entonces F es unión ajena de E y $F \backslash E$, así

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \backslash E). \tag{3.2}$$

Por lo tanto, $\mu(F) \geq \mu(E)$, ya que $\mu(F \backslash E) \geq 0$. Si $\mu(E) < +\infty$, entonces podemos despejar $\mu(F \backslash E)$ en (3.2). ■

Proposición 3.1 *Sea (E_n) una sucesión en $\mathscr{P}(X)$. Además, sean las sucesiones (B_n) y (A_n) definidas por, $B_n = \cup_{i=1}^n E_i$, $n \in \mathbb{N}$ y $A_1 = E_1$, $A_n = E_n \backslash \cup_{i=1}^{n-1} E_i$, $n \geq 2$. Entonces (B_n) es creciente, (A_n) es ajena y*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Demostración. Veamos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Basta verificar la última contención. Sea $x \in \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces existe $n_x \in \mathbb{N}$, $x \in E_{n_x}$. Sea $I_x = \{n \in \mathbb{N} : x \in E_n\}$, así $n_x \in I_x$ y sea $n_0 = \min I_x$, luego $x \notin E_n$, $1 \leq n \leq n_0 - 1$, es decir $x \in A_{n_0} \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Veamos que (A_n) es ajena. Sean $m < n$, luego $E_m \subset \cup_{j=1}^{n-1} E_j$, así $E_n \backslash E_m \supset E_n \backslash \cup_{j=1}^{n-1} E_j = A_n$, esto implica que $A_m \cap A_n \subset E_m \cap A_n \subset E_m \cap (E_n \backslash E_m) = \varnothing$. ■

Otras propiedades de las medidas son:

Lema 3.2 *Sea μ una medida en $(X, \mathscr{A})$ y (E_n) una sucesión en $\mathscr{A}$.*
(i) Si (E_n) es creciente, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n). \tag{3.3}$$

(ii) *Si* (E_n) *es decreciente y* $\mu(E_{n_0}) < +\infty$*, para algún* $n_0 \in \mathbb{N}$*, entonces*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n). \tag{3.4}$$

(iii) *En general tenemos la* σ*-subaditividad, es decir,*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \tag{3.5}$$

Demostración. (i) : Construyamos una sucesión ajena (A_n) como sigue, $A_1 = E_1$ y $A_n = E_n \backslash E_{n-1}, n \geq 2$, entonces

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).
\end{aligned}$$

(ii) : En este caso consideraremos la sucesión creciente $(E_{n_0} \backslash E_n)_{n \geq n_0}$. Por la parte (i) y el lema 3.1 resulta que

$$\begin{aligned}
\mu(E_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \mu\left(E_{n_0} \backslash \bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} (E_{n_0} \backslash E_n)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(E_{n_0} \backslash E_n) = \mu(E_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).
\end{aligned}$$

Debido a que $\mu(E_{n_0}) < +\infty$ se concluye la igualdad en (3.4).

(iii) : Sea (A_n) la sucesión ajena definida en la proposición 3.1. Puesto que $A_n \subset E_n$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).
\end{aligned}$$

Lo que demuestra la desigualdad (3.5). ∎

En $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ consideremos la sucesión decreciente $\{(n, +\infty) : n \in \mathbb{N}\}$, entonces

$$\lambda((n, +\infty)) = \lambda(\cup_{k=n}^{\infty} (n, n+k]) = \lim_{k\to\infty} \lambda((n, n+k]) = \lim_{k\to\infty} k = +\infty.$$

Por lo tanto, $\lim_{k\to\infty} \lambda((n,+\infty)) = +\infty \neq 0 = \lambda(\emptyset) = \lambda(\cap_{n=1}^{\infty} (n,+\infty))$. Esto muestra la necesidad de la hipótesis extra en la parte (ii) del lema precedente. Sin embargo, tenemos en general que si $(X,\mathscr{A},\mu)$ es un espacio de medida y (E_n) una sucesión en $\mathscr{A}$, entonces

$$\mu\left(\cap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n). \tag{3.6}$$

Definición 3.2 *Una medida μ en $(X,\mathscr{A})$ se llama σ-finita si existe una sucesión (A_n) en $\mathscr{A}$ tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, con $\mu(A_n) < +\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Proposición 3.2 *Sea μ una medida σ-finita en $(X,\mathscr{A})$. Entonces existe una sucesión creciente (ajena, respectivamente) (B_n) en $\mathscr{A}$ tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, con $\mu(B_n) < +\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por hipótesis existe una sucesión (E_n) en $\mathscr{A}$ tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, con $\mu(E_n) < +\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Las sucesiones (B_n) y (A_n) definidas en la proposición 3.1 están en $\mathscr{A}$ y cumplen lo deseado. ■

Nótese que μ_∞ no es σ-finita si $X \neq \emptyset$. La medidad de contar es σ-finita si y sólo si X es contable. La medida de Borel-Stieltjes es σ-finita.

Problemas

Problema 44 *Sea X un conjunto no contable. Demostrar que $\mu : \mathscr{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$,*

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & E \text{ es contable,} \\ +\infty, & E \text{ es no contable,} \end{cases}$$

es una medida.

Problema 45 *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida y $A, B, C \in \mathscr{A}$. Demostrar que*

$$\mu(A\Delta C) \leq \mu(A\Delta B) + \mu(B\Delta C).$$

Problema 46 *Sea (μ_n) una sucesión de medidas en $(X,\mathscr{A})$ tal que $\mu_n \leq \mu_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$ es una medida en $(X,\mathscr{A})$.*

Problema 47 *Sea λ la medida de Borel en $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Demuestre que la medida de cualquier conjunto numerable es cero.*

Problema 48 *Demostrar que λ_f es una medida σ-finita en $\mathscr{F}(\mathbb{R})$.*

Problema 49 *Sea γ una medida en $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, tal que es invariante bajo traslaciones (es decir, $\gamma(A + a) = \gamma(A)$, ver el ejercicio 27) y $\gamma(\mathbb{R}) < +\infty$. Demostrar que $\gamma = 0$.*

Problema 50 *Demostrar que* $\mathscr{P}(\mathbb{R})\backslash\mathscr{B}(\mathbb{R}) \neq \varnothing$.

Problema 51 *Sean* μ_1 *y* μ_2 *dos medidas en una* σ*-álgebra* $\mathscr{A}$*, tal que* $\mu_1 \geq \mu_2$*. Demostrar que existe una medida* μ_3 *en* $\mathscr{A}$ *que cumple,* $\mu_1 = \mu_2 + \mu_3$.

Problema 52 *Sea* μ *una medida en* $(X, \mathscr{A})$*. Un conjunto* $A \in \mathscr{A}$ *es un átomo de* μ *si* $0 < \mu(A)$ *y si* $B \subset A$, $B \in \mathscr{A}$*, entonces* $\mu(B) = 0$ *o* $\mu(A\backslash B) = 0$*. Demostrar que si* μ *es* σ*-finita, entonces* $\mathscr{A}$ *tiene a lo más una cantidad numerable de átomos ajenos.*

Problema 53 *Sea* μ *una medida en* $(X, \mathscr{A})$*. Se dice que* μ *es no atómica si* $\mathscr{A}$ *no tiene átomos. Sea* $A \in \mathscr{A}$*, con* $0 < \mu(A) < +\infty$*. Demostrar que si* μ *es no atómica, entonces para cada* u*,* $0 < u < \mu(A)$*, existe* $B \subset A$, $B \in \mathscr{A}$*, tal que* $\mu(B) = u$.

Problema 54 *Demostrar que la medida de Borel* λ *en* $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ *es no atómica.*

3.2 Medidas finitas y medidas en álgebras

Definición 3.3 *Una medida* μ *en* $(X, \mathscr{A})$ *se llama medida finita si* $\mu(X) < +\infty$*. En particular, si* $\mu(X) = 1$ *se llama medida de probabilidad.*

La medida del ejemplo 3.2 es una medida finita y la medida introducida en el ejemplo 3.3 es medida de probabilidad.

Definición 3.4 *Sea* (A_n) *una sucesión de subconjuntos de* X*. Definimos*

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \quad y \quad \limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Lema 3.3 *Sea* $(A_n) \subset \mathscr{P}(X)$*. Entonces*

$$\begin{aligned} (i)\ \liminf A_n &= \{x : x \text{ está en todos los } A_n \text{ excepto un número finito}\}, \\ (ii)\ \limsup A_n &= \{x : x \text{ está en una infinidad de } A_n\}. \end{aligned}$$

Demostración. (i) : Suponga que $x \in A_n$ para todos los índices n excepto un número finito y sea $k = \max\{n : x \notin A_n\}$ $(\max\varnothing = 0)$. Entonces $x \in \cap_{n=k+1}^{\infty} A_n \subset \liminf A_n$. Recíprocamente, si $x \in \liminf A_n$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \cap_{n=k}^{\infty} A_n$. Por lo tanto, x está en todos los A_n excepto en un número finito.
(ii) : De las leyes de De Morgan resulta

$$\begin{aligned} \limsup A_n &= \left(\liminf A_n^c\right)^c \\ &= (\{x : x \text{ no está en todos los } A_n \text{ excepto un número finito}\})^c \\ &= (\{x : x \text{ está en un número finito de } A_n\})^c \\ &= \{x : x \text{ está en una infinidad de } A_n\}. \end{aligned}$$

Como se quería probar. ■

Una relación entre estos conceptos y el de medida es el siguiente:

Lema 3.4 (Borel-Cantelli) *Sea μ una medida en el espacio medible $(X, \mathscr{A})$. Si (A_n) es una sucesión en $\mathscr{A}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$, entonces $\mu(\limsup A_n) = 0$.*

Demostración. Puesto que $\left(\cup_{n=k}^{\infty} A_n\right)_k$ es decreciente de (3.6) se concluye que

$$\mu(\limsup A_n) \leq \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mu(A_n).$$

Basta notar que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$ implica $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mu(A_n) = 0$. ■

A continuación se introduce el concepto de medida en una álgebra.

Definición 3.5 *Sea $\mathscr{A}$ una álgebra de X. Una función $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ se llama medida si:*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$.
(ii) *Si (A_n) es una sucesión ajena en $\mathscr{A}$ tal que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{3.7}$$

Las medidas definidas en álgebras cumplen las propiedades enunciadas en los lemas 3.1 y 3.2. El concepto de medida σ-finita en una álgebra se define como en el caso de medidas en σ-álgebras.

Definición 3.6 *Sea $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ una álgebra y $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. La función μ se llama:*
(i) Finitamente aditiva si para toda sucesión ajena finita $(A_n)_{n=1}^{k}$ en $\mathscr{A}$,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n). \tag{3.8}$$

(ii) Continua en el vacío si para toda sucesión (A_n) en $\mathscr{A}$ tal que $A_n \downarrow \emptyset$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0. \tag{3.9}$$

Nótese que si existe $A_0 \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(A_0) < +\infty$ y μ es finitamente aditiva, entonces $\mu(\emptyset) = 0$. Por otra parte, si μ es continua en el vacío también $\mu(\emptyset) = 0$ $(\emptyset \downarrow \emptyset)$. Para mostrar que una función no negativa de conjuntos μ es una medida, en ocasiones es útil el siguiente resultado.

Teorema 3.1 *Sea $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ una álgebra y $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}_+$. La función μ es una medida (finita) si y sólo si μ es finitamente aditiva y continua en el vacío.*

Demostración. Basta mostrar la suficiencia. Sea (A_n) una sucesión en $\mathscr{A}$ ajena. Usando (3.8) resulta

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)+\mu\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty}A_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)+\mu\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty}A_k\right).\end{aligned}$$

Por ser (A_n) una sucesión ajena obtenemos, lema 3.3,

$$\bigcup_{k=n+1}^{\infty}A_k \downarrow \limsup A_n = \{x : x \text{ está en una infinidad de } A_n\} = \varnothing.$$

Entonces (3.9) implica que $\lim_{n\to\infty}\mu(\cup_{k=n+1}^{\infty}A_k)=0$. Así,

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)+\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty}A_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k).\end{aligned}$$

Por lo tanto, μ es σ-aditiva, en consecuencia es una medida finita ($\mu(X)\in\mathbb{R}_+$). ■

Problemas

Problema 55 *Sea μ una medida finita en $(X,\mathscr{A})$ y $\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ una función que cumple:*
(i) $\nu(X)=\mu(X)$,
(ii) $\nu(A)\le\mu(A)$, para cada $A\in\mathscr{A}$,
(iii) $\nu(A\cup B)\le\nu(A)+\nu(B)$, para cada $A,B\in\mathscr{A}$.
¿Existe otra función distinta de μ que cumpla (i)-(iii)?.

Problema 56 *Sea μ una medida finita en $(X,\mathscr{A})$. Demostrar que si $A,B\in\mathscr{A}$, entonces*

$$|\mu(X)\mu(A\cap B)-\mu(A)\mu(B)|\le\frac{(\mu(X))^2}{4}.$$

(Hint: $\mu(A\cap B)\le\mu(A)\wedge\mu(B)$.)

Problema 57 *Sea μ una medida σ-finita en la σ-álgebra $\mathscr{A}$. Encontrar una medida finita γ en $\mathscr{A}$, tal que $\gamma(E)=0$ si y sólo si $\mu(E)=0$.*

Problema 58 *Si $\limsup A_n = \liminf A_n$ la sucesión (A_n) se dice convergente. Demostrar que toda sucesión monótona (A_n) es convergente. Dar un ejemplo de una sucesión (A_n) que no sea monótona pero que sea convergente.*

Problema 59 *Sea (A_n) una sucesión de subconjuntos de X. Demostrar que:*

$$\begin{aligned}
1_{\limsup A_n} &= \limsup 1_{A_n}, \\
1_{\liminf A_n} &= \liminf 1_{A_n}, \\
\limsup A_n \setminus \liminf A_n &= \limsup (A_n \cap A_{n+1}^c) \\
&= \limsup (A_n^c \cap A_{n+1}).
\end{aligned}$$

Problema 60 *Sea μ una medida en $(X,\mathscr{A})$ y (A_n) una sucesión en $\mathscr{A}$. Demostrar que*

$$\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n),$$

y si $\mu(X) < +\infty$, entonces

$$\mu(\limsup A_n) \geq \limsup \mu(A_n).$$

Problema 61 *Sea μ una medida finita en $(X,\mathscr{A})$ y (A_n) una sucesión en $\mathscr{A}$. Si existe $\delta > 0$ tal que $\mu(A_n) \geq \delta$, para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un punto en X que pertenece a una infinidad de A_n.*

3.3 Completación de un espacio de medida

Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida. Se dice que una afirmación, sobre los puntos de X, se cumple μ-casi donde quiera, abreviado como μ-cdq, (o μ-para casi toda x, abreviado como μ-pct x) si existe un conjunto $N \in \mathscr{A}$, con $\mu(N) = 0$, tal que la afirmación es cierta en N^c. Un concepto relacionado con este tópico es el siguiente:

Definición 3.7 *Un espacio de medida $(X,\mathscr{A},\mu)$ se llama espacio de medida completo si cuando $B \in \mathscr{A}$, con $\mu(B) = 0$ y $A \subset B$, entonces $A \in \mathscr{A}$.*

Obsérvese que hay una dependencia entre $\mathscr{A}$ y μ en la definición de completez.

En análisis es común trabajar en espacios de medida completos, pues éstos tienen varias ventajas. Por ejemplo, si $f = g$ μ-cdq, y f es medible (ver definición 5.1), entonces g es medible, lema 5.11.

Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida. Sea $\mathscr{N} = \{N \subset X : \exists\, B \in \mathscr{A}, \mu(B) = 0$ y $N \subset B\}$. Consideremos la colección de subconjuntos de X:

$$\widetilde{\mathscr{A}} = \mathscr{A} \cup \mathscr{N} = \{A \cup N : A \in \mathscr{A}, N \in \mathscr{N}\}.$$

Definamos $\widetilde{\mu} : \widetilde{\mathscr{A}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, como $\widetilde{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$. En este caso, es necesario mostrar que $\widetilde{\mu}$ está bien definida. Sean $A_i \in \mathscr{A}$ y $N_i \in \mathscr{N}$, $i = 1,2$, tal que

$$A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2.$$

Existen $B_i \in \mathscr{A}$, tal que $N_i \subset B_i$ y $\mu(B_i) = 0$, $i = 1, 2$,

$$A_1 \subset A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \subset A_2 \cup B_2.$$

Así, $\mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup B_2) \leq \mu(A_2) + \mu(B_2) = \mu(A_2)$. De igual forma se ve que $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$. Por lo tanto, $\widetilde{\mu}(A_1 \cup N_1) = \widetilde{\mu}(A_2 \cup N_2)$.

Teorema 3.2 $(X, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mu})$ *es un espacio de medida completo.*

Demostración. Primeramente veamos que $\widetilde{\mathscr{A}}$ es una σ-álgebra. Puesto que $\mathscr{A} \subset \widetilde{\mathscr{A}}$, entonces $X \in \widetilde{\mathscr{A}}$. Sea $A \cup N \in \widetilde{\mathscr{A}}$. Luego, existe $B \in \mathscr{A}$, tal que $N \subset B$ y $\mu(B) = 0$. Así $(A \cup N)^c = A^c \cap N^c = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap N^c \cap B)$ y $A^c \cap N^c \cap B \subset B$. Por lo tanto $(A \cup N)^c \in \widetilde{\mathscr{A}}$. Sea $(A_n \cup N_n)$ una sucesión en $\widetilde{\mathscr{A}}$, entonces existen $B_n \in \mathscr{A}$, tal que $N_n \subset B_n$ y $\mu(B_n) = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup N_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

y además

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = 0.$$

De esta forma $\cup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup N_n) \in \widetilde{\mathscr{A}}$.

Veamos que $\widetilde{\mu}$ es una medida. Sea $(A_n \cup N_n)$ una sucesión ajena en $\widetilde{\mathscr{A}}$ y sea (B_n) una sucesión en $\mathscr{A}$, tal que $N_n \subset B_n$ y $\mu(B_n) = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Puesto que (A_n) es también una sucesión ajena, resulta

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup N_n)\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(A_n \cup N_n), \end{aligned}$$

es decir, $\widetilde{\mu}$ es σ-aditiva. Por otra parte, $\widetilde{\mu}(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$. Así $(X, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\mu})$ es un espacio de medida. Veamos que es completo. Sea $A \cup N \in \widetilde{\mathscr{A}}$, con $\widetilde{\mu}(A \cup N) = 0$ y $D \subset A \cup N$, entonces existe $B \in \mathscr{A}$ tal que $N \subset B$ y $\mu(B) = 0$. Ya que $D = \varnothing \cup D$, $D \subset A \cup B$ y $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0$, entonces $D \in \widetilde{\mathscr{A}}$. ∎

La extensión $\widetilde{\mu}$ de μ es única en $(X, \widetilde{\mathscr{A}})$. En efecto, sea ν otra medida en $(X, \widetilde{\mathscr{A}})$ que coincide con μ en $(X, \mathscr{A})$, entonces si $A \cup N \in \widetilde{\mathscr{A}}$ existe $B \in \mathscr{A}$, $N \subset B$ y $\mu(B) = 0$. Así

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}(A \cup N) = \mu(A) = \nu(A) &\leq \nu(A \cup N) \\ &\leq \nu(A \cup B) \leq \nu(A) + \nu(B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) = \mu(A) = \widetilde{\mu}(A \cup N). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\widetilde{\mu}(A \cup N) = \nu(A \cup N)$.

Problemas

Problema 62 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida.*
(a) Sea $\mathscr{A}_1 = \{B \subset X : \exists\, A, C \in \mathscr{A},\ A \triangle B \subset C$ y $\mu(C) = 0\}$ y definamos $\mu_1 : \mathscr{A}_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ como $\mu_1(B) = \mu(A)$.
(b) Sea $\mathscr{A}_2 = \{B \subset X : \exists\, A, C \in \mathscr{A}, A \subset B \subset C$ y $\mu(C \backslash A) = 0\}$ y definamos $\mu_2 : \mathscr{A}_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$, como $\mu_2(B) = \mu(A)$.
Demostrar que $\widetilde{\mathscr{A}} = \mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$ y $\widetilde{\mu} = \mu_1 = \mu_2$.

Problema 63 *Sea (X, d) un espacio métrico y supóngase que μ es una medida finita en $(X, \mathscr{B}(X))$. Demostrar que la completación $\widetilde{\mathscr{B}(X)}$ con respecto a μ coincide con la clase de todos los $B \subset X$, tal que para cada $\varepsilon > 0$ existen conjuntos abiertos F^c y G, tal que $F \subset B \subset G$ y $\mu(G \backslash F) < \varepsilon$.*

3.4 Unicidad de medidas σ-finitas en π-sistemas

En esta sección, y a lo largo de las notas, se verán algunas aplicaciones del teorema 2.4. Se comenzará por demostrar que las medidas σ-finitas están determinadas en los π-sistemas.

Lema 3.5 *Sean μ y ν dos medidas finitas en $(X, \sigma(\mathscr{C}))$, donde $\mathscr{C}$ es un π-sistema. Si $X \in \mathscr{C}$ y μ coincide con ν en $\mathscr{C}$, entonces $\mu = \nu$.*

Demostración. Usando la proposición 2.1 se ve que la colección

$$\mathscr{L} = \{A \in \sigma(\mathscr{C}) : \mu(A) = \nu(A)\}, \tag{3.10}$$

es un d-sistema, y además $\mathscr{C} \subset \mathscr{L}$. Entonces, por el teorema 2.4 tenemos que $\sigma(\mathscr{C}) = d(\mathscr{C}) \subset \mathscr{L}$, así $\mu = \nu$. ■

Teorema 3.3 *Sean μ y ν dos medidas en $(X, \sigma(\mathscr{G}))$, donde $\mathscr{G}$ es un π-sistema cerrado bajo uniones finitas. Si μ y ν son σ-finitas en $\mathscr{G}$ (es decir, los conjuntos A_n en la definición 3.2 están en $\mathscr{G}$), $X \in \mathscr{G}$ y μ coincide con ν en $\mathscr{G}$, entonces $\mu = \nu$.*

Demostración. Por ser μ y ν medidas σ-finitas en $\mathscr{G}$ y $\mathscr{G}$ cerrada bajo uniones finitas no es difícil mostrar que existe una sucesión creciente (C_n) en $\mathscr{G}$, tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$, con $\mu(C_n) < +\infty$, $\nu(C_n) < +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\sigma_{C_n}(C_n \cap \mathscr{G})$ la σ-álgebra en C_n generada por el π sistema $C_n \cap \mathscr{G}$. Se definen las medidas μ_n y ν_n en $(C_n, \sigma_{C_n}(C_n \cap \mathscr{G}))$ como $\mu_n(A) = \mu(A)$ y $\nu_n(A) = \nu(A)$. Así $\mu_n(C_n) = \nu_n(C_n) < +\infty$, pues $C_n \in \mathscr{G}$ y coinciden en $C_n \cap \mathscr{G}$. El lema 3.5 implica que $\mu = \nu$ en $(C_n, \sigma_{C_n}(C_n \cap \mathscr{G}))$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, si $A \in \sigma(\mathscr{G})$, entonces por el problema 28 resulta $C_n \cap A \in C_n \cap \sigma(\mathscr{G}) = \sigma_{C_n}(C_n \cap \mathscr{G})$, luego

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n \cap A)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty} \mu_n(C_n \cap A) \\ &= \lim_{n\to\infty} \nu_n(C_n \cap A) = \nu(A), \end{aligned}$$

es decir, $\mu = \nu$. ■

Problemas

Problema 64 *Dar un espacio medible $(X, \mathscr{A})$ y medidas finitas μ y ν tal que $\mu(X) = \nu(X)$, pero tal que*

$$\{A \in \mathscr{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

no sea una σ-álgebra.

Problema 65 *Mostrar que el teorema 3.3 es falso si μ y ν no son σ-finitas.*

Problema 66 *Sea γ una medida definida en $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, tal que $\gamma((0,1]) = 1$ y $\gamma(A+b) = \gamma(A)$ para cualesquiera $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\gamma = \lambda$. (Véase el ejercicio 27.)*

3.5 Medidas en espacios métricos

En esta sección por (X, d) denotaremos un espacio métrico.

Definición 3.8 *Una medida μ en $(X, \mathscr{B}(X))$ se dirá regular exteriormente si para cada $A \in \mathscr{B}(X)$ se tiene*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : A \subset G,\ G \text{ conjunto abierto}\}. \tag{3.11}$$

La medida μ se llama regular interiormente si

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ conjunto compacto}\}. \tag{3.12}$$

Si μ es regular exteriormente e interiormente diremos que μ es regular.

Cuando las medidas son finitas podemos dar algunos resultados generales.

Teorema 3.4 *Sea μ una medida finita en $(X, \mathscr{B}(X))$. Entonces μ es regular exteriormente, más aún*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subset A,\ F \text{ conjunto cerrado}\}, \tag{3.13}$$

para cada $A \in \mathscr{B}(X)$.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \{A \in \mathscr{B}(X) : \sup\{\mu(F) : F \subset A,\ F \text{ conjunto cerrado}\} = \mu(A) = \\ &\quad \inf\{\mu(G) : A \subset G,\ G \text{ conjunto abierto}\}\}\,.\end{aligned}$$

Veamos que $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra. Debido a que X es abierto y cerrado tenemos que $X \in \mathscr{A}$. Ya que $\mu(X) < +\infty$, entonces $\mathscr{A}$ es cerrada bajo complementos. Ahora sea (A_n) una sucesión en $\mathscr{A}$. Entonces para $\varepsilon > 0$ tenemos, por (3.11) y (3.13), que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen abiertos G_n y cerrados F_n tal que $F_n \subset A_n \subset G_n$ y $\mu(G_n \backslash F_n) \leq \varepsilon 2^{-n-1}$. Sea el abierto $G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$. Como μ es finita,

$$\lim_{k\to\infty} \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \backslash \left(\bigcup_{m=1}^{k} F_m\right)\right) = 0.$$

Así existe k_0 tal que

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \backslash \bigcup_{m=1}^{k_0} F_m\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideremos el cerrado $F = \cup_{m=1}^{k_0} F_m$. Entonces $F \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n \subset G$ y

$$\begin{aligned}
\mu(G\backslash F) &= \mu\left(\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right) \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right)\backslash F\right) \\
&\leq \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right)\backslash F\right) + \mu\left(\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right)\backslash F\right) \\
&\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} (G_n\backslash F_m)\right)\right) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n\backslash F_n) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$, lo que implica que $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra. Si G es abierto, entonces $F_n = \{x \in X : d(x, G^c) \geq 1/n\}$ es cerrado y $F_n \uparrow G$, así $G \in \mathscr{A}$. En consecuencia $\mathscr{A} = \mathscr{B}(X)$. ∎

Teorema 3.5 (Ulam) *Sea X completo y separable (espacio Polaco). Si μ es una medida finita en $(X, \mathscr{B}(X))$, entonces μ es regular.*

Demostración. Por el teorema 3.4 basta mostrar que μ es regular interiormente. Sea (x_n) una sucesión densa en X y $\varepsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario fijo, entonces $X = \cup_{k=1}^{\infty} B(x_k, 1/n)$. Por lo tanto,

$$\mu(X) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} B\left(x_k, \frac{1}{n}\right)\right),$$

lo que implica que existe un entero $N(n) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{N(n)} B\left(x_k, \frac{1}{n}\right)\right)^c\right) \le \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Sea $K = \overline{\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{N(n)} B(x_k, 1/n)}$, entonces K es un espacio métrico completo ((3.14.5) de [13]). Además, de

$$K \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{N(m)} B\left(x_k, \frac{1}{m}\right)} \subset \bigcup_{k=1}^{N(m)} \overline{B\left(x_k, \frac{1}{m}\right)} \subset \bigcup_{k=1}^{N(m)} B\left(x_k, \frac{1}{m-1}\right), \quad \forall m \ge 2.$$

se sigue que K precompacto (para la definición de precompacto ver la página 58 de [13]) por lo tanto es compacto ((3.16.1) de [13]), y

$$K^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{N(n)} B\left(x_k, \frac{1}{n}\right)\right)^c$$

implica

$$\mu(K^c) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $A \in \mathscr{B}(X)$. Por (3.13) existe $F \subset A$ cerrado tal que $\mu(A) \le \mu(F) + \varepsilon/2$. Sea $F' = F \cap K$, entonces F' es compacto ((3.17.3) de [13]) y

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(A \backslash F) + \mu(F) \\
&= \mu(A \backslash F) + (\mu(F) - \mu(F')) + \mu(F') \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \mu(F \backslash F') + \mu(F') \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \mu(F \backslash (F \cap K)) + \mu(F') \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \mu(K^c) + \mu(F') = \varepsilon + \mu(F'),
\end{aligned}$$

de esta forma (3.12) se cumple. ■

Problemas

Problema 67 *Dar un ejemplo de una medida que no sea regular exteriormente.*

Problema 68 *Sea $A \subset X$ conjunto cerrado (abierto). Demostrar que existe una sucesión (f_n) de funciones continuas y acotadas tal que $f_n \downarrow 1_A$ ($f_n \uparrow 1_A$).*

Problema 69 *Sea (X, d) un espacio métrico y μ una medida en $(X, \mathscr{B}(X))$. La medida μ se llama localmente finita si para cada $x \in X$, existe un conjunto abierto U, tal que $x \in U$ y $\mu(U) < +\infty$. Demostrar que si μ es localmente finita y $K \subset X$ es compacto, entonces $\mu(K) < +\infty$.*

Problema 70 *Suponga que (X, d) es σ-compacto, es decir, existe una sucesión (K_n) de subconjuntos compactos de X tal que $K_n \uparrow X$. Demostrar que si μ es localmente finita en $(X, \mathscr{B}(X))$, entonces μ es regular interiormente.*

Problema 71 *Sean X un espacio métrico y $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}(X)$ cerrada bajo intersecciones finitas tal que todo conjunto abierto en X es unión contable de conjuntos en $\mathscr{C}$. Sean μ y μ_n medidas finitas en $(X, \mathscr{B}(X))$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$, para cada $A \in \mathscr{C}$, demostrar que $\liminf \mu_n(G) \geq \mu(G)$ para cada abierto G en X.*

Chapter 4

Extensión de medidas

A continuación se verá cómo construir una medida en una σ-álgebra $\mathscr{A}$ a partir de una medida definida en una álgebra $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$. La razón de esto es que en general es más fácil definir una medida en una álgebra y luego "extender" la definición a toda la σ-álgebra. Como ejemplo concreto se trabajará con la medida de Borel (ejemplo 3.5).

4.1 Longitud

La longitud de un intervalo $(a,b]$ es $b-a$. Sin embargo, si $A \subset \mathbb{R}$ no es fácil, en general, asignarle una longitud, si es que esto es posible. Iniciamos definiendo la función longitud λ en el π-sistema $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ (ver la página 16) como

$$\lambda((a,b]) = b-a \quad \text{y} \quad \lambda((-\infty,a]) = +\infty = \lambda((b,+\infty)).$$

Lema 4.1 (i) *Sea* $((a_k,b_k])_{k=1}^n$ *una sucesión finita de intervalos ajenos tal que* $\cup_{k=1}^n (a_k,b_k] \subset (a,b]$, *entonces* $\sum_{k=1}^n \lambda((a_k,b_k]) \leq \lambda((a,b])$.
(ii) *Sea* $((c_k,d_k])_{k=1}^n$ *una sucesión finita de intervalos, no necesariamente ajenos, tal que* $(c,d] \subset \cup_{k=1}^n (c_k,d_k]$, *entonces* $\lambda((c,d]) \leq \sum_{k=1}^n \lambda((c_k,d_k])$.

Demostración. La demostración es por inducción sobre n. Para $n=1$ las afirmaciones son claras. Supongamos que el lema es cierto para sucesiones de a lo mas $n-1$ intervalos y establezcámos los resultados para sucesiones n intervalos.

(i) : Sin pérdida de generalidad podemos suponer que a_n es el máximo de los a_i, $i=1,\dots,n$. Por ser los intervalos $(a_k,b_k]$ ajenos tenemos que $b_i \leq a_n$, $i=1,\dots,n-1$. Así $\cup_{k=1}^{n-1}(a_k,b_k] \subset (a,a_n]$. De la hipótesis inducción resulta $\sum_{k=1}^{n-1}\lambda((a_k,b_k]) \leq \lambda((a,a_n])$. Por lo tanto, $\sum_{k=1}^{n}\lambda((a_k,b_k]) \leq \lambda((a,a_n]) + \lambda((a_n,b_n]) \leq \lambda((a,b])$.

(ii) : Sin perdida de generalidad podemos suponer que $c_n < d \leq d_n$. Si $c_n \leq c$, entonces $(c,d] \subset (c_n,d_n]$ y el resultado es claro. Si $c < c_n$, entonces $(c,c_n] \cap (c_n,d_n] = \varnothing$. Por otra parte, $(c,c_n] \subset (c,d] \subset \cup_{k=1}^n (c_k,d_k]$, así $(c,c_n] \subset$

$\cup_{k=1}^{n-1}(c_k, d_k]$. Por la hipótesis de inducción, $\sum_{k=1}^{n} \lambda((c_k, d_k]) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda((c_k, d_k]) + \lambda((c_n, d_n]) \geq \lambda((c, c_n]) + \lambda((c_n, d_n]) \geq \lambda((c, d])$. ■

Ahora vamos a mostrar que λ es σ-aditiva en $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Lema 4.2 *Sea (I_n) una sucesión ajena en $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, $\cup_{n=1}^{\infty} I_n \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, entonces*

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n). \tag{4.1}$$

Demostración. Si $\lambda(I_n) = +\infty$ para algún n, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} I_n$ es de la forma $(-\infty, a]$ o $(a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$. En cualquier caso se obtiene la igualdad en (4.1). Supongamos que $\lambda(I_n) < +\infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $I_n = (a_n, b_n]$. Si $\cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n] = (a, b]$ del lema 4.1 (i) obtenemos, $\sum_{k=1}^{n} \lambda((a_k, b_k]) \leq \lambda((a, b])$. Así,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda((a_k, b_k]) \leq \lambda((a, b]). \tag{4.2}$$

Sea $0 < \varepsilon < b - a$, entonces la colección $\{(a_k, b_k + \varepsilon 2^{-k}) : k \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta del intervalo $[a + \varepsilon, b]$ y por el teorema de Heine-Borel existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que $(a + \varepsilon, b] \subset \cup_{k=1}^{n}(a_k, b_k + \varepsilon 2^{-k}) \subset \cup_{k=1}^{n}(a_k, b_k + \varepsilon 2^{-k}]$. Del lema 4.1 (ii) resulta que

$$b - (a + \varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{n}\left(b_k + \frac{\varepsilon}{2^k} - a_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) + \varepsilon.$$

Por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario obtenemos la desigualdad contraria a (4.2).

Consideraremos ahora el caso en que $\cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n] = (b, +\infty)$, si $\cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n] = (-\infty, a]$ se demuestra de forma similar. Sea $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$(b, b + k] = \bigcup_{n=1}^{\infty}((b, b + k] \cap (a_n, b_n]),$$

y por la primera parte de la demostración

$$k = \lambda((b, b + k]) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda((b, b + k] \cap (a_n, b_n]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda((a_n, b_n]),$$

pues $(b, b + k] \cap (a_n, b_n]$ es $\emptyset$ o un intervalo semiabierto. Pero $k \in \mathbb{N}$ arbitrario implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda((a_n, b_n]) = +\infty = \lambda((b, +\infty))$. ■

La definición de λ en la álgebra $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ es como sigue: Si $A \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$, entonces A es unión ajena de $\{I_i : I_i \in \mathscr{C}(\mathbb{R}),\ i = 1, \ldots, n\}$ y definimos

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i). \tag{4.3}$$

Veamos que λ está bien definida. Supongamos que $\cup_{i=1}^{n} I_i = \cup_{j=1}^{m} J_j$, con $(I_i)_{i=1}^{n}$ y $(J_j)_{j=1}^{m}$ colecciones ajenas, respectivamente, de elementos en $\mathscr{C}(\mathbb{R})$. Del lema 4.2 resulta

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{m}(I_i \cap J_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda(I_i \cap J_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i \cap J_j) = \sum_{j=1}^{m} \lambda(J_j).
\end{aligned}
$$

Teorema 4.1 *λ es una medida en la álgebra $\mathscr{F}(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sea (A_k) una sucesión ajena en $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ tal que $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$. Por lo tanto, $\cup_{k=1}^{\infty} A_k = \cup_{i=1}^{n} I_i$ y $A_k = \cup_{j=1}^{m_k} J_j^k$, con $(I_i)_{i=1}^{n}$, $(J_j^k)_{j=1}^{m_k}$ colecciones ajenas en $\mathscr{C}(\mathbb{R})$. Por (4.3), $\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i)$. Aplicando el lema 1.1 obtenemos

$$
\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k} \lambda(I_i \cap J_j^k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k} \lambda(I_i \cap J_j^k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i \cap J_j^k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k} \lambda(J_j^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).
\end{aligned}
$$

Como se quería probar. ∎

Nótese que a conjuntos tan sencillos como $(0,1)$ aún no les podemos asignar una longitud pues $(0,1) \notin \mathscr{F}(\mathbb{R})$. Así, el objetivo es generar una medida de longitud, a través de λ, en $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ que coincida con λ en $\mathscr{F}(\mathbb{R})$. De esta forma $(0,1) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ y por lo tanto tendría una medida de longitud, que sería 1 debido al ejercicio 47. Veremos que esto es posible en las siguientes secciones.

Problema

Problema 72 *Sean $A_{n,p} = \{x \in (0,1) :$ el n-ésimo dígito en la expansión p-ádica de x es $1\}$ (ver el ejercicio 42). Demostrar que $\cap_{i=2}^{k} A_{n,i} \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$ y encontrar $\lambda(\cap_{i=2}^{k} A_{n,i})$.*

4.2 Extensión de medidas

Para demostrar que toda medida definida en una álgebra se puede extender a una σ-álgebra se necesitan los siguientes conceptos:

Definición 4.1 *Sea X un conjunto no vacío. Una función $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, se llama medida exterior si:*
(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$.
(ii) *Si $A \subset B$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*
(iii) *Si (A_n) es una sucesión en $\mathscr{P}(X)$, entonces*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{4.4}$$

Las propiedades (ii) y (iii) de μ^* se llaman *monoton ía* y *σ-subaditivi- dad*, respectivamente. Si una medida μ está definida en $\mathscr{P}(X)$, entonces μ es una medida exterior. Por otra parte, una medida exterior no es en general una medida. En efecto, la función μ^* del ejemplo 3.7 no es una medida, pero sí es una medida exterior.

Sea μ^* una medida exterior definida en $\mathscr{P}(X)$. A continuación se verá que restringiendo el dominio de μ^* se obtiene un espacio de medida. Con este propósito definamos la colección

$$\mathscr{A}^* = \{A \subset X : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c),\ \forall E \subset X\},$$

llamada σ-álgebra exterior.

Lema 4.3 *La colección $\mathscr{A}^* \subset \mathscr{P}(X)$ es una álgebra.*

Demostración. Ya que $\mu^*(\varnothing) = 0$, entonces $X \in \mathscr{A}^*$. Por otra parte $(A^c)^c = A$, implica que $\mathscr{A}^*$ es cerrada bajo complementos. Sean $A, B \in \mathscr{A}^*$ y $E \subset X$. La propiedad de σ-subaditividad de μ^* implica

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &\leq \mu^*(E \cap (A \cap B)) + \mu^*(E \cap (A \cap B)^c) \\
&= \mu^*(E \cap (A \cap B)) \\
&\quad + \mu^*(E \cap (A^c \cup B^c)) \\
&= \mu^*(E \cap A \cap B) \\
&\quad + \mu^*((E \cap A^c) \cup (E \cap B^c)) \\
&= \mu^*(E \cap (A \cap B)) \\
&\quad + \mu^*([(E \cap A^c) \cap (B \cup B^c)] \cup [(E \cap B^c) \cap (A \cup A^c)]) \\
&= \mu^*(E \cap (A \cap B)) \\
&\quad + \mu^*((E \cap A \cap B^c) \cup (E \cap A^c \cap B) \cup (E \cap A^c \cap B^c)) \\
&\leq \mu^*((E \cap A) \cap B) + \mu^*((E \cap A) \cap B^c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & +\mu^*((E\cap A^c)\cap B)+\mu^*((E\cap A^c)\cap B^c) \\ = \quad & \mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)=\mu^*(E) \end{aligned}$$

Así $A\cap B\in\mathscr{A}^*$. Puesto que $\mathscr{A}^*$ es cerrada bajo complementos, tenemos que $\mathscr{A}^*$ una álgebra. ∎

Lema 4.4 *Sea $(A_k)_{k=1}^n$, $n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, una sucesión en $\mathscr{A}^*$ ajena. Entonces*

$$\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)\right)=\sum_{k=1}^n\mu^*(E\cap A_k) \tag{4.5}$$

para cada $E\subset X$.

Demostración. Caso $n<+\infty$. La demostración es por inducción. Sea $n=2$. Ya que $A_1\in\mathscr{A}^*$, entonces

$$\begin{aligned} \mu^*(E\cap(A_1\cup A_2)) &= \mu^*((E\cap(A_1\cup A_2))\cap A_1)+\mu^*((E\cap(A_1\cup A_2))\cap A_1^c) \\ &= \mu^*(E\cap A_1)+\mu^*(E\cap A_2). \end{aligned}$$

La última igualdad es debida a que $A_1\cap A_2=\emptyset$. Supongamos ahora el resultado cierto para $n-1$. Puesto que $\cup_{k=1}^{n-1}A_k\in\mathscr{A}^*$ y $A_n\in\mathscr{A}^*$, tenemos, del caso $n=2$ y la hipótesis de inducción, que

$$\begin{aligned} \mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)\right) &= \mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\cup A_n\right)\right) \\ &= \mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)\right)+\mu^*(E\cap A_n) \\ &= \sum_{k=1}^n\mu^*(E\cap A_k). \end{aligned}$$

Caso $n=+\infty$. De la monotonía y σ-subaditividad de μ^* resulta

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty\mu^*(E\cap A_n) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\mu^*(E\cap A_k) \\ &= \lim_{n\to\infty}\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)\right) \\ &\le \mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right)\right)\le\sum_{n=1}^\infty\mu^*(E\cap A_n). \end{aligned}$$

Como se quería demostrar. ∎

Teorema 4.2 *La terna $(X,\mathscr{A}^*,\mu^*)$ es un espacio de medida completo.*

Demostración. Debido al lema 2.4 basta con mostrar que $\mathscr{A}^*$ es una clase monótona. Sea (B_k) una sucesión creciente en $\mathscr{A}^*$ y $E \subset X$. La sucesión (A_n), con $A_1 = B_1$ y $A_n = B_n \backslash B_{n-1}$, $n \geq 2$, es una sucesión ajena en $\mathscr{A}^*$ y $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Usando la propiedad σ-subaditividad de μ^* y el lema 4.4, resulta

$$
\begin{aligned}
\mu^*(E) &\leq \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\right) + \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right) + \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c\right)\right] \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \left[\mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right) + \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^c\right)\right] = \mu^*(E).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\cup_{k=1}^{\infty} B_k = \cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}^*$. Si (B_n) es una sucesión decreciente en $\mathscr{A}^*$, entonces (B_n^c) es creciente, por lo tanto $(\cap_{n=1}^{\infty} B_n)^c = (\cup_{n=1}^{\infty} B_n^c) \in \mathscr{A}^*$.

Para mostrar que μ^* es una medida basta tomar $E = X$ en (4.5).

Veamos la completez del espacio de medida $(X, \mathscr{A}^*, \mu^*)$. Sea $A \subset X$ y $B \in \mathscr{A}^*$, con $A \subset B$, $\mu^*(B) = 0$ y $E \subset X$ arbitrario. Ya que $E \cap A \subset E \cap B$, $E \cap A^c \subset E$, de la propiedad de σ-subaditividad de μ^*

$$
\begin{aligned}
\mu^*(E) &\leq \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E \cap A) \\
&\leq \mu^*(E) + \mu^*(E \cap B) = \mu^*(E).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $A \in \mathscr{A}^*$. ∎

Una cuestion iteresante es si $\mathscr{A}^*$ es la mayor σ-álgebra en la cual μ^* es una medida. La medida μ_∞ y la medida de contar coinciden en $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ pero no lo hacen en $\mathscr{F}(\mathbb{R})^*$. Sea μ una medida definida en una álgebra $\mathscr{A}$. Para cada $A \subset X$ definimos

$$
\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(H_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n,\ H_n \in \mathscr{A}\ \forall n \in \mathbb{N}\right\}. \tag{4.6}
$$

Teorema 4.3 (Extensión de Caratheodory) *La función μ^* es una medida exterior, $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}^*$ y μ^* coincide con μ en $\mathscr{A}$.*

Demostración. Claramente $\mu^*(\emptyset) = 0$. Supongamos que $A \subset B \subset X$, entonces si $B \subset \cup_{n=1}^{\infty} H_n$, $H_n \in \mathscr{A}$, tenemos que $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} H_n$, así $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(H_n)$. Por lo tanto, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Sea (A_n) una sucesión de subconjuntos de X y $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por definición de μ^* existen sucesiones $(H_{n,k})_{k=1}^{\infty}$, $n \in \mathbb{N}$, en $\mathscr{A}$ tal que

$A_n \subset \cup_{k=1}^{\infty} H_{n,k}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_{n,k}) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. Así, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{\infty} H_{n,k}$, y el lema 1.1 implica

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_{n,k}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario obtenemos que μ^* es una medida exterior. Veamos que $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}^*$. Sea $A \in \mathscr{A}$ y $E \subset X$ arbitrario. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe (H_n) en $\mathscr{A}$ tal que $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} H_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(H_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$. Por lo tanto, $E \cap A \subset \cup_{n=1}^{\infty}(H_n \cap A)$ y $E \cap A^c \subset \cup_{n=1}^{\infty}(H_n \cap A^c)$, con $H_n \cap A$, $H_n \cap A^c \in \mathscr{A}$, pues $\mathscr{A}$ es una álgebra. Por la definición de μ^* y su propiedad de σ-subaditividad resulta,

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(H_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(H_n \cap A^c) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(H_n \cap A) + \mu(H_n \cap A^c)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(H_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario esto implica que $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}^*$. Sea $A \in \mathscr{A}$, es claro de la definición de μ^* que $\mu^*(A) \leq \mu(A)$. Por otra parte, sea (H_n) una sucesión en $\mathscr{A}$, $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} H_n$, entonces la σ-subaditividad de μ implica

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(H_n \cap A)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(H_n).$$

Es decir, $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. Por lo tanto, $\mu = \mu^*$ en $\mathscr{A}$. ■

Teorema 4.4 (Unicidad de la extensión de Hahn) *Sea μ una medida σ-finita definida en una álgebra $\mathscr{A}$. Entonces existe una única extensión de μ a una medida definida en la σ-álgebra $\mathscr{A}^*$.*

Demostración. Ya sabemos que μ^* es una medida en $\mathscr{A}^*$. Supongamos que ν es otra medida en $\mathscr{A}^*$ que es una extensión de μ. Demostraremos que $\mu^* = \nu$.

Caso μ es finita en $\mathscr{A}$. Sea $A \in \mathscr{A}^*$ y (H_n) sucesión en $\mathscr{A}$ tal que $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} H_n$. Ya que μ^* y ν coinciden con μ en $\mathscr{A}$, tenemos que

$$\nu(A) \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(H_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(H_n).$$

Por lo tanto $\nu(A) \leq \mu^*(A)$, para toda $A \in \mathscr{A}^*$. Luego, si $B \in \mathscr{A}^*$,

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \mu^*(X) - \mu^*(B^c) \\ &\leq \nu(X) - \nu(B^c) = \nu(B). \end{aligned}$$

Esto implica, $\mu^* = \nu$ en $\mathscr{A}^*$.

Caso μ es σ-finita en $\mathscr{A}$. De la proposición 3.2 tenemos que existe una sucesión monótona creciente (B_n) en $\mathscr{A}$ tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ y $\mu(B_n) < +\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defínanse las medidas $\mu_n : \mathscr{A} \cap B_n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ y $\mu_n^*, \nu_n : \mathscr{A}^* \cap B_n \to \overline{\mathbb{R}}_+$, como

$$\mu_n(A) = \mu(A), \;\; \mu_n^*(A) = \mu^*(A) \;\text{ y }\; \nu_n(A) = \nu(A).$$

Así, μ_n es una medida finita en $\mathscr{A} \cap B_n$, $\mu_n^*|_{\mathscr{A} \cap B_n} = \mu_n$ y $\nu_n|_{\mathscr{A} \cap B_n} = \mu_n$. Sea $A \subset B_n$, entonces obtemos que

$$\begin{aligned} (\mu_n)^*(A) &= \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(H_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k,\ H_k \in \mathscr{A} \cap B_n\ \forall k \in \mathbb{N} \right\} \\ &\geq \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k,\ H_k \in \mathscr{A}\ \forall k \in \mathbb{N} \right\} = \mu_n^*(A). \end{aligned}$$

Además, si $A \subset \cup_{k=1}^{\infty} G_k$, $(G_k) \subset \mathscr{A}$, entonces $A \subset \cup_{k=1}^{\infty} (G_k \cap B_n)$, luego

$$(\mu_n)^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(G_k \cap B_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k),$$

por ende $(\mu_n)^*(A) \leq \mu^*(A) = \mu_n^*(A)$. Veamos que $\mathscr{A}^* \cap B_n = (\mathscr{A} \cap B_n)^*_{\mu_n}$, donde el subíndice indica que la σ-álgebra exterior es con respecto a μ_n. Sea $A \in \mathscr{A}^* \cap B_n$ y $E \subset B_n$. Puesto que, $\mu_n^* = (\mu_n)^*$ en $\mathscr{P}(B_n)$,

$$\begin{aligned} (\mu_n)^*(E) = \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= (\mu_n)^*(E \cap A) + (\mu_n)^*(E \cap A^c), \end{aligned}$$

es decir $A \in (\mathscr{A} \cap B_n)^*_{\mu_n}$. Sea $(\mathscr{A} \cap B_n)^*_{\mu_n}$ y $E \subset X$. Puesto que $B_n \in \mathscr{A}^*$,

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (X \backslash A)) \\ &\leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (B_n \backslash A)) + \mu^*(E \cap (X \backslash B_n)) \\ &= \mu_n^*((E \cap B_n) \cap A) + \mu_n^*((E \cap B_n) \cap (B_n \backslash A)) \\ &\quad + \mu^*(E \cap (X \backslash B_n)) \\ &= \mu_n^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap (X \backslash B_n)) = \mu^*(E). \end{aligned}$$

Por ende, $(\mathscr{A} \cap B_n)^*_{\mu_n} \subset \mathscr{A}^* \cap B_n$. Por la primera parte $\mu_n^* = (\mu_n)^* = \nu_n$, por lo tanto, si $A \in \mathscr{A}^*$, entonces

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \nu_n(A \cap B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu_n^*(A \cap B_n) = \mu^*(A). \end{aligned}$$

Como se quería demostrar. ■

Nótese que en $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ la medida de contar y la medida μ_∞ coinciden, pero no lo hacen en $\mathscr{F}(\mathbb{R})^*$.

Problemas

Problema 73 *Sean $X = \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{N}$ y defínase*

$$\mu^*(A) = \begin{cases} \frac{\sup(A)}{\sup(A)+1}, & card(A) < +\infty, \\ 0, & A = \emptyset, \\ 1, & card(A) = +\infty. \end{cases}$$

Demostrar que μ^* es una medida exterior y encontrar $\mathscr{A}^*$.

Problema 74 *Sea X un espacio métrico y μ^* una medida exterior en $\mathscr{P}(X)$. Demostrar que $\mathscr{B}(X) \subset \mathscr{A}^*$ si y sólo si $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$, siempre que $A \cap \overline{B} = \emptyset$ (véase la página 8).*

Problema 75 *Sean $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$, $\mathscr{C}$ no vacía, y $f : \mathscr{C} \to [0, +\infty]$ una función. Defínase $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty]$ por $\mu(\emptyset) = 0$ y*

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f(A_n) : (A_n) \subset \mathscr{C} \ \text{ y } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\},$$

con $\inf \emptyset = +\infty$. Mostrar que μ es una medida exterior.

4.3 Un resultado de aproximación y la relación entre $\widetilde{\mathscr{A}}$ y $\mathscr{A}^*$

Un resultado de aproximación que nos será útil es el siguiente.

Teorema 4.5 *Sea μ una medida σ-finita definida en una álgebra $\mathscr{F}$ y sea ν una medida extensión de μ definida en $\sigma(\mathscr{F})$. Si $A \in \sigma(\mathscr{F})$, con $\nu(A) < +\infty$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $B \in \mathscr{F}$ tal que $\nu(A \triangle B) < \varepsilon$.*

Demostración. Caso μ medida finita. Definamos la colección

$$\mathscr{M} = \{A \in \sigma(\mathscr{F}) : \text{para cada } \varepsilon > 0 \text{ existe } B \in \mathscr{F},\ \nu(A \triangle B) < \varepsilon\}.$$

Veamos que $\mathscr{M}$ es una clase monótona. Sea (A_n) una sucesión creciente en $\mathscr{M}$ y $\varepsilon > 0$. Usando el lema 3.2 y debido a que $\mu(X) = \nu(X) < +\infty$, existe N tal que $\nu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) - \nu(A_N) = \nu((\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \backslash A_N) < \varepsilon/2$. Como $A_N \in \mathscr{M}$, entonces existe $B_N \in \mathscr{F}$ tal que $\nu(A_N \triangle B_N) < \varepsilon/2$. En consecuencia, véase el ejercicio 9,

$$\nu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \triangle B_N\right) \leq \nu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \backslash A_N\right) + \nu(A_N \triangle B_N) < \varepsilon.$$

Así $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$. De igual forma se ve que $\mathscr{M}$ es cerrada bajo sucesiones decrecientes. Puesto que $\mathscr{F} \subset \mathscr{M}$, entonces por el teorema 2.3 resulta que $\sigma(\mathscr{F}) = m(\mathscr{F}) \subset \mathscr{M} \subset \sigma(\mathscr{F})$.

Caso μ medida σ-finita. Existe una sucesión (B_n) en $\mathscr{F}$ tal que $B_n \uparrow X$ y $\mu(B_n) < +\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sean $A \in \sigma(\mathscr{F})$, $\nu(A) < +\infty$, y $\varepsilon > 0$. Ya que $A \cap B_n \uparrow A$, entonces existe N tal que $\nu(A) - \nu(A \cap B_N) < \varepsilon/2$. Puesto que la medida $\nu_N(C) = \nu(C \cap B_N)$, $C \in \sigma(\mathscr{F})$ es finita, por la primera parte existe $B \in \mathscr{F}$ tal que $\nu_N(A \triangle B) = \nu((A \triangle B) \cap B_N) < \varepsilon/2$. Entonces $B \cap B_N \in \mathscr{F}$ y

$$\begin{aligned} \nu(A \triangle (B \cap B_N)) &\leq \nu(A \backslash (A \cap B_N)) + \nu((A \cap B_N) \triangle (B \cap B_N)) \\ &= \nu(A \backslash (A \cap B_N)) + \nu((A \triangle B) \cap B_N) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Con lo cual el resultado queda demostrado. ■

Si A y B son como en el teorema 4.5, entonces

$$\begin{aligned} |\nu(A) - \mu(B)| &= |\nu(A) - \nu(B)| \\ &= |\nu(A \backslash B) + \nu(A \cap B) - \nu(B \backslash A) - \nu(A \cap B)| \\ &\leq \nu(A \backslash B) + \nu(B \backslash A) \\ &= \nu(A \triangle B) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Lo que nos muestra que los valores de la medida extensión ν no están muy lejos de los valores de la medida extendida μ.

Ahora veamos qué relación existe entre las σ-álgebras $\widetilde{\mathscr{A}}$ (ver la sección 3.3) y $\mathscr{A}^*$.

Teorema 4.6 *Sea μ una medida en la σ-álgebra $\mathscr{A}$. Entonces $\widetilde{\mathscr{A}} \subset \mathscr{A}^*$ y si μ es σ-finita, $\widetilde{\mathscr{A}} = \mathscr{A}^*$.*

Demostración. Caso μ no es necesariamente σ-finita. Sea $A \cup N \in \widetilde{\mathscr{A}}$, entonces existe $B \in \mathscr{A}$, tal que $N \subset B$ y $\mu(B) = 0$. Puesto que $(X, \mathscr{A}^*, \mu^*)$ es un espacio de medida completo, entonces $N \in \mathscr{A}^*$. Así, $A \cup N \in \mathscr{A}^*$, por lo tanto $\widetilde{\mathscr{A}} \subset \mathscr{A}^*$.

Caso μ es σ-finita. Supongamos que $\mu(X) < +\infty$. Sea $B \in \mathscr{A}^*$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existen sucesiones $(H_{n,k})_{k=1}^{\infty}$, $(L_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ en $\mathscr{A}$ tal que $B \subset \cup_{k=1}^{\infty} H_{n,k}$, $B^c \subset \cup_{k=1}^{\infty} L_{n,k}$, y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(H_{n,k}) \le \mu^*(B) + \frac{1}{n}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(L_{n,k}) \le \mu^*(B^c) + \frac{1}{n}.$$

Sean $C_n = \cup_{k=1}^{\infty} H_{n,k}$ y $A_n = \cap_{k=1}^{\infty} L_{n,k}^c$. Nótese que $A_n, C_n \in \mathscr{A}$ y $A_n \subset B \subset C_n$. Además

$$\begin{aligned} \mu(C_n \backslash A_n) &= \mu(C_n) - \mu(X) + \mu(A_n^c) \\ &\le \mu^*(B) + \frac{1}{n} - \mu(X) + \left(\mu^*(B^c) + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Definamos $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$ y $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces $C, A \in \mathscr{A}$ y $A \subset B \subset C$,

$$\mu(C \backslash A) = \mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) \backslash \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) \le \mu(C_n \backslash A_n) \le \frac{2}{n},$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego $B = A \cup (B \backslash A)$, con $\mu(B \backslash A) \le \mu(C \backslash A) = 0$, por lo tanto $B \in \widetilde{\mathscr{A}}$, es decir, $\widetilde{\mathscr{A}} \supset \mathscr{A}^*$.

Caso μ es σ-finita. Existe una sucesión (D_n) en $\mathscr{A}$, tal que $D_n \uparrow X$ y $\mu(D_n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ (ver la proposición 3.2). Para cada $n \in \mathbb{N}$ defínanse las medidas μ_n en $(D_n, \mathscr{A} \cap D_n,)$ como $\mu_n(A) = \mu(A)$ y μ_n^* en $(D_n, (\mathscr{A} \cap D_n)^*,)$ como $\mu_n^*(A) = \mu^*(A)$. Por la primera parte, $\widetilde{\mathscr{A} \cap D_n} = (\mathscr{A} \cap D_n)^*$. Sea $B \in \mathscr{A}^*$, entonces $B \cap D_n \in D_n \cap \mathscr{A}^* = (\mathscr{A} \cap D_n)^* = \widetilde{\mathscr{A} \cap D_n}$, luego existen $A_n \in \mathscr{A} \cap D_n$, $N_n \subset D_n$ y $C_n \in \mathscr{A} \cap D_n$, tal que $B \cap D_n = A_n \cup N_n$, con $N_n \subset C_n$, $\mu_n(C_n) = 0$. Sean $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, $N = \cup_{n=1}^{\infty} N_n$ y $C = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$. Entonces $A, C \in \mathscr{A}$, $B = A \cup N$, $N \subset C$ y

$$\mu(C) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(C_n) = 0$$

en consecuencia $B \in \widetilde{\mathscr{A}}$. Por lo tanto, $\mathscr{A}^* \subset \widetilde{\mathscr{A}}$. ∎

Sea μ una medida definida en una álgebra $\mathscr{F}$. Nótese que $\sigma(\mathscr{F}) \subset \mathscr{F}^*$. Si μ es σ-finita del teorema 4.6 tenemos que $(X, \widetilde{\sigma(\mathscr{F})}, \widetilde{\mu^*}) = (X, \mathscr{F}^*, \mu^*)$.

Problemas

Problema 76 *Dar un ejemplo de una medida μ no σ-finita definida en una álgebra $\mathscr{F}$, tal que tenga una extensión σ-finita definida en $\sigma(\mathscr{F})$ y que no se cumpla el teorema 4.6.*

Problema 77 *Dar un ejemplo donde $\widetilde{\mathscr{A}} \neq \mathscr{A}^*$.*

4.4 Medida de Lebesgue

En este punto se tiene la herramienta necesaria para construir medidas y se usará para obtener una de las medidas más importantes, la de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Según los resultados (y la notación) de las Secciones 2.2 y 4.1 se sabe que $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ es una álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ y que la función longitud, λ, es una medida σ-finita en $\mathscr{F}(\mathbb{R})$. Debido a los teoremas 4.3 y 4.4 existe una única medida,

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(I_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\ I_n \in \mathscr{C}(\mathbb{R})\ \forall n \in \mathbb{N}\right\},$$

en $(\mathbb{R}, \mathscr{F}(\mathbb{R})^*)$ que es extensión de λ. Los elementos de $\mathscr{F}(\mathbb{R})^*$ se llaman *conjuntos Lebesgue medibles* y la medida λ^* en $\mathscr{F}(\mathbb{R})^*$ se llama *medida de Lebesgue.* La restricción de la medida de Lebesgue λ^* a $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{F}(\mathbb{R})^*$ se denota por λ (es decir, $\lambda = \lambda^*|_{\mathscr{B}(\mathbb{R})}$) y se llama *medida de Borel*. Ahora se tiene que $Card(\mathscr{B}(\mathbb{R})) = c < 2^c = Card(\mathscr{F}(\mathbb{R})^*)$

Nótese que si $K \subset \mathbb{R}$ es un conjunto compacto, entonces $\lambda^*(K) < +\infty$, pues K está contenido en un intervalo acotado. Más aún, a manera de ilustración del uso de la definición de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ se demostrará en las siguientes proposiciones que la medida de Lebesgue es una medida regular (ver la sección 3.5). Se inicia demostrando que λ^* es una medida regular exteriormente.

Proposición 4.1 *Sea $A \in \mathscr{F}(\mathbb{R})^*$, entonces*

$$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda^*(G) : A \subset G,\ G \textit{ conjunto abierto}\}. \tag{4.7}$$

Demostración. Si $\lambda^*(A) = +\infty$ no hay nada que demostrar. Supongamos que $\lambda^*(A) < +\infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Luego existe $(I_i) \subset \mathscr{C}(\mathbb{R})$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ y $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^*(I_i) \leq \lambda^*(A) + \varepsilon/2$. Ya que $\lambda^*(A) < +\infty$, entonces los intervalos I_i son de la forma $(a_i, b_i]$. Definamos la sucesión de intervalos (J_i), por $J_i = (a_i, b_i + \varepsilon 2^{-i-1})$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Así, A está contenido en el conjunto abierto $\cup_{i=1}^{\infty} J_i$ y

$$\begin{aligned}
\lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^*(J_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\lambda^*(I_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^*(I_i) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \left(\lambda^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = \lambda^*(A) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\lambda^*(A) \leq \inf\{\lambda^*(G) : A \subset G,\ G \text{ conjunto abierto}\} \leq \lambda^*(A) + \varepsilon.$$

Por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario obtenemos la igualdad (4.7). ∎

Corolario 4.1 *Si $A \in \mathscr{F}(\mathbb{R})^*$, con $\lambda^*(A) < +\infty$, y $\varepsilon > 0$, entonces existe un conjunto abierto U que es unión finita de intervalos abiertos finitos ajenos tal que $\lambda^*(A \triangle U) < \varepsilon$.*

Demostración. Debido a la proposición 4.1 existe un conjunto abierto G tal que $A \subset G$ y $\lambda^*(G) < \lambda^*(A) + \varepsilon/2$. El lema 2.1 implica que G es unión de una colección $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ de intervalos abiertos finitos ajenos. Así, $\lambda^*(G) = \lim_{n\to\infty} \lambda^*\left(\cup_{i=1}^{n} I_i\right)$. Por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^*(G) - \lambda^*\left(\cup_{i=1}^{n_0} I_i\right) < \varepsilon/2$. Si $U = \cup_{i=1}^{n_0} I_i$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda^*(A \triangle U) &= \lambda^*(A \backslash U) + \lambda^*(U \backslash A) \\ &\leq \lambda^*(G \backslash U) + \lambda^*(G \backslash A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como se quería demostrar. ■

Veamos ahora que la medida de Lebesgue es regular interiormente.

Proposición 4.2 *Sea $A \in \mathscr{F}(\mathbb{R})^*$, entonces*

$$\lambda^*(A) = \sup\{\lambda^*(K) : K \subset A,\ K \textit{ conjunto compacto}\}. \tag{4.8}$$

Demostración. Supongamos primero que $\lambda^*(A) < +\infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Ya que

$$\begin{aligned} \lambda^*(A) &= \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}([-n,n] \cap A)\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \lambda^*([-n,n] \cap A) \end{aligned} \tag{4.9}$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda^*(A) - \lambda^*([-n_0,n_0] \cap A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por la proposición 4.1 existe un abierto G_ε tal que $[-n_0,n_0] \backslash ([-n_0,n_0] \cap A) \subset G_\varepsilon$ y

$$\lambda^*(G_\varepsilon) \leq \lambda^*([-n_0,n_0] \backslash ([-n_0,n_0] \cap A)) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideremos el conjunto compacto $K_\varepsilon = [-n_0,n_0] \cap G_\varepsilon^c$,

$$\begin{aligned} \lambda^*(A) - \varepsilon &\leq \lambda^*([-n_0,n_0] \cap A) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \lambda^*([-n_0,n_0]) - (\lambda^*([-n_0,n_0]) - \lambda^*([-n_0,n_0] \cap A) + \frac{\varepsilon}{2}) \\ &= \lambda^*([-n_0,n_0]) - (\lambda^*([-n_0,n_0] \backslash ([-n_0,n_0] \cap A)) + \frac{\varepsilon}{2}) \\ &\leq \lambda^*([-n_0,n_0]) - \lambda^*(G_\varepsilon) \\ &= \lambda^*([-n_0,n_0] \backslash G_\varepsilon) \end{aligned}$$

$$= \lambda^*(K_\varepsilon).$$

Más aún, sea $x \in K_\varepsilon$, entonces $x \in [-n_0, n_0]$ y $x \notin G_\varepsilon$. Si $x \notin A$, entonces $x \notin ([-n_0, n_0] \cap A)$, en consecuencia $x \in [-n_0, n_0] \setminus ([-n_0, n_0] \cap A) \subset G_\varepsilon$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $K_\varepsilon \subset A$, de lo cual

$$\lambda^*(A) - \varepsilon \leq \sup\{\lambda^*(K) : K \subset A,\ K \text{ conjunto compacto}\} \leq \lambda^*(A).$$

Por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario obtenemos la igualdad en (4.8).

Consideremos ahora el caso en que $\lambda^*(A) = +\infty$. Sea $m \in \mathbb{N}$. De (4.9) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^*(A \cap [-n, n]) \geq m + 1$. Por la primera parte de la demostración existe un conjunto compacto $K_1 \subset A \cap [-n, n]$ tal que

$$\lambda^*(A \cap [-n, n]) \leq \lambda^*(K_1) + 1.$$

Así,

$$\lambda^*(K_1) \geq \lambda^*(A \cap [-n, n]) - 1 \geq (m + 1) - 1 = m,$$

es decir, $\sup\{\lambda^*(K) : K \subset A,\ K \text{ compacto}\} \geq m$. Por ser $m \in \mathbb{N}$ arbitrario obtenemos la igualdad (4.8). ∎

Una generalización de la medida de Lebesgue es el siguiente concepto. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente. Usando la notación de la sección 3.1. Definimos en este caso la función λ_f en $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ como

$$\begin{aligned}
\lambda_f((a, b]) &= f(b-) - f(a+), \\
\lambda_f((-\infty, a]) &= f(a+) - \lim_{x \to -\infty} f(x), \\
\lambda_f((b, +\infty)) &= \lim_{x \to +\infty} f(x) - f(b-).
\end{aligned}$$

Nótese que los límites $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ pueden ser $-\infty$ y $+\infty$, respectivamente. Si $A \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$, entonces $A = \cup_{i=1}^n I_i$, $I_i \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ y $I_i \cap I_j = \emptyset$, si $i \neq j$. Definimos en este caso

$$\lambda_f(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_f(I_i).$$

De esta forma, se obtiene una medida σ-finita definida en la álgebra $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ (ver el ejercicio 48). La medida λ_f tiene una única extensión λ_f^* definida en $(\mathbb{R}, \mathscr{F}(\mathbb{R})^*)$. La medida λ_f^* se llama *medida de Lebesgue-Stieltjes generada por* f y cuando λ_f^* se restringe a $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ se llama *medida de Borel-Stieltjes generada por* f y se denota por λ_f.

Problemas

Problema 78 *¿Por qué se requiere que f sea continua a la derecha, en la definición de λ_f?. Demostrar que λ_f es σ-finita.*

Problema 79 *Demostrar que si $A \in \mathscr{F}(\mathbb{R})^*$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces $A + a \in \mathscr{F}(\mathbb{R})^*$. Más aún, demostrar que λ^* es invariante bajo traslaciones (ver los ejercicios 27 y 49).*

Problema 80 *Demostrar que $\lambda(C) = 0$, donde C es el conjunto de Cantor ((2.44) de [26]).*

Problema 81 *Sea C el conjunto de Cantor. Demostrar que $\lambda(C - C) = 2$, donde $C - C = \{x - y : x, y \in C\}$.*

Problema 82 *Sea $A \in \mathscr{F}(\mathbb{R})^*$ tal que $\lambda^*(A) > 0$. Entonces para cada $0 \leq k < 1$ existe un intervalo abierto I tal que $\lambda^*(A \cap I) > k\lambda^*(I)$.*

Problema 83 *Sea $A \in \mathscr{F}(\mathbb{R})^*$ tal que $\lambda^*(A) > 0$. Demostrar que A contiene una infinidad de pares de puntos tal que su diferencia es un número racional (irracional).*

Problema 84 *Demostrar que $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda^*)$ no es un espacio de medida completo. Deducir que $\mathscr{F}(\mathbb{R})^* \setminus \mathscr{B}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.*

Problema 85 *Sea $E \subset \mathbb{R}$ y $\lambda^*(E) < +\infty$. Demostrar que $E \in \mathscr{F}(\mathbb{R})^*$ si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ existe un conjunto abierto $O \supset E$ con $\lambda^*(O \setminus E) < \varepsilon$. O equivalentemente a que para toda $\varepsilon > 0$ existe un conjunto U, que es unión finita de intervalos abiertos tal que $\lambda^*(U \triangle E) < \varepsilon$.*

Problema 86 *Sea $D \in \mathscr{F}(\mathbb{R})^*$ con $\lambda^*(D^c) = 0$. Demostrar que D es denso en $\mathbb{R}$.*

Problema 87 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que f mapea conjuntos Lebesgue medibles en conjuntos medibles si y sólo si f mapea conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero.*

Problema 88 *Sea $0 < \alpha < 1$. Construir sobre $[0, 1]$ un conjunto A, tal que $\lambda^*(A) = \alpha$, y para cada segmento $[a, b] \subset [0, 1]$ se cumple que $0 < \lambda^*(A \cap [a, b]) < b - a$.*

Problema 89 *Una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama isometría si $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$. Demostrar que si A es un conjunto medible en $[a, b]$, entonces $\varphi(A)$ es un conjunto medible en el intervalo con puntos extremos $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$, y $\lambda^*(\varphi(A)) = \lambda^*(A)$.*

Problema 90 *Sea $E \in \mathscr{F}(\mathbb{R})^*$, con $\lambda^*(E) > 0$. Demostrar que $E - E$ contiene un intervalo abierto. (Para la notación véase el ejercicio 81.)*

Chapter 5

Funciones medibles

Al estudiar una teoría de integración es natural comenzar por identificar las funciones que son factibles de integrar. Éstas serán las funciones medibles, cuya integral siempre estará definida si la función es no negativa.

5.1 Funciones medibles

El concepto principal de este capítulo es el que se da a continuación.

Definición 5.1 *Sean $(X, \mathscr{A})$ y $(Y, \mathscr{B})$ dos espacios medibles. Una función $f : X \to Y$ se llama $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$ medible si $f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$.*

Por abuso de notación, en ocasiones escribiremos $f : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ para indicar que $f : X \to Y$ es $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$ medible.

Algunos ejemplos de funciones medibles son los siguientes:

Ejemplo 5.1 *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 1_A(x)$, $A \subset X$. Entonces f es $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}(\mathbb{R})$ medible si y sólo si $A \in \mathscr{A}$.*

Ejemplo 5.2 *Sea $\mathscr{B}$ una sub-σ-álgebra de $\mathscr{A}$, es decir, $\mathscr{B}$ es una σ-álgebra y $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$. Entonces la función identidad $I : X \to X$ es $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$ medible.*

Lema 5.1 *Sean $f : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ y $g : (Y, \mathscr{B}) \to (Z, \mathscr{C})$. Entonces $g \circ f$ es $\mathscr{A}$-$\mathscr{C}$ medible.*

Demostración. De (1.1) obtenemos, $(g \circ f)^{-1}(\mathscr{C}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathscr{C})) \subset f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$. ∎

Lema 5.2 *Sea $f : (X, \mathscr{A}) \to Y$, entonces $\mathscr{B} = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathscr{A}\}$ es una σ-álgebra en Y.*

Demostración. Puesto que $X = f^{-1}(Y) \in \mathscr{A}$, entonces $Y \in \mathscr{B}$. Ahora si $E \in \mathscr{B}$, $f^{-1}(E) \in \mathscr{A}$, luego $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c \in \mathscr{A}$, por lo tanto, $E^c \in \mathscr{B}$. Sea (E_n) una sucesión en $\mathscr{B}$, entonces $(f^{-1}(E_n))$ es una sucesión en $\mathscr{A}$, lo que implica que $f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n) \in \mathscr{A}$. Así $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{B}$. ∎

Lema 5.3 *Sea $f : X \to (Y, \mathscr{B})$, entonces $f^{-1}(\mathscr{B})$ es una σ-álgebra en X y es la mínima σ-álgebra con respecto a la cual f es medible.*

Demostración. Tenemos que $X \in f^{-1}(\mathscr{B})$, pues $X = f^{-1}(Y)$, $Y \in \mathscr{B}$. Si $A \in f^{-1}(\mathscr{B})$, entonces existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $A = f^{-1}(B)$. De esta forma $A^c = X \backslash A = f^{-1}(Y) \backslash f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \backslash B) = f^{-1}(B^c)$, donde $B^c \in \mathscr{B}$. Sea (A_n) una sucesión en $f^{-1}(\mathscr{B})$, por definición de $f^{-1}(\mathscr{B})$, existen $B_n \in \mathscr{B}$, tal que $A_n = f^{-1}(B_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Lo que implica que, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} B_n)$, con $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{B}$, así $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in f^{-1}(\mathscr{B})$. ∎

Usando la notación del lema 5.3 introducimos el siguiente concepto:

Definición 5.2 *$f^{-1}(\mathscr{B})$ se llama σ-álgebra generada por f y se denota por $\sigma(f)$.*

Lema 5.4 *Sea $f : X \to Y$ y $\mathscr{C}$ una colección de subconjuntos de Y. Entonces $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$.*

Demostración. De $f^{-1}(\mathscr{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$ y del lema 5.3 se sigue que $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$. Para probar la otra contención defínase la colección $\mathscr{B} = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))\}$, es inmediato que $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$. Del lema 5.2 se sigue que $\mathscr{B}$ es una σ-álgebra, luego $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{B}$. De la definición de $\mathscr{B}$ obtenemos que $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$. ∎

La utilidad del resultado precedente radica en la siguiente observación. Sean $(X, \mathscr{A})$ y $(Y, \mathscr{B})$ dos espacios medibles tal que $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{C})$. Para ver que una función $f : X \to Y$ es $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$ medible basta mostar que $f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}$.

Un ejemplo concreto es el siguiente. Sean (X, d_1) y (Y, d_2) dos espacios métricos con topologías τ_1 y τ_2, respectivamente (véase la página 8). Si $f : X \to Y$ es continua, entonces $f^{-1}(\tau_2) \subset \tau_1$, por lo tanto f es $\sigma(\tau_1)$-$\sigma(\tau_2)$ medible. De esta forma obtenemos que toda función continua es $\sigma(\tau_1)$-$\sigma(\tau_2)$ medible.

Otra aplicasión del lema 5.4 es en la caracterización de funciones reales medibles que se estudia en las siguiente sección.

Problemas

Problema 91 *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y (f_n) una sucesión de funciones medibles de X a un espacio métrico separable y completo Y. Probar que el conjunto de puntos en los que la sucesión (f_n) es convergente es $\mathscr{A}$-medible.*

Problema 92 *Sean X, Y espacios métricos y $f : X \to Y$. Sea D_f el conjunto de discontinuidades de f, entonces $D_f \in \mathscr{B}(X)$, aunque f no sea medible.*

Problema 93 *Sea X un espacio métrico. Entonces $\mathscr{B}(X)$ es la menor σ-álgebra en X tal que todas las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ continuas y acotadas son medibles.*

Problema 94 *Sean $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$, $f : X \to (Y, \mathscr{B})$. Demostrar que $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) \cap f^{-1}(\mathscr{B}) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{C} \cap \mathscr{B}))$.*

5.2 Funciones reales medibles

Sea X un conjunto no vacío. Por una función real (extendida), definida en X, nos referiremos a una función de X a los números reales $\mathbb{R}$ (extendidos $\overline{\mathbb{R}}$).

Sean

$$\begin{aligned} M_r(X, \mathscr{A}) &= \{f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))\}, \\ M_r^+(X, \mathscr{A}) &= \{f \in M_r(X, \mathscr{A}) : f \geq 0\}. \end{aligned}$$

Si $f \in M_r(X, \mathscr{A})$ diremos que f es $\mathscr{A}$-medible, o simplemente medible y escribiremos $f : (X, \mathscr{A}) \to \mathbb{R}$. Por el lema 5.4 tenemos que $f \in M_r(X, \mathscr{A})$ si y sólo si $f^{-1}(\mathscr{C}((\alpha, +\infty))) \subset \mathscr{A}$, es decir, si para toda $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathscr{A}.$$

Lema 5.5 *Sean $f_i : (X, \mathscr{A}) \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., d$, y $\varphi : (\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)) \to \mathbb{R}$ funciones medibles, entonces $\psi : X \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = \varphi(f_1(x), ..., f_d(x))$ es $\mathscr{A}$-medible.*

Demostración. Definamos $h : X \to \mathbb{R}^d$, como $h(x) = (f_1(x), ..., f_d(x))$. Sea $U \subset \mathbb{R}^d$ abierto. Es claro que para cada $u \in U$ existen intervalos abiertos $I_i^u \subset \mathbb{R}$, $i = 1, ..., d$, tal que $u \in I_1^u \times \cdots \times I_d^u \subset U$, en consecuencia $U = \cup_{u \in U} I_1^u \times \cdots \times I_d^u$. Por el teorema 1.1 existe una colección numerable $\{I_1^{u_n} \times \cdots \times I_d^{u_n} : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $U = \cup_{n \in \mathbb{N}} I_1^{u_n} \times \cdots \times I_d^{u_n}$. Así,

$$\begin{aligned} h^{-1}(U) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h^{-1}(I_1^{u_n} \times \cdots \times I_d^{u_n}) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f_1^{-1}(I_1^{u_n}) \cap \cdots \cap f_d^{-1}(I_d^{u_n})) \in \mathscr{A}, \end{aligned}$$

es decir, $h^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)) = h^{-1}(\sigma(\tau)) \subset \mathscr{A}$. El resultado se sigue de que $\psi = \varphi \circ h$ y del lema 5.1. ■

Como aplicación del resultado anterior tenemos que si $f, g \in M_r(X, \mathscr{A})$, entonces

$$af, \; |f|, \; f^n, \; f \pm g \; \text{ y } \; fg,$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, son funciones $\mathscr{A}$-medibles. En efecto, basta tomar $\varphi(x) = ax$, $|x|$, x^n y $\varphi(x,y) = x \pm y$, xy, respectivamente.

Si $f, g : X \to \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}(f \vee g)(x) &= \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2},\\ (f \wedge g)(x) &= \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}.\end{aligned}$$

Del lema 5.5 tenemos que $f \vee g$ y $f \wedge g$ son medibles si f y g lo son. Si en particular $g \equiv 0$, se definen $f^+ = f \vee 0$ y $f^- = (-f) \vee 0$ y se llaman *parte positiva* y *parte negativa* de f, respectivamente. Se tiene que $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ y además

$$f^+ = \frac{|f|+f}{2} \ \text{ y } \ f^- = \frac{|f|-f}{2}.$$

Si $f : (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ f se llama *función Borel medible y si* $f : (\mathbb{R}, \mathscr{F}(\mathbb{R})^*) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ f se llama *función Lebesgue medible.* Nótese que toda función Borel medible es Lebesgue medible. El recíproco es falso (ver ejercicio 84).

Veamos ahora el caso de funciones con valores en los números reales extendidos. De la definición de la σ-álgebra $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ y del lema 5.4 tenemos que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ medible si y sólo si $f^{-1}(\{+\infty\})$, $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathscr{A}$ y $f^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) \subset \mathscr{A}$. Sean

$$\begin{aligned}M(X,\mathscr{A}) &= \{f : (X,\mathscr{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))\},\\ M^+(X,\mathscr{A}) &= \{f \in M(X,\mathscr{A}) : f \geq 0\}.\end{aligned}$$

Nótese que $M_r(X,\mathscr{A}) \subset M(X,\mathscr{A})$.

Lema 5.6 $f \in M(X,\mathscr{A})$ *si y sólo si alguna de las colecciones*

$$\begin{aligned}&f^{-1}(\mathscr{C}((\alpha,+\infty])), f^{-1}(\mathscr{C}([\alpha,+\infty])),\\ &f^{-1}(\mathscr{C}([-\infty,\alpha])), f^{-1}(\mathscr{C}([-\infty,\alpha))),\end{aligned}$$

está contenida en $\mathscr{A}$.

Demostración. Veamos un caso, los restantes se trabaja de manera similar. Basta notar que $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathscr{C}((\alpha,+\infty]))$ (ver el problema). En efecto,

$$(\alpha,+\infty] = (\alpha,+\infty) \cup \{+\infty\} \subset \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$$

implica $\sigma(\mathscr{C}((\alpha,+\infty])) \subset \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Por otra parte, es claro que

$$\sigma(\mathscr{C}((\alpha,+\infty))) \subset \sigma(\mathscr{C}((\alpha,+\infty])),$$

pues $(\alpha,+\infty) = (\alpha,+\infty] \backslash \{+\infty\}$, lo que implica

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathscr{C}((\alpha,+\infty])).$$

De lo cual es inmediato que $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathscr{C}((\alpha,+\infty]))$. ∎

Lema 5.7 *$f \in M(X,\mathscr{A})$ si y sólo si $f^{-1}(\{+\infty\})$, $f^{-1}(\{-\infty\})$ están en $\mathscr{A}$ y $f_r \in M_r(X,\mathscr{A})$, donde*

$$f_r(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \notin \{-\infty,+\infty\}, \\ 0, & f(x) \in \{-\infty,+\infty\}. \end{cases}$$

Demostración. Si $f \in M(X,\mathscr{A})$ la $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}(\mathbb{R})$ medibilidad de f_r se sigue de que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_r^{-1}((\alpha,+\infty)) &= \begin{cases} f_r^{-1}((\alpha,+\infty)), & \alpha \geq 0, \\ f_r^{-1}((\alpha,0)) \cup f_r^{-1}(\{0\}) \cup f_r^{-1}((0,+\infty)), & \alpha < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} f^{-1}((\alpha,+\infty)), & \alpha \geq 0, \\ f^{-1}(\{-\infty\}) \cup f^{-1}((\alpha,+\infty]), & \alpha < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Recíprocamente, sea $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & f^{-1}((\alpha,+\infty)) \\ &= \begin{cases} f^{-1}((\alpha,+\infty)), & \alpha \geq 0, \\ f^{-1}((\alpha,0)) \cup f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}((0,+\infty)), & \alpha < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_r^{-1}((\alpha,+\infty)), & \alpha \geq 0, \\ f_r^{-1}((\alpha,0)) \cup (f_r^{-1}(\{0\}) \backslash f^{-1}(\{-\infty,+\infty\})) \cup f_r^{-1}((0,+\infty)), & \alpha < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Lo que implica que $f^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) \subset \mathscr{A}$, ver el lema 5.6. ∎

Lema 5.8 *Sea $(f_n) \subset M(X,\mathscr{A})$ y defínanse las funciones*

$$f(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}, \quad g(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\},$$
$$f^*(x) = \liminf f_n(x), \quad g^*(x) = \limsup f_n(x).$$

Entonces f, g, $f^*, g^* \in M(X,\mathscr{A})$.

Demostración. Para demostrar que $f, g \in M(X,\mathscr{A})$, debido al lema 5.6, basta notar que

$$f^{-1}([\alpha,+\infty]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([\alpha,+\infty])$$

y

$$g^{-1}((\alpha,+\infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,+\infty]),$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Ya que

$$f^*(x) = \sup_{n\geq 1}\left\{\inf_{m\geq n} f_m(x)\right\} \;\text{ y }\; g^*(x) = \inf_{n\geq 1}\left\{\sup_{m\geq n} f_m(x)\right\},$$

entonces $f^*, g^* \in M(X,\mathscr{A})$. ∎

Corolario 5.1 *Sea $(f_n) \subset M(X, \mathscr{A})$ tal que (f_n) converge a f, entonces $f \in M(X, \mathscr{A})$.*

Demostración. Ya que $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, entonces el resultado se sigue del lema 5.8. ∎

Lema 5.9 *Sean $f, g \in M(X, \mathscr{A})$, entonces $|f|, fg, f1_{A^c} \pm g1_{A^c} \in M(X, \mathscr{A})$, donde $A = (f^{-1}(\{\pm\infty\}) \cap g^{-1}(\{\mp\infty\})) \bigcup (f^{-1}(\{\mp\infty\}) \cap g^{-1}(\{\pm\infty\}))$.*

Demostración. Para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ definamos las funciones *truncadas* $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$ como

$$f_n(x) = (f(x) \wedge n) \vee (-n) \;\text{ y }\; g_n(x) = (g(x) \wedge n) \vee (-n).$$

Puesto que

$$\begin{array}{rcl} f_n(x) & = & (f_r(x) \wedge n) \vee (-n) + n(1_{f^{-1}(\{+\infty\})} - 1_{f^{-1}(\{-\infty\})})(x), \\ g_n(x) & = & (g_r(x) \wedge n) \vee (-n) + n(1_{g^{-1}(\{+\infty\})} - 1_{g^{-1}(\{-\infty\})})(x), \end{array}$$

entonces $f_n, g_n \in M_r(X, \mathscr{A})$. Así, del lema 5.5 se sigue que $|f_n|, f_n g_n, f_n \pm g_n \in M_r(X, \mathscr{A}) \subset M(X, \mathscr{A})$. De

$$\begin{array}{rcl} |f|(x) & = & \lim\limits_{n\to\infty} |f_n|(x), \\ f(x)g(x) & = & \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)g_n(x), \\ f(x)1_{A^c}(x) \pm g(x)1_{A^c}(x) & = & \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)1_{A^c}(x) \pm \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)1_{A^c}(x) \\ & = & \lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x)1_{A^c}(x) \pm g_n(x)1_{A^c}(x)), \end{array}$$

tenemos por el corolario 5.1 que $|f|, fg, f1_{A^c} \pm g1_{A^c} \in M(X, \mathscr{A})$. ∎

Problemas

Problema 95 *Dar un ejemplo de una función f no medible tal que $|f|$ y f^2 sean medibles.*

Problema 96 *Demostrar que si $f^5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible, entonces $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible.*

Problema 97 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Mostrar que f' es Lebesgue medible.*

Problema 98 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $(X, \mathscr{A}_n)$ un espacio medible y $f_n : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathscr{A}_n$-medible. Supóngase que $\mathscr{A}_n \downarrow$ y $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Demostrar que f es $\cap_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$-medible.*

Problema 99 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona. Demostrar que f es medible.*

Problema 100 *Demostrar que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ medible si y sólo si $f^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathscr{A}$ para cada $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Problema 101 *Dar un ejemplo de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue medibles tal que $g \circ f$ no sea Lebesgue medible. Nótese que esto no contradice el lema 5.1.*

Problema 102 *Sean $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y $f, g : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Demostrar que*

$$\sup_{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})} \{\mu(f^{-1}(A)) - \mu(g^{-1}(A))\} \leq \mu((f-g)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})).$$

Problema 103 *Sea Ω un conjunto de funciones continuas definidas sobre $[0,1]$. Demostrar que las funciones*

$$\inf_{f \in \Omega} f(x) \ \ y \ \ \sup_{f \in \Omega} f(x),$$

son Lebesgue medibles.

Problema 104 *Demostrar que si Ω es un conjunto no contable de funciones Lebesgue medibles, definidas sobre $[0,1]$, entonces las funciones*

$$\inf_{f \in \Omega} f(x) \ \ y \ \ \sup_{f \in \Omega} f(x),$$

pueden no ser Lebesgue medibles.

5.3 Algunas propiedades de las funciones reales medibles

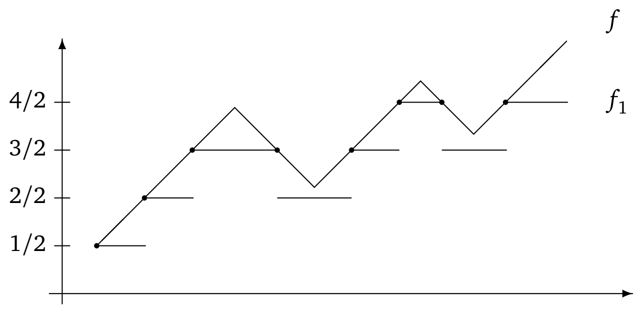
Una función real que toma un número finito de valores se llama *función simple*. Para esta clase de funciones se verá que es muy directa la definición de integral. De esta forma, el siguiente resultado que nos asegura la aproximación de una función medible por una función simple nos será de utilidad.

Lema 5.10 *Para cada $f \in M^+(X, \mathscr{A})$ defínanse*

$$f_n = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{4^n} 1_{f^{-1}([i/2^n, +\infty])}, \tag{5.1}$$

entonces
(i) cada $f_n \in M(X, \mathscr{A})$ y toma un número finito de valores.
(ii) $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, para cualesquiera $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ (es decir (f_n) es creciente y se denota por $f_n \uparrow$).
(iii) $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$, $x \in X$.
Si además f es acotada, entonces la convergencia de (f_n) a f es uniforme.

Una gráfica típica de f_1 tiene la forma:



Demostración del Lema 5.10. La afirmación (i) es inmediata (f_n toma a lo más 4^n+1 valores). La (ii) se sigue de

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{4^n} 2\times 1_{f^{-1}([2i/2^{n+1},+\infty])} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{i=1}^{4^n} 1_{f^{-1}([2i/2^{n+1},+\infty])}+\sum_{i=1}^{4^n} 1_{f^{-1}([i/2^{n},+\infty])}\right) \\ &\le \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{i=1}^{2\times 4^n} 1_{f^{-1}([2i/2^{n+1},+\infty])}+\sum_{i=1}^{2\times 4^n} 1_{f^{-1}([(2i-1)/2^{n+1},+\infty])}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i\in\{2,4,\dots,4^{n+1}\}\cup\{1,3,\dots,4^{n+1}-1\}} 1_{f^{-1}([i/2^{n+1},+\infty])} = f_{n+1}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $f^{-1}([(2i-1)/2^{n+1},+\infty])\supset f^{-1}([i/2^n,+\infty])$. (iii) Sea $x\in X$ tal que $0\le f(x)<+\infty$, en caso contrario el resultado es inmediato. Sea $\varepsilon>0$ y elijamos $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $2^{-n_0}<\varepsilon$. Sea n_1 un número natural tal que $2^{n_1}>2^{n_0}\vee f(x)$. Sea $n\ge n_1$. Puesto que $\{[(i-1)/2^n, i/2^n) : i=1,\dots,4^n\}$ es una partición $[0,2^n)$ y $0\le f(x)<2^n$, entonces existe $k\in\{1,\dots,4^n\}$ tal que $f(x)\in[(k-1)/2^n,k/2^n)$. Por ende

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{k-1}{2^n}-f(x)\right| < \frac{1}{2^n}\le\frac{1}{2^{n_1}}<\frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon.$$

Si f es acotada, entonces n_1 no depende de x, lo que implica la convergencia uniforme. ■

Lema 5.11 *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida completo y $f:X\to\mathbb{R}$ una función $\mathscr{A}$-medible. Si $g:X\to\mathbb{R}$ y $f=g$ μ-cdq, entonces g es medible.*

Demostración. Puesto que $f=g$ μ-cdq, entonces existe $N\in\mathscr{A}$ tal que $f(x)=g(x)$, para cada $x\in N^c$ y $\mu(N)=0$. Si $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$g^{-1}(A) = (g^{-1}(A)\cap N^c)\bigcup(g^{-1}(A)\cap N)$$

$$= \quad (f^{-1}(A)\cap N^c)\bigcup(g^{-1}(A)\cap N).$$

Ya que $\mu(g^{-1}(A)\cap N)\leq\mu(N)=0$, la completividad del espacio $(X,\mathscr{A},\mu)$ implica que $g^{-1}(A)\cap N\in\mathscr{A}$, así g es $\mathscr{A}$-medible. ■

Teorema 5.1 *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida y $(X,\widetilde{\mathscr{A}},\widetilde{\mu})$ su completación. Sea $f:(X,\widetilde{\mathscr{A}})\to(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Entonces existe $g:(X,\mathscr{A})\to(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ tal que $|g|\leq|f|$ y $f=g$ μ-cdq.*

Demostración. Supongamos primero que f es no negativa. Sea (f_n) la sucesión de funciones $\widetilde{\mathscr{A}}$-medibles definidas en (5.1). Por definición de $\widetilde{\mathscr{A}}$ existen A_i^n, C_i^n en $\mathscr{A}$ tal que

$$f^{-1}\left(\left[\frac{i}{2^n},+\infty\right)\right)=A_i^n\cup N_i^n,\quad N_i^n\subset C_i^n \text{ y } \mu(C_i^n)=0,$$

para $i=1,\ldots,4^n$. Definamos la sucesión (g_n) por

$$g_n=\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{4^n}1_{A_i^n}.$$

Nótese que $g_n\leq f_n\leq f$. Sea $x\in X$ tal que $f_n(x)\neq g_n(x)$, entonces $k=\max\{i: x\in f^{-1}\left(\left[i2^{-n},+\infty\right)\right)\}\geq 1$ (si $k=1$, entonces $0\leq g_n(x)\leq f_n(x)=0$) y

$$\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{k}1_{A_i^n}(x)=g_n(x)<f_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{k}1_{f^{-1}([i/2^n,+\infty))}(x)=\frac{k}{2^n}.$$

Por lo tanto, existe al menos un $1\leq i\leq k$ tal que $x\in f^{-1}\left(\left[i2^{-n},+\infty\right)\right)\setminus A_i^n$. Así, $\{x: f_n(x)\neq g_n(x)\}\subset\cup_{i=1}^{4^n}(f^{-1}\left(\left[i2^{-n},+\infty\right)\right)\setminus A_i^n)\subset\cup_{i=1}^{4^n}C_i^n$. Lo que implica que, $f_n=g_n$ μ-cdq (ver la página 29). Sea $g=\limsup g_n$, entonces $g\leq f$ y $g=f$ en $\cap_{n=1}^{\infty}(f_n-g_n)^{-1}(\{0\})$. El caso general se sigue de descomponer la función f como $f=f^+-f^-$. ■

A continuación se demostrará una versión del teorema 2.4 para funciones.

Teorema 5.2 (Lema de Dynkin para funciones) *Sea $\mathscr{C}$ un π-sistema en X y $\mathscr{H}$ un espacio vectorial de funciones reales definidas en X que cumple:*
(i) $1_X\in\mathscr{H}$.
(ii) Si $A\in\mathscr{C}$, entonces $1_A\in\mathscr{H}$.
(iii) Si $(f_n)\subset\mathscr{H}$ es tal que $0\leq f_n\uparrow f:X\to\mathbb{R}$, entonces $f\in\mathscr{H}$.
Entonces $\mathscr{H}$ contiene a todas las funciones, $f:X\to\mathbb{R}$, que son $\sigma(\mathscr{C})$-medibles.

Demostración. Sea $\mathscr{L}=\{A\subset\sigma(\mathscr{C}): 1_A\in\mathscr{H}\}$. Usaremos la proposición 2.1 para mostrar que $\mathscr{L}$ es un d-sistema. $X\in\mathscr{L}$, pues $1_X\in\mathscr{H}$. Si $A,B\in\mathscr{L}$ y $A\subset B$, entonces $1_{B\setminus A}=1_B-1_A\in\mathscr{H}$, ya que $\mathscr{H}$ es un espacio vectorial. Si (A_n) es una sucesión creciente en $\mathscr{L}$, entonces $1_{A_n} \uparrow 1_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$, así $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{L}$. Puesto que $\mathscr{C} \subset \mathscr{L}$ tenemos por el teorema 2.4 que $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{L}$. Sea $f : X \to \mathbb{R}_+$ una función $\sigma(\mathscr{C})$-medible y sea (f_n) la sucesión definida en (5.1). Nótese que cada f_n es $\sigma(\mathscr{C})$-medible, entonces $(f_n) \subset \mathscr{H}$ y $0 \leq f_n \uparrow f$, así $f \in \mathscr{H}$. Para el caso general considérese la descomposición $f = f^+ - f^-$ y que $\mathscr{H}$ es un espacio vectorial. ■

Ahora se caracterizarán a las funciones $\sigma(f)$-medibles.

Teorema 5.3 (Doob) *Sea $(Y, \mathscr{B})$ un espacio medible, $f : X \to (Y, \mathscr{B})$ y $g : X \to \mathbb{R}$. Entonces g es $\sigma(f)$-medible si y sólo si existe $h : Y \to \mathbb{R}$, $\mathscr{B}$-medible tal que $g = h \circ f$.*

Demostración. La suficiencia es inmediata del lema 5.1, veamos la necesidad. Sea

$$\mathscr{H} = \{h \circ f : \; h : Y \to \mathbb{R}, \text{ es } \mathscr{B}\text{-medible}\}.$$

Claramente se ve que $\mathscr{H}$ es un espacio vectorial. Sea $A \in \sigma(f)$. Luego, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $A = f^{-1}(B)$. Entonces $1_A = 1_B \circ f \in \mathscr{H}$, en particular $1_X \in \mathscr{H}$. Sea $(h_n \circ f) \subset \mathscr{H}$ tal que $0 \leq h_n \circ f \uparrow k : X \to \mathbb{R}$. Debido a que $h(y) = \sup\{h_n(y) : n \in \mathbb{N}\}$ es $\mathscr{B}$-$\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ medible tenemos por el lema 5.7 que h_r es $\mathscr{B}$-$\mathscr{B}(\mathbb{R})$ medible. Si $x \in X$, entonces $h(f(x)) = k(x) \in \mathbb{R}$ por ende $h_r(f(x)) = k(x)$, es decir $k = h_r \circ f$, así $k \in \mathscr{H}$. Por lo tanto, el teorema 5.2 implica que $\mathscr{H}$ contiene a todas las funciones $\sigma(f)$-medibles. ■

Problemas

Problema 105 *Sean $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y $f \in M^+(X, \mathscr{A})$. Demostrar que*

$$f_n(x) = \frac{[2^n f(x)]}{2^n} \wedge n, \;\; x \in X, \; n \in \mathbb{N},$$

es una función simple medible y $0 \leq f_n \uparrow f$, donde $[\cdot]$ es la función mayor entero.

Problema 106 *Demostrar el teorema 5.1 procediendo de la siguiente forma: Para cada $\alpha \in \mathbb{Q}$, escribir $\{f > \alpha\} = A_\alpha \cup N_\alpha$, donde $A_\alpha \in \mathscr{A}$, $N_\alpha \subset B_\alpha \in \mathscr{A}$ y $\mu(B_\alpha) = 0$. Considerar $g = f 1_{\cap_{\alpha \in \mathbb{Q}} B_\alpha^c}$. Para verificar la medibilidad utilizar el ejercicio 100. ($\{f 1_{\cap_{\alpha \in \mathbb{Q}} B_\alpha^c} > r\} = A_r \cap (\cap_{\alpha \in \mathbb{Q}} B_\alpha^c) \in \mathscr{A}$, basta para racionales positivos y $\{f 1_{\cap_{\alpha \in \mathbb{Q}} B_\alpha^c} < r\} = A_r \cap (\cap_{\alpha \in \mathbb{Q}} B_\alpha^c)$ para racionales negativos.)*

Problema 107 *Sean X un conjunto no vacío, $\{(Y_\alpha, \mathscr{B}_\alpha) : \alpha \in I\}$ una colección de espacios medibles y $f_\alpha : X \to (Y_\alpha, \mathscr{B}_\alpha)$. Entonces definimos $\sigma(f_\alpha : \alpha \in I)$ como la mínima σ-álgebra con respecto a la cual todas las f_α son medibles.*
(i) Sea $\mathscr{G}$ una colección de subconjuntos de X. Entonces $\sigma(\mathscr{G}) = \sigma(1_A : A \in \mathscr{G})$.
(ii) Sea $\mathscr{G} = \cup_{\alpha \in I} f_\alpha^{-1}(\mathscr{B}_\alpha)$. Entonces $\sigma(f_\alpha : \alpha \in I) = \sigma(\mathscr{G})$.
(iii) Además, $\sigma(f_\alpha : \alpha \in I) = \cup_{J \subset I} \sigma(f_i : i \in J)$, donde J es numerable.

Chapter 6

Integral de Lebesgue

En este capítulo se asumirá que $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida fijo. A manera de introducción, supongamos que les asignamos diferentes "pesos" a los elementos del conjunto X, de tal modo que la asignación de pesos cumple que para cada $\alpha \geq 0$ el conjunto de los $x \in X$ con pesos mayores que α es un elemento de $\mathscr{A}$. Así, tenemos una función $f : X \to \mathbb{R}_+$ medible. Una característica de interés de f es conocer el "peso promedio" de los elementos de X. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}^d$ y a cada $x \in \mathbb{R}^d$ le asignamos peso uno, entonces el peso promedio de un conjunto $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ será su longitud ($d = 1$), área ($d = 2$) o volumen ($d \geq 3$). En lo que sigue se formalizará el concepto heurístico de peso promedio, el cual se llamará integral de Lebesgue, y se verán sus principales propiedades.

6.1 Definición de la integral

Definición 6.1 *Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se llama simple si toma un número finito de valores.*

Una función simple f puede representarse en la forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}, \tag{6.1}$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y $A_i \subset X$, $i = 1, \ldots, n$. Nótese que si A_i es medible para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces f es medible. El siguiente ejemplo nos muestra que una expresión de la forma (6.1) no es única:

$$4 \times 1_{[1,3)} + 6 \times 1_{[3,5]} = 4 \times 1_{[1,2]} + 2 \times 1_{(2,3]} + 2 \times 1_{(2,4]} + 2 \times 1_{\{3\}} + 4 \times 1_{(3,4]} + 6 \times 1_{(4,5]}.$$

Sin embargo, si $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son todos los valores, distintos, que toma una función simple f, entonces f se puede escribir como $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{f^{-1}(\{\alpha_i\})}$. A esta expresión de f se le conoce como *representación estándar* de f, y es única.

Definición 6.2 *Sea $f \in M^+(X, \mathscr{A})$ una función simple con representación (6.1), donde $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ y $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, \ldots, n$. Definimos la integral de f, con respecto a la medida μ, como el número real extendido*

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Aquí usamos las convenciones aritméticas dadas en la página 5.

Debido a que la representación (6.1) de una función simple no es única es necesario mostrar que la integral está bien definida. Esto se sigue del:

Lema 6.1 (Consistencia) *Supongamos que*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i} \leq \sum_{j=1}^{m} \beta_j 1_{B_j},$$

donde $\alpha_i, \beta_j \geq 0$ y $A_i, B_j \in \mathscr{A}$, para $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \leq \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j).$$

Demostración. Primeramente, consideraremos el caso en que las colecciones $(A_i)_{i=1}^n, (B_j)_{j=1}^m$ son colecciones ajenas. No perdemos generalidad si suponemos que $\alpha_i, \beta_j > 0$. Bajo esta suposición se obtiene que $\cup_{i=1}^n A_i \subset \cup_{j=1}^m B_j$. Así

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i: A_i \cap B_j \neq \varnothing} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i: A_i \cap B_j \neq \varnothing} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j).
\end{aligned}$$

El caso general quedará demostrado si podemos expresar

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^{q} \gamma_j 1_{C_j},$$

donde $(C_j)_{j=1}^q$ es una colección ajena y

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^q \gamma_j \mu(C_j).$$

Procederemos por inducción sobre n. Para $n = 2$, es claro. Supongamos el resultado cierto para $n-1$ y veámoslo para n. Por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i} &= \sum_{j=1}^q \gamma_j 1_{C_j} + \alpha_n 1_{A_n} \\
&= \sum_{j=1}^q \gamma_j 1_{C_j \setminus A_n} + \sum_{j=1}^q (\gamma_j + \alpha_n) 1_{C_j \cap A_n} + \alpha_n 1_{A_n \setminus (\cup_{j=1}^q C_j)},
\end{aligned}$$

y además,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) &= \sum_{j=1}^q \gamma_j \mu(C_j) + \alpha_n \mu(A_n) \\
&= \sum_{j=1}^q \gamma_j \mu((C_j \setminus A_n) \cup (C_j \cap A_n)) \\
&\quad + \alpha_n \mu\left(\left(A_n \cap \left(\bigcup_{j=1}^q C_j \right) \right) \cup \left(A_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^q C_j \right) \right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^q \gamma_j \mu(C_j \setminus A_n) + \sum_{j=1}^q \gamma_j \mu(C_j \cap A_n) \\
&\quad + \alpha_n \sum_{j=1}^q \mu(C_j \cap A_n) + \alpha_n \mu\left(A_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^q C_j \right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^q \gamma_j \mu(C_j \setminus A_n) + \sum_{j=1}^q (\gamma_j + \alpha_n) \mu(C_j \cap A_n) \\
&\quad + \alpha_n \mu\left(A_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^q C_j \right) \right).
\end{aligned}$$

Como se quería demostrar. ■

Si $f \in M^+(X, \mathscr{A})$ es simple y E es un conjunto medible definimos la *integral de f sobre E con respecto a μ* como el número real extendido

$$\int_E f \, d\mu = \int f 1_E \, d\mu. \tag{6.2}$$

En los siguientes resultados se dan algunas propiedades de la integral de funciones simples no negativas.

Lema 6.2 *Sean $f, g \in M^+(X, \mathscr{A})$ funciones simples.*
(i) *Si $\alpha, \beta \geq 0$, entonces*

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

(ii) *Si $f \leq g$, entonces*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

(iii) *Si $\mu(E) = 0$, entonces*

$$\int_E f d\mu = 0.$$

Demostración. (i) : Supongamos que

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i} \ \text{ y } \ g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j 1_{B_j}.$$

Entonces

$$\alpha f + \beta g = \sum_{k=1}^{n+m} \gamma_k 1_{C_k}$$

donde $\gamma_k = \alpha \alpha_k$, $C_k = A_k$, $k = 1, \ldots, n$ y $\gamma_k = \beta \beta_{k-n}$, $C_k = B_{k-n}$, $k = n+1, \ldots, n+m$. Así, la linealidad de la integral se sigue de su definición.

(ii) : Esta afirmación es consecuencia inmediata del lema 6.1.

(iii) : Notemos que $f 1_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i \cup E}$, entonces

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cup E) = 0,$$

puesto que $\mu(A_i \cup E) \leq \mu(E) = 0$, $i = 1, \ldots n$. ∎

A continuación extenderemos el concepto de integral a funciones medibles no negativas. Para tales funciones la integral siempre estará definida y puede ocurrir que $\int f d\mu = +\infty$.

Definición 6.3 *Sea $f \in M^+(X, \mathscr{A})$ y (f_n) una sucesión de funciones simples medibles (ver el lema 5.10) tal que $0 \leq f_n \uparrow f$. Definimos la integral de f con respecto a μ como el número real extendido*

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

El hecho que $\int f d\mu$ no dependa de la sucesión que aproxima a f se sigue del:

Lema 6.3 (Consistencia) *Sean* $f \in M^+(X, \mathscr{A})$, (f_n) *una sucesión de funciones simples medibles,* $0 \le f_n \uparrow f$, *y* g *una función simple medible,* $0 \le g \le f$. *Entonces*

$$\int g d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Demostración. Sean $\{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ los valores de g, distintos de cero, y $\varepsilon > 0$. Puesto que

$$\sum_{i=1}^{m} (\alpha_i - \varepsilon)^+ 1_{g^{-1}(\{\alpha_i\}) \cap f_n^{-1}((\alpha_i - \varepsilon, +\infty])} \le f_n,$$

entonces del lema 6.2 (ii)

$$\sum_{i=1}^{m} (\alpha_i - \varepsilon)^+ \mu\left(g^{-1}(\{\alpha_i\}) \cap f_n^{-1}((\alpha_i - \varepsilon, +\infty])\right) \le \int f_n d\mu. \tag{6.3}$$

Tomando el límite, cuando $n \to \infty$, en (6.3) y usando el hecho que $g^{-1}(\{\alpha_i\}) \cap f_n^{-1}((\alpha_i - \varepsilon, +\infty]) \uparrow g^{-1}(\{\alpha_i\}) \cap f^{-1}((\alpha_i - \varepsilon, +\infty]) = g^{-1}(\{\alpha_i\})$, resulta

$$\sum_{i=1}^{m} (\alpha_i - \varepsilon)^+ \mu\left(g^{-1}(\{\alpha_i\})\right) \le \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

La afirmación se obtiene haciendo $\varepsilon \downarrow 0$ en la desigualdad precedente. ∎

Usualmente $\int f d\mu$ se denota también por

$$\int_X f d\mu, \quad \int_X f(x) d\mu(x), \quad \int_X f(x) \mu(dx).$$

En el caso en que μ sea la medida de Lebesgue λ la integral $\int f d\lambda$ se denota en ocasiones por $\int f(x)dx$ o $\int f$.

Proposición 6.1 *Si* $f \in M^+(X, \mathscr{A})$, *entonces*

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int \varphi d\mu : \varphi \textit{ es una función simple, medible y } 0 \le \varphi \le f\right\}.$$

Demostración. Sea $0 \le g \le f$ una función simple medible y (f_n) una sucesión de funciones simples medibles, $0 \le f_n \uparrow f$. Del lema 6.3 resulta

$$\int g d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Así,

$$\sup\left\{\int \varphi d\mu : \varphi \text{ es una función simple, medible y } 0 \le \varphi \le f\right\} \le \int f d\mu. \tag{6.4}$$

Por otra parte,

$$\int f_n d\mu \le \sup\left\{\int \varphi d\mu : \varphi \text{ es una función simple, medible y } 0 \le \varphi \le f\right\}.$$

Haciendo $n \to \infty$ obtenemos la desigualdad contraria a (6.4). ■

Si $f \in M^+(X, \mathscr{A})$ y E es un conjunto medible definimos la *integral de f sobre E con respecto a μ* como el número real extendido definido en (6.2).

Lema 6.4 *Sean $f, g \in M^+(X, \mathscr{A})$.*
(i) Si $\alpha, \beta \ge 0$, entonces

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

(ii) Si $f \le g$, entonces

$$\int f d\mu \le \int g d\mu.$$

(iii) Si $\mu(E) = 0$, entonces

$$\int_E f d\mu = 0.$$

Demostración. (i) : Por el lema 5.10 existen sucesiones crecientes de funciones simples (f_n) y (g_n) en $M^+(X, \mathscr{A})$ tal que convergen a f y a g, respectivamente. Esto implica que la sucesión $(\alpha f_n + \beta g_n)$ está en $M^+(X, \mathscr{A})$ y $\alpha f_n + \beta g_n \uparrow \alpha f + g\beta$. Así, del lema 6.2 resulta que

$$\begin{aligned} \int (\alpha f + \beta g) d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int (\alpha f_n + \beta g_n) d\mu \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu + \beta \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu. \end{aligned}$$

(ii) : Si φ es una función simple tal que $0 \le \varphi \le f$, entonces $0 \le \varphi \le g$. Lo que implica que $\int \varphi d\mu \le \int g d\mu$, por la proposición 6.1. Por ser φ arbitraria obtenemos que (ii) es cierta, por la proposición 6.1.

(iii) : Es claso que $(f_n 1_E)$ es una sucesión de funciones simples no decrecientes que converge a $f 1_E$. El resultado es consecuencia del lema (iii) anterior y de la definición de la integral. ■

Lema 6.5 (Desigualdad de Chebyshev) *Sean $f \in M^+(X, \mathscr{A})$ y $0 < p < +\infty$, entonces*

$$\mu(f^{-1}([r, +\infty])) \le \frac{1}{r^p} \int_{f^{-1}([r,+\infty])} f^p d\mu \le \frac{1}{r^p} \int f^p d\mu, \tag{6.5}$$

para toda $r > 0$. Cuando $p = 1$ la desigualdad se llama de Markov .

Demostración. La desigualdad es consecuencia de

$$r^p 1_{f^{-1}([r,+\infty])} \leq 1_{f^{-1}([r,+\infty])} f^p \leq f^p$$

y del lema 6.4. ∎

Problema

Problema 108 *Sean f y g dos funciones simples. Demostrar que $f \pm g$ y fg son funciones simples. Más aún, encontrar su representación estándar.*

6.2 Teorema de la convergencia monótona y sus consecuencias

Muchas de las propiedades de convergencia de la integral se basan en el siguiente hecho.

Teorema 6.1 (Convergencia monótona de Levi) *Sea (f_n) una sucesión en $M^+(X, \mathscr{A})$ tal que $f_n \uparrow f$ puntualmente, entonces*

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $(g_{n,k})_k$ de funciones simples medibles, $0 \leq g_{n,k} \uparrow f_n$, cuando $k \to \infty$. La sucesión $(h_{n,k})$, definida por $h_{n,k} = g_{1,k} \vee \cdots \vee g_{n,k}$, es una sucesión de funciones simples medibles no decreciente en ambos índices. En efecto,

$$h_{n,k} = g_{1,k} \vee \cdots \vee g_{n,k} \leq g_{1,k} \vee \cdots \vee g_{n,k} \vee g_{n+1,k} = h_{n+1,k},$$
$$h_{n,k} = g_{1,k} \vee \cdots \vee g_{n,k} \leq g_{1,k+1} \vee \cdots \vee g_{n,k+1} = h_{n,k+1},$$

de lo cual se sigue que $h_{k,k} \leq h_{k+1,k} \leq h_{k+1,k+1}$. Además, de

$$\begin{aligned} f &= \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} (f_1 \vee \cdots \vee f_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\lim_{k\to\infty} g_{1,k} \vee \cdots \vee \lim_{k\to\infty} g_{n,k}) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} (g_{1,k} \vee \cdots \vee g_{n,k}) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} h_{n,k} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} h_{(n\vee k),(n\vee k)} = \lim_{k\to\infty} h_{k,k} \leq f, \end{aligned}$$

resulta que $h_{k,k} \uparrow f$. De la definición de la integral y del lema 6.4 (ii) obtenemos

$$\int f\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int h_{k,k} d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int f_k d\mu \leq \int f\, d\mu. \tag{6.6}$$

Como se quería demostrar. ∎

A continuación se presentan algunas aplicaciones del teorema de la convergencia monótona.

Corolario 6.1 *Sea (f_n) una sucesión en $M^+(X,\mathscr{A})$, entonces*

$$\int\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int f_n d\mu\right).$$

Demostración. Considere la sucesión monótona creciente de sumas parciales (g_m), $g_m = \sum_{i=1}^{m} f_i$. Así, el resultado es consecuencia del teorema de la convergencia monótona. ■

Corolario 6.2 *Sea $f \in M^+(X,\mathscr{A})$, entonces*

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu,\ E \in \mathscr{A},$$

es una medida en $\mathscr{A}$. La medida ν la denotaremos por $d\nu = f\, d\mu$.

Demostración. Sea (E_n) una sucesión ajena en $\mathscr{A}$,

$$f\,1_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} = \lim_{n\to\infty} f\,1_{\cup_{i=1}^{n} E_i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\,1_{E_i} = \sum_{n=1}^{\infty} f\,1_{E_n}.$$

Así, el resultado se sigue del corolario 6.1. ■

Corolario 6.3 *Sea $f \in M^+(X,\mathscr{A})$.*
(i) $\int f\, d\mu = 0$ *si y sólo si* $f = 0$ *μ-cdq.*
(ii) *Si* $\int f\, d\mu < +\infty$, *entonces* $f < +\infty$ *μ-cdq.*

Demostración. (i) : La desigualdad de Markov implica que

$$\mu\big(f^{-1}((0,+\infty])\big) = \lim_{n\to\infty}\mu(f^{-1}([1/n,+\infty])) \leq \lim_{n\to\infty} n\int f\, d\mu = 0.$$

Por lo tanto, $f = 0$ μ-cdq.

Recíprocamente, si $f = 0$ μ-cdq, entonces $\mu(\{x : f(x) \neq 0\}) = 0$. El lemma (iii) implica

$$\int f\, d\mu = \int_{\{x:f(x)=0\}} f\, d\mu + \int_{\{x:f(x)\neq 0\}} f\, d\mu = 0.$$

(ii) : Por ser $\big(f^{-1}([n,+\infty])\big)_n$ una sucesión decreciente de (3.6) resulta

$$\mu\big(f^{-1}(\{+\infty\})\big) \leq \lim_{n\to\infty}\mu\big(f^{-1}([n,+\infty])\big) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int f\, d\mu = 0.$$

En consecuencia, $f < +\infty$ μ-cdq. ■

Cuando no hay monotonía en la sucesión (f_n) el siguiente resultado suele ser útil.

Lema 6.6 (Fatou) *Si* (f_n) *es una sucesión en* $M^+(X, \mathscr{A})$*, entonces*

$$\int \liminf(f_n) d\mu \leq \liminf\left(\int f_n d\mu\right).$$

Demostración. Definamos la sucesión (g_m) por $g_m = \inf\{f_n : n \geq m\}$. Nótese que g_m es medible, lema 5.8, y $g_m \leq f_n$ si $n \geq m$. La monotonía de la integral implica que

$$\int g_m d\mu \leq \inf\left\{\int f_n d\mu : n \geq m\right\},$$

por lo tanto

$$\int g_m d\mu \leq \liminf\left(\int f_n d\mu\right).$$

Por otra parte, puesto que $g_m \uparrow \liminf(f_n)$, del teorema de la convergencia monótona resulta que

$$\int \liminf(f_n) d\mu = \lim_{m\to\infty} \int g_m d\mu \leq \liminf\left(\int f_n d\mu\right).$$

Así, el resultado queda demostrado. ■

En los ejercicios, donde sea conveniente, se puede suponer que la integral de Riemann coincide con la integral de Lebesgue, ésto se verá en el teorema 6.6.

Problemas

Problema 109 *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio de medida y* $f \in M^+(X, \mathscr{A})$ *tal que* $\mu(\{x : f(x) > 0\}) > 0$*. Demostrar que* $\int f d\mu > 0$.

Problema 110 *Suponga que* $f_n \in M^+(X, \mathscr{A})$ *y* $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = 0$*. Demostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} \int \left(1 - e^{-f_n}\right) d\mu = 0.$$

Problema 111 *Sea* $\nu(E) = \int_E f d\mu$*, donde* $E \in \mathscr{A}$ *y* $f \in M^+(X, \mathscr{A})$*. Mostrar que* $\int g d\nu = \int f g d\mu$ *para toda función medible* $g \geq 0$.

Problema 112 *Evaluar* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{-1}$ *usando la integral* $\int_0^1 (1+x)^{-1} dx$ *y el teorema de la convergencia monótona.*

6.3 Funciones integrables

Recordemos que por $M_r(X,\mathscr{A})$ denotamos al conjunto de todas las funciones medibles definidas en X con valores en los números reales.

Definición 6.4 *Una función $f \in M_r(X,\mathscr{A})$ se dice integrable con respecto a μ si $\int f^+ d\mu < +\infty$ y $\int f^- d\mu < +\infty$. La integral de f, con respecto a μ, es el número real*

$$\int f\,d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

El conjunto de todas las funciones en $M_r(X,\mathscr{A})$ integrables, con respecto a μ, se denotará por $\mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$.

Sean $f \in M_r(X,\mathscr{A})$ y $E \in \mathscr{A}$, tal que $f 1_E \in \mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$. Definimos la integral de f en E con respecto a μ como el número real definido en (6.2).

Lema 6.7 *Sea $f \in M_r(X,\mathscr{A})$.*
(i) $f \in \mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$ si y sólo si $|f| \in \mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$. Además

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu.$$

(ii) Sea $g \in \mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$ tal que $|f| \leq g$, entonces $f \in \mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$.

Demostración. (i) : Puesto que $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$ la primera afirmación es inmediata. La segunda parte se sigue de que

$$\begin{aligned}\left|\int f\,d\mu\right| &= \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| \\ &\leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f|\,d\mu.\end{aligned}$$

(ii) : Por la primera parte basta mostrar que $|f| \in \mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$. Pero esto se sigue de la monotonía de la integral, $\int |f| d\mu \leq \int g\,d\mu < +\infty$. ∎

Teorema 6.2 *Sean $f, g \in \mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$.*
(i)Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$ y

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f\,d\mu + \beta \int g\,d\mu.$$

(ii) Si $f \leq g$, entonces

$$\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu.$$

(iii) Si $\mu(E) = 0$, entonces

$$\int_E f \, d\mu = 0.$$

Demostración. (i) : Del lema 6.7 se sigue que $|f|, |g| \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$. Además del lema 6.2 resulta, $\int |\alpha f + \beta g| d\mu \leq \int |\alpha f| d\mu + \int |\beta g| d\mu = |\alpha| \int |f| d\mu + |\beta| \int |g| d\mu < +\infty$. Entonces $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$. Para demostrar la segunda afirmación primeramente notemos que

$$(\alpha f)^+ = \begin{cases} \alpha f^+, & \alpha \geq 0, \\ -\alpha f^-, & \alpha < 0, \end{cases} \qquad (\alpha f)^- = \begin{cases} \alpha f^-, & \alpha \geq 0, \\ -\alpha f^+, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Así

$$\begin{aligned} \int \alpha f \, d\mu &= \int (\alpha f)^+ \, d\mu - \int (\alpha f)^- \, d\mu \\ &= \begin{cases} \int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu, & \alpha \geq 0 \\ \int (-\alpha f^-) d\mu - \int \left(-\alpha f^+\right) d\mu, & \alpha < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu), & \alpha \geq 0 \\ -\alpha(\int f^- d\mu - \int f^+ d\mu), & \alpha < 0 \end{cases} = \alpha \int f \, d\mu. \end{aligned}$$

De igual forma se demuestra que $\int \beta g d\mu = \beta \int g d\mu$. Ya que

$$(\alpha f + \beta g)^+ - (\alpha f + \beta g)^- = \alpha f + \beta g = \left((\alpha f)^+ + (\beta g)^+\right) - \left((\alpha f)^- + (\beta g)^-\right),$$

concluimos, $(\alpha f + \beta g)^+ + (\alpha f)^- + (\beta g)^- = (\alpha f)^+ + (\beta g)^+ + (\alpha f + \beta g)^-$. Así

$$\begin{aligned} &\int (\alpha f + \beta g)^+ \, d\mu + \int (\alpha f)^- d\mu + \int (\beta g)^- d\mu \\ &= \int (\alpha f)^+ d\mu + \int (\beta g)^+ d\mu + \int (\alpha f + \beta g)^- \, d\mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int (\alpha f + \beta g) \, d\mu &= \int (\alpha f + \beta g)^+ \, d\mu - \int (\alpha f + \beta g)^- \, d\mu \\ &= \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu + \int (\beta g)^+ d\mu - \int (\beta g)^- d\mu \\ &= \int \alpha f \, d\mu + \int \beta g d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g d\mu. \end{aligned}$$

(ii) : Puesto que $0 \leq g - f$, entonces $0 \leq \int (g - f) \, d\mu = \int g d\mu - \int f \, d\mu$.

(iii) : Puesto que $f 1_E = (f 1_E)^+ - (f 1_E)^- = 1_E f^+ - 1_E f^-$, el resultado se sigue el lema (iii). ∎

Corolario 6.4 *Sean $f, g \in M_r(X, \mathscr{A})$.*
(i) Si $f = g$ μ-cdq y $g \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$, entonces $f \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$ para toda $A \in \mathscr{A}$.
(ii) Si $f, g \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$ para toda $A \in \mathscr{A}$, entonces $f = g$ μ-cdq.

Demostración. (i) : Sean $B = (f-g)^{-1}(\{0\}) \in \mathscr{A}$ y $A \in \mathscr{A}$. Del teorema anterior (iii) deducimos

$$\int_A (f-g)d\mu = \int_{A\cap B} (f-g)d\mu + \int_{A\cap B^c} (f-g)d\mu = 0.$$

(ii) : Nótese que

$$\int_{(f-g)^{-1}((0,+\infty))} f\,d\mu = \int_{(f-g)^{-1}((0,+\infty))} g\,d\mu < +\infty,$$

por lo tanto,

$$\int 1_{(f-g)^{-1}((0,+\infty))}(f-g)\,d\mu = 0,$$

lo que implica que $1_{(f-g)^{-1}((0,+\infty))}(f-g) = 0$ μ-cdq. Puesto que

$$(f-g)^{-1}((0,+\infty)) \subset \{x \in X : 1_{(f-g)^{-1}((0,+\infty))}(f-g)(x) \neq 0\}$$

entonces $\mu\big((f-g)^{-1}((0,+\infty))\big) = 0$. Es decir, $g \geq f$ μ-cdq. De forma similar se ve que $g \leq f$ μ-cdq. ■

Problemas

Problema 113 *Sean μ y ν medidas finitas en $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ tal que $\int f\,d\mu = \int f\,d\nu$ para toda función continua y acotada f. Demostrar que $\mu = \nu$.*

Problema 114 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito y $f, g \in M_r(X, \mathscr{A})$. Si $\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$ para toda $A \in \mathscr{A}$, entonces $f = g$ μ-cdq. (Ayuda, aplicar el teorema 3.3).*

Problema 115 *Sean $f \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $\varepsilon > 0$. Demostrar que existe una función simple medible φ tal que*

$$\int |f - \varphi|\,d\mu < \varepsilon.$$

Problema 116 *Si $f \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ demostrar que no se sigue en general que $f^2 \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$.*

Problema 117 *Sea (f_n) una sucesión en $M^+(X,\mathscr{A})$ tal que $f_n \downarrow f$, y $\int f_1 d\mu < +\infty$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$.*

Problema 118 *Sea (f_n) una sucesión en $M_r(X,\mathscr{A})$ tal que $\int_A \sup\{|f_n| : n \in \mathbb{N}\} d\mu < +\infty$, con $A \in \mathscr{A}$. Demostrar que $\int_A \limsup(f_n) d\mu \geq \limsup(\int_A f_n d\mu)$.*

Problema 119 *Sean $h, g \in \mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$ y f una función medible tal que $h \leq f \leq g$. Demostrar que $f \in \mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$.*

Problema 120 *Sea f una función definida en X con valores en los números complejos. Si $Re(f)$, $Im(f) \in \mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$ decimos que f es integrable y definimos*

$$\int f d\mu = \int Re(f) d\mu + i \int Im(f) d\mu.$$

Demostrar que f es integrable si y sólo si $|f|$ es integrable, en cuyo caso

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Problema 121 *Sea $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Demostrar que la función $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$g(t) = \sup\left\{ \int |f(x+y) - f(x)| \, d\lambda(x) : |y| \leq t \right\}$$

es continua en $t = 0$.

Problema 122 *Sea g una función medible tal que $\left|\int gf d\mu\right| < +\infty$, para toda función integrable f. Demostrar que g es acotada μ-cdq si μ es σ-finita. El resultado es falso si μ no es σ-finita.*

Problema 123 *Sea $f \in \mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(f,\varepsilon) > 0$ tal que para todo $E \in \mathscr{A}$ que cumple $\mu(E) < \delta$, se tiene*

$$\int_E |f| d\mu < \varepsilon.$$

Problema 124 *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de probabilidad y f una función real medible. Demostrar que existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(f^{-1}((-\infty,m])) \geq 1/2$ y $\mu(f^{-1}([m,+\infty))) \geq 1/2$. (m se llama mediana.) ¿Cuándo es m única?.*

Problema 125 *Sea $f \in \mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$. Demostrar que existe una función $h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ creciente, tal que $\lim_{x\to\infty} h(x) = +\infty$ y $\int |f(x) h(|f(x)|)| \mu(dx) < +\infty$.*

6.4 Teorema de la convergencia dominada

El siguiente resultado junto con el teorema de la convergencia monótona forman parte de las propiedades más importantes que tiene la integral de Lebesgue.

Teorema 6.3 (Convergencia dominada de Lebesgue) *Sean* $(f_n) \subset M_r(X, \mathscr{A})$ *y* $(g_n) \subset \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *sucesiones que convergen a* f *y a* g*, respectivamente. Si* $|f_n| \leq g_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, y* $\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \int g d\mu < +\infty$*, entonces* $f \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

En particular,

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Demostración. La medibilidad de f es inmediata y la integrabilidad se sigue de que

$$|f| = \lim_{n\to\infty} |f_n| \leq \lim_{n\to\infty} g_n = g.$$

Aplicando el lema de Fatou a la sucesión no negativa $(g + g_n - |f - f_n|)_n$ resulta que

$$\int \liminf (g + g_n - |f - f_n|) d\mu \leq \liminf \int (g + g_n - |f - f_n|) \, d\mu.$$

Así,

$$\int (2g - \limsup (|f - f_n|)) \, d\mu \leq 2 \int g \, d\mu - \limsup \left(\int |f - f_n| \, d\mu \right),$$

por lo tanto,

$$\limsup \left(\int |f - f_n| \, d\mu \right) \leq \int \limsup (|f - f_n|) \, d\mu = 0.$$

La última afirmación se sigue de que

$$\limsup \left(\left| \int f \, d\mu - \int f_n d\mu \right| \right) \leq \limsup \left(\int |f - f_n| \, d\mu \right).$$

Como se quería demostrar. ∎

Teorema 6.4 (Lieb) *Sea* (f_n) *una sucesión en* $\mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *que converge a* $f \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int |f_n| \, d\mu - \int |f| \, d\mu - \int |f_n - f| \, d\mu \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int ||f_n| - |f| - |f_n - f|| \, d\mu = 0. \tag{6.7}$$

Si además

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n| \, d\mu = \int |f| \, d\mu,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| \, d\mu = 0. \tag{6.8}$$

Demostración. Debido a que

$$\left| \int |f_n| \, d\mu - \int |f| \, d\mu - \int |f_n - f| \, d\mu \right| \leq \int ||f_n| - |f| - |f_n - f|| \, d\mu,$$

entonces basta verificar la segunda igualdad en (6.7). Nótese que $\lim_{n\to\infty} ||f_n| - |f| - |f_n - f|| = 0$. Usando la desigualdad del triángulo y que $||a| - |b|| \leq |a - b|$, $a, b \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$\begin{aligned} ||f_n| - |f| - |f_n - f|| &\leq ||f_n| - |f_n - f|| + |f| \\ &\leq |f_n - (f_n - f)| + |f| = 2|f|. \end{aligned}$$

Así, (6.7) se sigue del teorema de la convergencia dominada. Por otra parte, de la desigualdad

$$\begin{aligned} \int |f - f_n| \, d\mu &\leq \left| \int |f - f_n| \, d\mu + \int |f| \, d\mu - \int |f_n| \, d\mu \right| \\ &\quad + \left| \int |f_n| \, d\mu - \int |f| \, d\mu \right|, \end{aligned}$$

se sigue el límite (6.8). ■

Problemas

Problema 126 *Sean* (h_n), (f_n) *y* (g_n) *sucesiones en* $\mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *que convergen a* h, f *y* g, *respectivamente. Si* $h_n \leq f_n \leq g_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \int h_n d\mu = \int h d\mu$ *y* $\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \int g d\mu$ *demostrar que* $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

Problema 127 *Sea* $f \in \mathscr{L}([a,b], \mathscr{F}([a,b])^*, \lambda)$. *Demostrar que*

$$\lim_{h\downarrow 0} \int_{[a,b-h]} [f(x+h) - f(x)] \lambda(dx) = 0.$$

Problema 128 (Lema de Scheffé) *Sea* (f_n) *una sucesión en* $\mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *que converge a* $f \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$. *Demostrar que si* $f_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, *y* $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$.

Problema 129 *Sea* $f \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *tal que* $\int_E f\, d\mu \leq M < +\infty$ *siempre que* $\mu(E) < +\infty$. *Demostrar que* $\int f\, d\mu \leq M$.

Problema 130 *Sea* (f_n) *una sucesión en* $\mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *tal que* $0 \leq f_n \leq 1$, $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$ *y para algún* $E \in \mathscr{A}$ *de medida finita,* $f_n(x) = 1$, *para cualesquiera* $n \in \mathbb{N}$ *y* $x \in E^c$. *Demostrar que* $\lim_{n\to\infty} \int (1 - f_n) d\mu = 0$.

Problema 131 *Sea* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, *continua. Demostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{[0,1]} f(x) \exp(-nx) dx = f(0).$$

Problema 132 *Cálcular el límite*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} dx.$$

Problema 133 *Sean* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua,* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *y* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $|\psi(x)| \leq a + b|x|^k$ *para toda* $x \in \mathbb{R}$. *Hallar*
(i) $\lim_{n\to\infty} \int_{[1/n,+\infty)} \psi(x) \exp(-nx^2) dx$,
(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty)} \psi(x) \exp(-nx^2) dx$.

Problema 134 *Demostrar las siguientes convergencias:*
(i) $\int_{[1,+\infty)} \exp(-t) \log(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} [1 - (t/n)]^n \log(t) dt$,
(ii) $\int_{[0,1]} \exp(-t) \log(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} [1 - (t/n)]^n \log(t) dt$.

Problema 135 *Sea* (f_n) *una sucesión en* $\mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|\, d\mu < +\infty.$$

Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge casi donde quiera a una función* $f \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *y*

$$\int f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Problema 136 *Sea* $f : X \to \mathbb{R}$ *medible. Si* $f \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *demostrar que*

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int ((f \wedge n) \vee (-n))\, d\mu.$$

Recíprocamente, si

$$\sup\left\{\int |((f \wedge n) \vee (-n))|\, d\mu : n \in \mathbb{N}\right\} < +\infty$$

demostrar que $f \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$.

Problema 137 *Suponga que* $(f_n) \subset M^+(X, \mathscr{A})$, (f_n) *converge a* f *y que*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu < +\infty.$$

Demostrar que

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

para cada $E \in \mathscr{A}$. *Además, demuestre que esto puede fallar si la condición*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu < +\infty$$

no se cumple.

Problema 138 *Encontrar un espacio de medida* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *y una sucesión* (f_n) *en* $\mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$ *y* $\lim_{n\to\infty} \int (f_n - (f_n)^2) d\mu = +\infty$.

Problema 139 *Sea* $f \in \mathscr{L}([0,1], \mathscr{F}([0,1])^*, \lambda)$ *tal que* $\int_{[0,1]} f \, d\lambda \neq 0$. *Demostrar que existe una función medible* g *tal que* $\int_{[0,1]} |fg| d\lambda < +\infty$ *y* $\int_{[0,1]} |f| g^2 d\lambda = +\infty$.

Problema 140 *Sea* $f_n = n^{-1} 1_{[n,n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que* $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda$, *pero que no existe una* $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, *tal que* $|f_n| \leq g$ λ*-cdq.*

6.5 Algunas aplicaciones del teorema de la convergencia dominada

6.5.1 Teorema de cambio de variable

Consideremos dos espacios medibles $(X, \mathscr{A})$ y $(Y, \mathscr{B})$. Sea $T : X \to Y$ una función $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$ medible. Si μ es una medida en $\mathscr{A}$, definamos la medida μ_T en $\mathscr{B}$ como

$$\mu_T(B) = \mu\left(T^{-1}(B)\right), \quad B \in \mathscr{B}. \tag{6.9}$$

La medida μ_T se llama *medida inducida por* T *en* Y (si $(Y, \mathscr{B}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ la medida μ_T se llama distribución de T). La fórmula $y = T(x)$, puede pensarse como un cambio de la variable x a la variable y vía la función medible T.

Teorema 6.5 *Sea* $f \in \mathscr{L}(Y, \mathscr{B}, \mu_T)$, *entonces* $f \circ T \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *y*

$$\int f \, d\mu_T = \int (f \circ T) d\mu. \tag{6.10}$$

Demostración. Si $f = \alpha 1_B$, $\alpha \in \mathbb{R}$, y $B \in \mathscr{B}$, entonces

$$\begin{aligned}\int f\, d\mu_T &= \alpha\mu_T(B) = \alpha\mu\left(T^{-1}(B)\right) \\ &= \int \alpha 1_{T^{-1}(B)} d\mu = \int (\alpha 1_B \circ T)\, d\mu = \int (f \circ T)\, d\mu.\end{aligned}$$

Usando a continuación la linealidad de la integral vemos que el resultado se cumple para funciones simples. Si f es una función medible no negativa debido al lema 5.10 existe una sucesión creciente (f_n) de funciones simples medibles tal que $0 \leq f_n \uparrow f$. Por el teorema de la convergencia monótona obtenemos

$$\begin{aligned}\int f\, d\mu_T &= \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu_T = \lim_{n\to\infty} \int (f_n \circ T)\, d\mu \\ &= \int \lim_{n\to\infty} (f_n \circ T)\, d\mu = \int (f \circ T)\, d\mu.\end{aligned}$$

El caso general se sigue de descomponer a f como $f = f^+ - f^-$. ■

Problema

Problema 141 *Sean $(X, \mathscr{A})$, $(Y, \mathscr{B})$ dos espacios medibles y $T : X \to Y$, $f : Y \to \mathbb{R}$ funciones $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}$-$\mathscr{B}(\mathbb{R})$ medibles, respectivamente. Suponga que la medida μ_T, definida en (6.9), es σ-finita y $f \circ T \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$. Demostrar que $f \in \mathscr{L}(Y, \mathscr{B}, \mu_T)$ y que se cumple (6.10).*

Problema 142 *Asúmanse las hipótesis del teorema 6.5, donde $(Y, \mathscr{B}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. ¿Cúal es la relación entre la medida inducida por T en $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ y la medida de Borel-Stieltjes generada por la función $f(x) = \mu\left(T^{-1}((-\infty, x])\right)$?.*

6.5.2 Comparación de la integral de Lebesgue y la integral de Riemann

Usaremos la caracterización de Darboux de la integral de Riemann para obtener un criterio de integrabilidad para la integral de Riemann.

Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Por una partición P de $[a, b]$ entendemos un conjunto finito de puntos $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, tal que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. La norma $|P|$ de P es $\max\left\{t_j - t_{j-1} : j = 1, \ldots, n\right\}$. Para cada partición P de $[a, b]$ definimos

$$m_j = \inf\left\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\right\}, \quad M_j = \sup\left\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\right\},$$

para cada $j = 1, \ldots, n$, y definimos las funciones escalonadas

$$g_P = \sum_{j=1}^{n} m_j 1_{\left(t_{j-1}, t_j\right]}, \quad G_P = \sum_{j=1}^{n} M_j 1_{\left(t_{j-1}, t_j\right]}.$$

Las sumas inferior y superior son,

$$L_P f = \sum_{j=1}^{n} m_j \left(t_j - t_{j-1}\right), \quad U_P f = \sum_{j=1}^{n} M_j \left(t_j - t_{j-1}\right),$$

respectivamente. Decimos que f es Riemann integrable si

$$\sup L_P f = \inf U_P f \tag{6.11}$$

donde el ínfimo y el supremo se toman sobre todas las particiones P de $[a,b]$. El valor común en (6.11) se llama integral de Riemann de f y se denota por $\int_a^b f(x)dx$. Recordemos (teorema 13.1 en [29]) que f *es Riemann integrable en* $[a,b]$ *si y sólo si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe una partición* P_ε *de* $[a,b]$ *tal que* $U_{P_\varepsilon} f - L_{P_\varepsilon} f < \varepsilon$.

Consideraremos el espacio medible $\left([a,b], \mathscr{F}([a,b])^*, \lambda^*\right)$, $\mathscr{F}([a,b])^*$ es la σ-álgebra de Lebesgue y λ^* es la medida de Lebesgue. Ya que g_P y G_P son funciones simples medible, resulta

$$\int_{[a,b]} g_P d\lambda^* = L_P f, \quad \int_{[a,b]} G_P d\lambda^* = U_P f. \tag{6.12}$$

Teorema 6.6 *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función acotada.*
(i) *Si* f *es Riemann integrable, entonces* f *es Lebesgue medible y*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda^*.$$

(ii) f *es Riemann integrable si y sólo si* f *es continua* λ^**-cdq.*

Demostración. (i) : Si f es Riemann integrable, entonces existe una sucesión de particiones (P_k) de $[a,b]$ tal que $U_{P_k} f - L_{P_k} f < k^{-1}$ y P_{k+1} es un refinamiento de P_k (es decir, $P_k \subset P_{k+1}$), para cada $k \in \mathbb{N}$. Esto implica que

$$g_{P_1} \leq g_{P_2} \leq \cdots \leq f \leq \cdots \leq G_{P_2} \leq G_{P_1}.$$

Por lo tanto, los límites $g = \lim_{k\to\infty} g_{P_k}$, $G = \lim_{k\to\infty} G_{P_k}$ existen y $g \leq f \leq G$. Por el teorema de la convergencia dominada ($\left|g_{P_k}\right|, \left|G_{P_k}\right| \leq M 1_{[a,b]}$, donde $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$) y (6.12),

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} L_{P_k} f &= \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} g_{P_k} d\lambda^* = \int_{[a,b]} g d\lambda^*, \\
\lim_{k\to\infty} U_{P_k} f &= \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} G_{P_k} d\lambda^* = \int_{[a,b]} G d\lambda^*.
\end{aligned}$$

Veamos que $\lim_{k\to\infty} U_{P_k} f = \inf U_P f$, de igual forma se puede demostrar que $\lim_{k\to\infty} L_{P_k} f = \sup L_P f$. Sea $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $k_0^{-1} < \varepsilon$. Si $k \geq k_0$,

$$U_{P_k} f - \inf U_P f = U_{P_k} f - \sup L_P f \leq U_{P_k} f - L_{P_k} f < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_0} < \varepsilon.$$

Usando de nuevo que $\inf U_P f = \sup L_P f$ resulta

$$\int_{[a,b]} (G-g)\, d\lambda^* = \lim_{k\to\infty} U_{P_k} f - \lim_{k\to\infty} L_{P_k} f = 0.$$

Lo que implica que, $G = g$ λ^*-cdq, por el corolario 6.3, en particular, $f = g$ λ^*-cdq. Ya que g es el límite de funciones simples medibles, g es medible y $([a,b], \mathscr{F}([a,b])^*, \lambda^*)$ espacio de medida completo, implica que f es medible (lema 5.11). La igualdad con la integral de Riemann se sigue de

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} f\, d\lambda^* &= \int_{[a,b]} g\, d\lambda^* = \lim_{k\to\infty} L_{P_k} f \leq \sup L_P f = \int_a^b f(x)\, dx \\
&= \inf U_P f \leq \lim_{k\to\infty} U_{P_k} f = \int_{[a,b]} G\, d\lambda^* = \int_{[a,b]} f\, d\lambda^*.
\end{aligned}$$

(ii) : Supongamos que f es Riemann integrable. Usando los resultados y la notación de (i) tenemos que $g = f = G$ λ^*-cdq. Sea $x \notin \cup_{k=1}^{\infty} P_k$, tal que $g(x) = f(x) = G(x)$. Veamos que f es continua en x. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| g(x) - g_{P_k}(x) \right| < \varepsilon, \quad \left| G(x) - G_{P_k}(x) \right| < \varepsilon,$$

donde $P_k = \left\{ t_0^k, \ldots, t_{n_k}^k \right\}$. Supongamos que $x \in \left(t_{i-1}^k, t_i^k \right)$, $i \in \{1, \ldots, n_k\}$ y sea $\delta = \left(x - t_{i-1}^k \right) \wedge \left(t_i^k - x \right)$. Si $0 \leq |x - y| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
f(y) - \varepsilon &\leq G(y) - \varepsilon < G(y) - \left(G_{P_k}(x) - G(x) \right) \\
&= G(x) - \left(M_i^k - G(y) \right) \leq G(x) = f(x) = g(x) \\
&\leq g(x) + \left(g(y) - m_i^k \right) = g(y) + \left(g(x) - g_{P_k}(x) \right) \\
&\leq g(y) + \varepsilon \leq f(y) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

es decir, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, si $0 \leq |x - y| < \delta$. En consecuencia f es continua en $(\cup_{k=1}^{\infty} P_k)^c \cap \{x \in [a,b] : g(x) = f(x) = G(x)\}$.

Recíprocamente, supongamos que f es continua λ^*-cdq. Sea (P_k) una sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que $|P_k| \to 0$, cuando $k \to \infty$, y P_{k+1} es un refinamiento de P_k. Definamos las funciones g y G como en la parte (i). Veamos que $g = f$ λ^*-cdq. Sea $x \in (a,b]$ tal que f es continua en x. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 \leq |x - y| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2. \tag{6.13}$$

Puesto que $|P_k| \to 0$, $k \to \infty$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$, tal que si $k \geq k_1$, $|P_k| < \delta$. Por otra parte, $g(x) = \lim_{k\to\infty} g_{P_k}(x)$, implica que existe $k_2 \in \mathbb{N}$, tal que si $k \geq k_2$, $|g(x) - g_{P_k}(x)| < \varepsilon/2$. Sea $k_3 = k_1 \vee k_2$. Así, $x \in \left(t_{i-1}^{k_3}, t_i^{k_3}\right] \subset (x-\delta, x+\delta)$, para algún $i \in \left\{1, \ldots, n_{k_3}\right\}$. De (6.13) obtenemos que

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f(y), \quad y \in \left[t_{i-1}^{k_3}, t_i^{k_3}\right],$$

lo que implica que

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \inf\left\{f(y) : y \in \left[t_{i-1}^{k_3}, t_i^{k_3}\right]\right\} = m_i^{k_3}.$$

Así,

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq \left|f(x) - g_{P_{k_3}}(x)\right| + \left|g_{P_{k_3}}(x) - g(x)\right| \\ &= \left|f(x) - m_i^{k_3}\right| + \left|g_{P_{k_3}}(x) - g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

De igual forma se demuestra que $f = G$ en los puntos de continuidad de f. Puesto que g, G son medibles y $\left([a,b], \mathscr{F}([a,b])^*, \lambda^*\right)$ es un espacio medible completo, tenemos que f es medible, lema 5.11, más aún integrable, pues está acotada. Además,

$$\int_{[a,b]} g\,d\lambda^* = \int_{[a,b]} f\,d\lambda^* = \int_{[a,b]} G\,d\lambda^*,$$

es decir,

$$\lim_{k\to\infty}(U_{P_k}f - L_{P_k}f) = \lim_{k\to\infty} U_{P_k}f - \lim_{k\to\infty} L_{P_k}f = \int_{[a,b]} G\,d\lambda^* - \int_{[a,b]} g\,d\lambda = 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$0 \leq \inf U_P f - \sup L_P f \leq U_{P_{k_0}} f - L_{P_{k_0}} f < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\inf U_P f = \sup L_P f$. Así f es Riemann integrable. ■

Problemas

Problema 143 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrable. Demostrar que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Esto significa que la integral la podemos interpretar como un límite de promedios. ¿Ésta propiedad se cumple para las funciones Lebesgue integrables?

Problema 144 *Sea $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ una función Lebesgue integrable y tal que $\int_{[a,x]} f\, d\lambda^* = 0$ para toda $a \leq x \leq b$. Demostrar que $f = 0$ λ^*-cdq.*

Problema 145 *Dar un ejemplo de una sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann integrables, tal que $|f_n| \leq M$ y $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ sea Lebesgue integrable pero no Riemann integrable.*

Problema 146 *Encuentre una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que sea Riemann integrable y su conjunto de discontinuidades no sea numerable.*

Problema 147 *Una función $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ se llama Riemann integrable impropiamente si es Riemann integrable en $[a,b]$ para cada $b \geq a$ y el límite $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$, denotado por $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$, existe. Sea $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable en $[a,b]$ para toda $b \geq a$. Demostrar que f es Lebesgue integrable si y sólo si $|f|$ es Riemann integrable impropiamente en $[a,+\infty)$. Más aún, en este caso $\int_{[a,+\infty)} f\, d\lambda^* = \int_a^{\infty} f(x)\, dx$.*

Problema 148 (Continuación) *Dar un ejemplo de una función $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ Riemann integrable impropiamente tal que $|f|$ no lo sea.*

Problema 149 *Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una función decreciente e integrable. Demostrar que $\lim_{x\to\infty} x f(x) = 0$.*

6.5.3 Diferenciación bajo el signo de integración

Otra propiedad de la integral de Lebesgue es que permite el intercambio de la derivada y la integral de una manera relativamente "sencilla".

Teorema 6.7 *Sea $f : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que:*
(i) Para cada $t \in [a,b]$, $f(\cdot,t)$ es medible.
(ii) Existe $t_0 \in (a,b)$ tal que $f(\cdot,t_0) \in \mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$.
(iii) Para cada $x \in X$, $f(x,\cdot)$ es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b).
(iv) Existe $g \in \mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$ tal que $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t)\right| \leq g(\cdot)$.
Bajo estas suposiciones, la función

$$F(t) = \int f(x,t)\, d\mu(x), \quad t \in (a,b),$$

esta bien definida, es diferenciable en (a,b) y

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\int f(x,t)\, d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu(x). \tag{6.14}$$

Demostración. Hay que mostrar que $f(\cdot, t)$ es integrable. Para ver esto usaremos el teorema del valor medio. Sean $x \in X$ y $t \in (a,b) \setminus \{t_0\}$. Entonces existe un s_x entre t y t_0 tal que

$$\frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} = \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_x),$$

lo que implica que

$$|f(x,t)| \leq |f(x,t_0)| + |t - t_0| \, g(x).$$

Así, $|f(\cdot,t)| \leq |f(\cdot,t_0)| + (b-a)g$, por lo tanto, $f(\cdot,t)$ es integrable.

Para que (6.14) tenga sentido es necesario ver que $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ es una función medible para cada $t \in (a,b)$. Esto se sigue del hecho de que para cada $t \in (a,b)$ existe una sucesión (t_n) en $(a,b) \setminus \{t\}$ tal que $t_n \to t$,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}, \quad x \in X.$$

Así, la medibilidad de $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t)$ es consecuencia de la medibilidad de las funciones $((t_n - t)^{-1}(f(\cdot,t_n) - f(\cdot,t)))_n$ y del corolario 5.1.

Sea $t \in (a,b)$ y (t_n) cualquier sucesión en $(a,b) \setminus \{t\}$ tal que $t_n \to t$. Aplicando de nuevo el teorema del valor medio, existe un r_x entre t_n y t tal que

$$\left| \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, r_x) \right| \leq g(x).$$

Por el teorema de la convergencia dominada,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} &= \lim_{n\to\infty} \int \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} d\mu(x) \\ &= \int \lim_{n\to\infty} \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} d\mu(x) \\ &= \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \, d\mu(x). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Si F no fuese diferenciable en algún $t \in (a,b)$ existiría una sucesión (t_n) en $(a,b) \setminus \{t\}$ tal que (6.15) no se cumpliría (ver el ejercicio 150). Así, F es diferenciable. ∎

Enseguida se verá cómo se usa el teorema precedente para calcular integrales de Riemann impropias (ver el ejercicio 147):

Proposición 6.2 (Euler) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$.

Demostración. Sean $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} dx \right)^2 \quad \text{y } g(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1} dx.$$

Nótese que

$$\left| \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1} \right| \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1, \tag{6.16}$$

por lo tanto g esta bien definida y

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1} \right) \right| &= \left| -2te^{-t^2(x^2+1)} \right| \\ &\leq \sqrt{2}e^{-1/2}e^{-t^2x^2} \leq \sqrt{2}e^{-1/2}, \end{aligned}$$

para cualesquiera $t > 0$ y $0 < x < 1$ (hemos usado que $2^{-1/2}$ es el punto máximo de te^{-t^2}, $t > 0$). Del teorema 6.7 se sigue que para toda $t > 0$

$$\begin{aligned} g'(t) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1} \right) dx \\ &= -2e^{-t^2} \int_0^1 te^{-t^2x^2} dx \\ &= -2e^{-t^2} \int_0^t e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Así, calculando la derivada de f es fácil ver que $f'(t) + g'(t) = 0$, para toda $t > 0$. En consecuencia

$$f(t) + g(t) = c, \text{ para toda } t > 0. \tag{6.17}$$

Por la continuidad de f y g, se sigue que $f(t) + g(t) = c$, para toda $t \geq 0$. En particular,

$$c = f(0) + g(0) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \tag{6.18}$$

Por otra parte, para cualesquiera $0 \leq x \leq 1$ y $t > 0$,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1} = 0.$$

Entonces, del teorema de la convergencia dominada, ver (6.16), concluimos que $\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$. Así, de (6.17) y (6.18),

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{t \to \infty} (f(t) + g(t)) = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2.$$

De lo cual se obtiene en particular la integrabilidad de e^{-x^2}. ■

Problemas

Problema 150 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Demostrar que* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *si y sólo si para toda sucesión* $x_n \to a$, $n \to \infty$, *se cumple que* $f(x_n) \to L$, $n \to \infty$.

Problema 151 *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio de medida,* E *un espacio métrico y* $f : X \times E \to \mathbb{R}$. *Suponga que:*
(i) *Para cada* $t \in E$, $f(\cdot, t)$ *es medible.*
(ii) $f(x, \cdot)$ *es continua para cada* $x \in X$.
(iii) *Existe* $g \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *tal que para cada* $t \in E$, $|f(x, t)| \leq g(x)$ *para casi toda* $x \in X$.
Demostrar que $F : E \to \mathbb{R}$, *definida por*

$$F(t) = \int f(x, t)\, d\mu(x),$$

esta bien definida y es continua.

Problema 152 *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que*

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!.$$

Problema 153 *Demostrar que para cada* $t > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx = \log t.$$

Problema 154 *Demostrar que*

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Problema 155 *Para cada* $t > 0$ *sea*

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\log x} dx.$$

Evaluar la función F.

Chapter 7

Descomposición de medidas

La diferencia esencial entre la noción de medida y medida signada (o con signo), radica en que una medida signada no necesariamente toma valores no negativos como lo hace una medida. Entre los resultados más importantes de este capítulo se destaca el teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym. Este teorema tiene diversas aplicaciones, una de ellas es que permitirá determinar los funcionales lineales en los espacios L^p, hecho que se presentará en el capítulo 8.

7.1 Medidas signadas

Definición 7.1 *Sea $(X,\mathscr{A})$ un espacio medible. Una función $\nu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ se llama medida signada si:*
(i) $\nu(\varnothing) = 0$.
(ii) ν toma a lo más uno de los valores $-\infty$ o $+\infty$.
(iii) Si (E_i) es una sucesión ajena en $\mathscr{A}$, entonces

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i). \tag{7.1}$$

Si $\nu\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \in \{-\infty, +\infty\}$ entonces se asume que $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$ es *propiamente divergente*, es decir, la suma de la serie no depende del arreglo de los sumandos. Por otra parte, si $|\nu\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i\right)| < +\infty$, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$ converge absolutamente. En efecto, definamos los conjuntos

$$E_i^+ = \begin{cases} E_i, & \nu(E_i) \geq 0, \\ \varnothing, & \nu(E_i) < 0, \end{cases}$$

y

$$E_i^- = \begin{cases} E_i, & \nu(E_i) < 0, \\ \varnothing, & \nu(E_i) \geqslant 0. \end{cases}$$

Nótese que las colecciones $\{E_i^+ : i \in \mathbb{N}\}$ y $\{E_i^- : i \in \mathbb{N}\}$ son ajenas. En efecto,

$$E_i^+ \cap E_j^- = \begin{cases} E_i \cap E_j, & \nu(E_i) \geq 0,\ \nu\left(E_j\right) < 0, \\ E_i \cap \varnothing, & \nu(E_i) \geq 0,\ \nu\left(E_j\right) \geq 0, \\ \varnothing \cap E_j, & \nu(E_i) < 0,\ \nu\left(E_j\right) < 0, \\ \varnothing \cap \varnothing, & \nu(E_i) < 0,\ \nu\left(E_j\right) \geq 0. \end{cases}$$

Así,

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^+\right) + \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^-\right) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \in \mathbb{R}.$$

El hecho de que ν toma a lo más uno de los valores $-\infty$, $+\infty$, implica que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu\left(E_i^+\right) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^+\right) < +\infty$$

y

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu\left(E_i^-\right) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^-\right) > -\infty.$$

Así

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\nu(E_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} \nu\left(E_i^+\right) - \sum_{i=1}^{\infty} \nu\left(E_i^-\right) < +\infty.$$

Por lo tanto, la suma $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$ no depende del orden de los sumandos (ver el ejercicio 156).

Ejemplo 7.1 *Sean μ_1, μ_2 medidas en $(X, \mathscr{A})$. Si al menos una de las medidas μ_i es finita, entonces $\nu = \mu_1 - \mu_2$ es una medida signada. En particular, si μ es una medida en $(X, \mathscr{A})$ y $f \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$, entonces*

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu,$$

es una medida signada. Esta medida signada usualmente la denotaremos por $d\nu = f\, d\mu$.

Las medidas signadas tienen propiedades similares a las de las medidas. Por ejemplo:

Lema 7.1 *Sea ν una medida signada en $(X, \mathscr{A})$.*
(i) *Si $E, F \in \mathscr{A}$, $E \subset F$ y $\nu(E) \notin \{-\infty, +\infty\}$, entonces*

$$\nu(F \backslash E) = \nu(F) - \nu(E).$$

(ii) Si (E_n) es una sucesión creciente en $\mathscr{A}$, entonces

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n).$$

(iii) Si (E_n) es una sucesión decreciente en $\mathscr{A}$ tal que para agún $n_0 \in \mathbb{N}$ $|\nu\left(E_{n_0}\right)| < +\infty$, entonces

$$\nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n).$$

La demostración de las dos primeras afirmaciones es análoga a la dada en los lemas 3.1 y 3.2 para medidas. La tercera afirmación se sigue, de la primera parte del lema anterior, al notar que

$$\nu\left(E_{n_0}\right) = \nu\left(E_{n_0}\backslash E_k\right) + \nu(E_k), \quad \forall k \geq n_0,$$

por lo tanto, $|\nu(E_k)| < +\infty$, $k \geq n_0$.

Definición 7.2 *Sea ν una medida signada en $(X, \mathscr{A})$. Un conjunto $E \in \mathscr{A}$ se llama positivo (negativo, nulo) para ν si $\nu(F) \geq 0$ ($\nu(F) \leq 0$, $\nu(F) = 0$, respectivamente) para todo $F \in \mathscr{A}$, tal que $F \subset E$.*

Lema 7.2 *Cualquier subconjunto medible de un conjunto positivo es positivo, y la unión contable de conjuntos positivos es positivo.*

Demostración. La primera afirmación es consecuencia inmediata de la definición. Veamos la segunda. Sea (P_i) una colección contable de conjuntos positivos. Definamos la sucesión (Q_i), por $Q_1 = P_1$ y $Q_i = P_i \backslash \left(\cup_{j=1}^{i-1} P_j\right)$, para $i \geq 2$. Si $F \subset \cup_{i=1}^{\infty} P_i$, entonces $\nu(F \cap Q_i) \geq 0$, pues $F \cap Q_i \subset P_i$, así

$$\begin{aligned}
\nu(F) &= \nu\left(F \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i\right) \\
&= \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (F \cap Q_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(F \cap Q_i) \geq 0.
\end{aligned}$$

Como se quería demostrar. ∎

El resultado presedente se vale también para conjuntos negativos.

Teorema 7.1 (Descomposición de Hahn) *Si ν es una medida signada en $(X, \mathscr{A})$, entonces existe un conjunto positivo P y un conjunto negativo N tal que $X = P \cup N$ y $P \cap N = \varnothing$.*

Demostración. Supongamos que ν no toma el valor $-\infty$, en caso contrario tomamos a $-\nu$. Sea $c = \inf\{\nu(E) : E \in \mathscr{A}\}$. Tomemos una sucesión (c_n) tal que $c_1, c_2, \ldots \downarrow c$. Sea $\left(E_n^1\right)$ una sucesión en $\mathscr{A}$, tal que $-\infty < \nu\left(E_n^1\right) < c_n$, $n \in \mathbb{N}$. Definamos la sucesión $\left(A_n^1\right)$ por $A_1^1 = E_1^1$ y, para $n \geq 1$, definamos

$$A_{n+1}^1 = \begin{cases} A_n^1, & \nu\left(E_{n+1}^1 \backslash A_n^1\right) \geq 0, \\ A_n^1 \cup E_{n+1}^1, & \nu\left(E_{n+1}^1 \backslash A_n^1\right) < 0. \end{cases}$$

De la definición de $\left(A_n^1\right)$ tenemos que $A_n^1 \uparrow$ y $\nu\left(A_n^1\right) \downarrow$. Más aún, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\nu\left(E_n^1 \backslash A_n^1\right) \geq 0$. Así

$$\nu\left(E_n^1 \cap A_n^1\right) \leq \nu\left(E_n^1 \backslash A_n^1\right) + \nu\left(E_n^1 \cap A_n^1\right) = \nu\left(E_n^1\right) < c_n. \tag{7.2}$$

Sea $B_1 = \cup_{n=1}^{\infty} A_n^1$. Entonces por el lema 7.1, tenemos que

$$\nu(B_1) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(A_n^1\right) \leq \nu\left(A_1^1\right) = \nu\left(E_1^1\right) < c_1.$$

Puesto que $E_n^1 \cap A_n^1 \subset A_n^1 \subset B_1$, de (7.2) resulta que

$$c \leq \inf\{\nu(E) : E \subset B_1,\ E \in \mathscr{A}\} \leq \nu\left(E_n^1\right) < c_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Así, $c = \inf\{\nu(E) : E \subset B_1,\ E \in \mathscr{A}\}$. Para el siguiente paso consideremos la sucesión $c_2, c_3, \ldots \downarrow c$. Existe una sucesión $\left(E_n^2\right)$ en $\mathscr{A}$, tal que $E_n^2 \subset B_1$ y $\nu\left(E_n^2\right) < c_n$, $n \geq 2$. De manera similar a $\left(A_n^1\right)_{n\geq 1}$ se define la sucesión $\left(A_n^2\right)_{n\geq 2}$. Así, obtenemos un conjunto $B_2 = \cup_{n=2}^{\infty} A_n^2$, tal que $B_2 \subset B_1$, $\nu(B_2) < c_2$ y $c = \inf\{\nu(E) : E \subset B_2, E \in \mathscr{A}\}$. De esta manera, obtenemos una sucesión (B_n) en $\mathscr{A}$, tal que $B_n \downarrow$,

$$\nu(B_n) < c_n \ \text{ y } \ c = \inf\{\nu(E) : E \subset B_n, E \in \mathscr{A}\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Sea $N = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$, entonces $(-\infty < \nu(B_n) < c_n)$

$$c \leq \nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(B_n) \leq \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Por lo tanto, $0 \geq \nu(N) = c > -\infty$. El conjunto N es negativo. En efecto, si $E \subset N$ y $\nu(E) > 0$, entonces $c = \nu(N) = \nu(N \backslash E) + \nu(E) > \nu(N \backslash E)$, lo que contradice la definición de c. Sea $P = X \backslash N$ y $E \subset P$. Si $\nu(E) < 0$, entonces $\nu(N \cup E) = \nu(N) + \nu(E) < \nu(N) = c$, lo que contradice la definición de c. Así, P es un conjunto positivo para ν. ∎

La descomposición $X = P \cup N$ de X como unión ajena de un conjunto positivo y un conjunto negativo se llama *descomposición de Hahn*. En general, la descomposición de Hahn no es única. Por ejemplo, si M es un conjunto nulo para ν, entonces $P \cup M$, $N \backslash M$ es una descomposición de Hahn para ν.

Lema 7.3 *Sea ν una medida signada en $(X,\mathscr{A})$ y P_1,N_1 y P_2,N_2 descomposiciones de Hahn para ν, entonces*

$$\nu(E\cap P_1)=\nu(E\cap P_2),\;\; \nu(E\cap N_1)=\nu(E\cap N_2),\;\; E\in\mathscr{A}.$$

Demostración. Ya que $P_1\backslash P_2\subset P_1$ y $P_1\backslash P_2\subset N_2$, entonces $P_1\backslash P_2$ es un conjunto positivo y negativo, por lo tanto nulo. Análogamente, $P_2\backslash P_1$ es nulo; así,

$$\begin{aligned}\nu(E\cap P_1) &= \nu(E\cap(P_1\backslash P_2))+\nu(E\cap(P_1\cap P_2))\\ &= \nu(E\cap(P_2\backslash P_1))+\nu(E\cap(P_2\cap P_1))=\nu(E\cap P_2).\end{aligned}$$

El caso para conjuntos negativos es similar. ■

Como consecuencia de este resultado tenemos que los siguientes conceptos están bien definidos.

Definición 7.3 *Sea ν una medida signada en $(X,\mathscr{A})$ y P,N una descomposición de Hahn para ν. Las variaciones positivas y negativas de ν son las medidas ν^+, ν^-, respectivamente, definidas como*

$$\nu^+(E)=\nu(E\cap P),\;\; \nu^-(E)=-\nu(E\cap N),\;\; E\in\mathscr{A}.$$

La variación total $|\nu|$ es la medida

$$|\nu|(E)=\nu^+(E)+\nu^-(E),\;\; E\in\mathscr{A}.$$

Claramente tenemos que

$$\nu(E)=\nu^+(E)-\nu^-(E),\;\; E\in\mathscr{A}.$$

Esta descomposición de ν se llama *descomposición de Jordan* . Además nótese que $|\nu(E)|\leq|\nu|(E)$, para cada $E\in\mathscr{A}$.

Definición 7.4 *Una medida signada ν en $(X,\mathscr{A})$ se llama finita (σ-finita) si $|\nu|$ es finita (σ-finita).*

Teorema 7.2 *Si $f\in\mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$, entonces las variaciones de $d\nu=f\,d\mu$ son:*

$$d\nu^+=f^+d\mu,\;\; d\nu^-=f^-d\mu\;\; y\;\; d|\nu|=|f|\,d\mu.$$

Demostración. Sea $P=f^{-1}([0,+\infty))$ y $N=P^c=f^{-1}((-\infty,0))$. Si $E,F\in\mathscr{A}$, son tal que $E\subset P$, $F\subset N$, entonces $\nu(E)\geq 0$ y $\nu(F)\leq 0$. Así, P,N es una descomposición de Hahn para ν. El resultado se sigue de la definición de ν^+, ν^- y $|\nu|$. ■

Definición 7.5 *Dos medidas signadas μ y ν en $(X,\mathscr{A})$ se llaman singulares si existen $E,F\in\mathscr{A}$, tal que $E\cap F=\emptyset$, $E\cup F=X$, E es un conjunto nulo para μ, y F es un conjunto nulo para ν. Esta relación la denotaremos por*

$$\mu\perp\nu,$$

y diremos que μ es singular con respecto a ν (respectivamente, ν es singular con respecto a μ, $\nu\perp\mu$).

Nótese que $\mu\perp\nu$ si y sólo si $|\mu|(E)=0$ y $|\nu|(F)=0$.

Teorema 7.3 *Sea ν una medida signada en $(X,\mathscr{A})$. Para cada $E\in\mathscr{A}$ se tiene*

$$\begin{aligned}
\nu^+(E) &= \sup\{\nu(F): F\in\mathscr{A},\ F\subset E\},\\
\nu^-(E) &= -\inf\{\nu(F): F\in\mathscr{A},\ F\subset E\},\\
|\nu|(E) &= \sup\left\{\sum_{j=1}^n \left|\nu\left(F_j\right)\right| : \{F_1,\dots,F_n\}\subset\mathscr{A},\ \text{ajenos},\ \bigcup_{j=1}^n F_j\subset E,\ n\in\mathbb{N}\right\}.
\end{aligned}$$

Demostración. Sea (P,N) una descomposición de Hahn para ν y $E\in\mathscr{A}$. Denotemos por $\eta(E)$ el lado derecho de $\nu^+(E)$. Así $\nu^+(E)=\nu(P\cap E)\le\eta(E)$. Por otra parte, sea $F\subset E$, $F\in\mathscr{A}$,

$$\nu(F)=\nu^+(F)-\nu^-(F)\le\nu^+(F)\le\nu^+(E),$$

por ende $\eta(E)\le\nu^+(E)$.

Para la segunda igualdad basta notar que $\nu^-=(-\nu)^+$.

Sea ahora $\eta(E)$ la parte de la derecha en $|\nu|(E)$. De la descomposisión de Jordan tenemos

$$|\nu|(E)=|\nu(E\cap P)|+|\nu(E\cap N)|\le\eta(E).$$

Para la otra desigualdad consideremos $\{F_1,\dots,F_n\}\subset\mathscr{A}$ ajenos y $\cup_{j=1}^n F_j\subset E$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n|\nu(F_i)| &\le \sum_{i=1}^n[\nu^+(F_i)+\nu^-(F_i)]\\
&= \sum_{i=1}^n|\nu|(F_i)\\
&= |\nu|(\cup_{i=1}^n F_i)\le|\nu|(E).
\end{aligned}$$

Lo que implica $\eta(E)\le|\nu|(E)$. ■

Teorema 7.4 *Sean μ, ν medidas (o medidas signadas finitas) en $(X,\mathscr{A})$. Las funciones*

$$\begin{aligned}
(\mu\vee\nu)(A) &= \sup\{\mu(B)+\nu(A/B): B\in\mathscr{A}, B\subset A\},\\
(\mu\wedge\nu)(A) &= \inf\{\mu(B)+\nu(A/B): B\in\mathscr{A}, B\subset A\},
\end{aligned}$$

son medidas (medidas signadas finitas) en $(X,\mathscr{A})$.

Demostración. Veamos que $\mu \vee \nu$ es medida (o medida signada finita), análogamente se trabajo con $\mu \wedge \nu$. Si μ y ν son medidas signadas finitas, entonces $|(\mu \vee \nu)(A)| \leq |\mu|(X) + |\nu|(X)$, para cada $A \in \mathscr{A}$. Puesto que $\emptyset \subset \emptyset$, es claro que $(\mu \vee \nu)(\emptyset) = 0$. Sean (A_n) una sucesión ajena en $\mathscr{A}$. Si $B \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, $B \in \mathscr{A}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mu(B) + \nu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \backslash B\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap A_n)\right) + \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \backslash B)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [\mu(B \cap A_n) + \nu(A_n \backslash (B \cap A_n))] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \vee \nu)(A_n).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\mu \vee \nu)(\cup_{n=1}^{\infty}(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(\mu \vee \nu)(A_n)$. Para ver la desigualdad contrario tomemos un $\varepsilon > 0$ arbitario. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $B_n \in \mathscr{A}$, $B_n \subset A_n$ tal que

$$(\mu \vee \nu)(A_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} < \mu(B_n) + \nu(A_n \backslash B_n).$$

De esta manera, $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{A}$, $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, por ser (A_n) ajena, resulta

$$\begin{aligned}
(\mu \wedge \nu)\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) + \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) + \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \backslash B_n)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [\mu(B_n) + \nu(A_n \backslash B_n)] \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \vee \nu)(a_n) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Haciendo $\varepsilon \downarrow 0$ obdtenemos la desigualdad buscada. ■

Corolario 7.1 *Sean μ, ν medidas (o medidas signadas finitas). Se tiene:*
(i) $\mu \vee \nu$ es mayor que μ y ν y es más pequeña que cualquier otra medida signada que sea mayor que μ y ν.
(ii) $\mu \wedge \nu$ es menor que μ y ν y es más grande que cualquier otra medida signada que sea menor que μ y ν.
Más aún, si μ y ν son medidas signadas finitas, entonces $\mu \wedge \nu + \mu \vee \nu = \mu + \nu$.

Demostración. Sea λ una medida (o medida signada) tal que $\mu \leq \lambda$ y $\nu \leq \lambda$. Sean $A, B \in \mathscr{A}$, $B \subset A$,

$$\mu(B) + \nu(A \backslash B) \leq \lambda(B) + \lambda(A \backslash B) = \lambda(A),$$

así $(\mu \vee \nu)(A) \leq \lambda(A)$, es decir, $\mu \vee \nu \leq \lambda$.

Por otra parte, si $A, B \in \mathscr{A}$, $B \subset A$, entonces $A \backslash B \subset A$, implica

$$\begin{aligned} \mu(A) + \nu(A) - (\mu \vee \nu)(A) &\leq \mu(A) + \nu(A) - \mu(A \backslash B) - \nu(A \backslash (A \backslash B)) \\ &= \mu(B) + \nu(A \backslash B) \end{aligned}$$

por ende $\mu(A) + \nu(A) - (\mu \vee \nu)(A) \leq (\mu \wedge \nu)(A)$. Además

$$\begin{aligned} \mu(A) + \nu(A) - (\mu \wedge \nu)(A) &\geq \mu(A) + \nu(A) - \mu(B) - \nu(A \backslash B) \\ &= \mu(B) + \mu(A \backslash B) \end{aligned}$$

luego $\mu(A) + \nu(A) - (\mu \wedge \nu)(A) \geq (\mu \vee \nu)(A)$. ■

Corolario 7.2 *Senan μ, v medidas signadas en $(X, \mathscr{A})$. Entonces $u \perp v$ si y sólo si $|u| \wedge |v| = 0$.*

Demostración. Supongamos que $u \perp v$. Sean E, F ajenos medible, tal que $E \cup F = X$ y $|\mu|(E) = |\nu|(F) = 0$, entonces

$$(|\mu| \wedge |\nu|)(X) = (|\mu| \wedge |\nu|)(E) + (|\mu| \wedge |\nu|)(F) \leq |\mu|(E) + |\nu|(F) = 0,$$

de lo que se sigue $|\mu| \wedge |\nu| = 0$. Tratemos la implicación recíproca. Del teorema resulta

$$0 = (|\mu| \wedge |\nu|)(X) = \inf\{|\mu|(B) + |\nu|(B^c) : B \in \mathscr{A}\}.$$

Por ende, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $B_n \in \mathscr{A}$ tal que

$$|\mu|(B_n) + |\nu|(B_n^c) \leq \frac{1}{2^n}. \tag{7.3}$$

Sean $B = \limsup B_n$ y $A = B^c$. Por el Lema de Borel-Cantelli $|\mu|(B) = 0$, y además

$$|\nu|(A) = \lim_{k \to \infty} \left(\bigcap_{n=k}^{\infty} B_n^c \right) \leq \lim_{k \to \infty} |\nu|(B_k^c).$$

Luego, de (7.3) se sigue que $|\nu|(A) = 0$. ■

Por $C(X, \mathscr{A})$ denotamos al conjunto de todas las medidas signadas real valuadas definidas en $(X, \mathscr{A})$. Notemos que una carga ν es real valuada (finita) si y sólo si $|\nu|(X) < \infty$. Con las operaciones

$$(\mu + \nu)(A) = \mu(A) + \nu(A), \quad (\alpha \nu)(A) = \alpha \nu(A)$$

el conjunto $C(X, \mathscr{A})$ es un espacio vectorial. Más aún,

$$\mu^+ = \mu \vee 0, \quad \mu^- = (-\mu) \vee 0, \quad |\mu| = \mu \vee (-\mu).$$

Veamos lúltima afirmación. Puesto que $\mu \leq |\mu|$, $-\mu \leq |\mu|$, entonces $\mu \vee (-\mu) \leq |\mu|$. Por otra parte, sea (P,N) una descomposición de Hahn para μ. puesto que $A \cap (A \cap P)^c = A \cap N$,

$$\begin{aligned} \mu^+(A) + \mu^-(A) &= \mu(A \cap P) - \mu(A \cap N) \\ &\leq \mu(A \cap P) + (-\mu)(A \backslash (A \cap N)) \\ &\leq (\mu \vee (-\mu))(A). \end{aligned}$$

Usando que $|\nu(A)| \leq |\nu|(X)$, $A \in \mathscr{A}$, y la caracterización de $|\nu|$, dada en el teorema 7.3, se sigue que $||\nu|| = |\nu|(X)$ es una norma en $C(X, \mathscr{A})$.

Teorema 7.5 *El espacio vectorial $C(X, \mathscr{A})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea (ν_n) una sucesión de Cacuchy en $C(X, \mathscr{A})$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||\nu_n - \nu_m|| < \varepsilon/3$, $n, m \geq n_0$. En particular, para cada $A \in \mathscr{A}$,

$$|\nu_n(A) - \nu_m(A)| \leq |\nu_n - \nu_m|(A) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n, m \geq n_0. \tag{7.4}$$

De lo cual se sigue que $(\nu_n(A))$ es una sucseión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Definamos la función $\nu(A) = \lim_{n\to\infty}(A_n)$, $A \in \mathscr{A}$. Veamos que ν es una medida signada. Primero notemos que, de (7.4), para cada $A \in \mathscr{A}$

$$|\nu_n(A) - \nu(A)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq n_0. \tag{7.5}$$

Claramente $\nu(\emptyset) = 0$. Ahora, sea (A_k) una sucesión ajena de conjuntos medibles. Para cada $m \in \mathbb{N}$ y $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |\sum_{i=1}^{m}[\nu_n(A_i) - \nu_{n_0}(A_i)]| &\leq \sum_{i=1}^{m}|\nu_n(A_i) - \nu_{n_0}(A_i)| \\ &\leq |\nu_n - \nu_{n_0}|\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \\ &\leq ||\nu_n - \nu_{n_0}|| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Haciendo $n \to \infty$, en la desigualdad anterior nos queda $|\sum_{i=1}^{m}[\nu(A_i) - \nu_{n_0}(A_i)]| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Por otra parte, ya que $\mu_{n_0}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \nu(A_i)$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\nu_{n_0}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \sum_{i=1}^{m} \nu_{n_0}(A_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall m \geq m_0.$$

Por lo tanto, para $n \geq m_0$

$$|\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \sum_{i=1}^{m} \nu(A_i)| \quad \leq \quad |\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \nu_{n_0}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)|$$

$$+|\nu_{n_0}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \sum_{i=1}^{m} \nu_{n_0}(A_i)|$$
$$+\sum_{i=1}^{m} \nu_{n_0}(A_i) - \sum_{i=1}^{m} \nu(A_i)| < \varepsilon.$$

De esta manera $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$. Veamos la convergencia en la norma. De (7.5)

$$(\nu_n - \nu)^+(X) = \sup\{\nu_n(A) - \nu(A) : A \in \mathscr{A}\} \leq \frac{\varepsilon}{3},$$
$$(\nu_n - \nu)^-(X) = \sup\{\nu_(A) - \nu_n(A) : A \in \mathscr{A}\} \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

para cada $n \geq n_0$. Por ende

$$||\nu_n - \nu|| = (\nu_n - \nu)^+(X) + (\nu_n - \nu)^-(X) < \varepsilon,$$

para cada $n \geq n_0$. Así, $\lim_{n\to\infty} \nu_n = \nu$. ■

Problemas

Problema 156 *Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de números reales se llama propiamente convergente (o incondicionalmente convergente) si para toda biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge, y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
i) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es propiamente convergente.
ii) Para toda biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge en $\mathbb{R}$.
iii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ converge en $\mathbb{R}$.
iv) Para toda función $\zeta : \mathbb{N} \to \{-1, 1\}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(n)x_n$ converge en $\mathbb{R}$.
v) Para toda subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n_k}$ converge en $\mathbb{R}$.
vi) Para toda $\varepsilon > 0$ existe un entero $K(\varepsilon)$ tal que para todo conjunto finito $S \subset \mathbb{N}$ con $\min\{s : s \in S\} \geq K(\varepsilon)$, se tiene que $\left|\sum_{n\in S} x_n\right| < \varepsilon$.

Problema 157 *Sean μ una medida signada en $(X, \mathscr{A})$. Si $E \in \mathscr{A}$ y $\mu(E) > 0$, demostrar que existe $A \subset E$, positivo tal que $\mu(A) > 0$*

Problema 158 *Sean $f(x) = x^2 - 6x + 5$, $x \in \mathbb{R}$, y $\nu(A) = \int_A f(x)\, dx$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Encontrar la descomposición de Hahn y de Jordan de ν.*

Problema 159 *Sean ν, μ medidas signadas en $(X, \mathscr{A})$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) $\nu \perp \mu$, (ii) $|\nu| \perp \mu$, (iii) $\nu^+ \perp \mu$ y $\nu^- \perp \mu$.

Problema 160 *Sea ν una medida signada en $(X, \mathscr{A})$. Si u, v son medidas en $(X, \mathscr{A})$, con almenos una de ellas finita, $\nu = u - v$ y $u \perp v$, demostrar que $u = \nu^+$, $v = \nu^-$.*

Problema 161 *Si ν es una medida signada y μ, λ son medidas tal que $\nu = \mu - \lambda$. Demostrar que $\mu \geq \nu^+$ y $\lambda \geq \nu^-$.*

Problema 162 *Sea ν una medida signada en $(X, \mathscr{A})$ y $\mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \nu) := \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \nu^+) \cap \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \nu^-) \in \mathscr{A}$. Demostar que $\mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \nu) = \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, |\nu|)$.*

Problema 163 *Sea ν una medida signada en $(X, \mathscr{A})$ y $E \in \mathscr{A}$. Demostar que*

$$\begin{aligned} |\nu|(E) &= \sup\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left|\nu\left(F_j\right)\right| : \left(F_j\right) \subset \mathscr{A} \text{ es ajena y } E = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right\} \\ &= \sup\left\{ \left| \int_E f\, d\nu \right| : |f| \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

donde $\int_E f\, d\nu = \int_E f\, d\nu^+ - \int_E f\, d\nu^-$.

Problema 164 *Sean μ y ν medidas en $(X, \mathscr{A})$. Demostrar que $\mu \perp \nu$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(A) \leq \varepsilon$ y $\nu(A^c) \leq \varepsilon$.*

Problema 165 *Sea ν una medida signada en $(X, \mathscr{A})$. Si $\nu(E) > 0$ demostrar que existe un conjunto positivo $A \subset E$ tal que $\nu(A) > 0$.*

Problema 166 *Sea ν una medida signada en $(X, \mathscr{A})$. Demostrar que ν es*
(i) finita si y sólo si $\nu(A) \in \mathbb{R}$, para cada $A \in \mathscr{A}$.
(ii) σ-finita si y sólo si existe una sucesión $(A_n) \subset \mathscr{A}$ tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\nu(A_n) \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Problema 167 *Sea ν una medida signada en $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, tal que $\int f\, d\nu^+ \geq \int f\, d\nu^-$ para toda función continua y acotada f. Demostrar que ν es una medida.*

Problema 168 *¿Bajo qué condiciones sobre $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es el espacio de las medidas signadas finitas un espacio vectorial normado separable o compacto?.*

7.2 Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in M^+(X, \mathscr{A})$. La medida $d\nu = f\, d\mu$ en $(X, \mathscr{A})$ cumple que si $\mu(E) = 0$, entonces $\nu(E) = 0$. Estudiaremos en esta sección el recíproco de esta afirmación, es decir, si μ, ν son medidas en $(X, \mathscr{A})$ tal que $\mu(E) = 0$, implica $\nu(E) = 0$, entonces, bajo ciertas hipótesis sobre μ, ν, veremos que ν se puede expresar como una integral con respecto a μ. Con este fin, introducimos el siguiente concepto.

Definición 7.6 *Una medida signada ν en $(X, \mathscr{A})$ es absolutamente continua con respecto a una medida μ en $(X, \mathscr{A})$ si para todo $E \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(E) = 0$, implica $\nu(E) = 0$ y esto lo denotamos por*

$$\nu \ll \mu.$$

Lema 7.4 *Sean ν una medida signada en $(X,\mathscr{A})$ y μ una medida en $(X,\mathscr{A})$. Entonces $\nu \ll \mu$ si y sólo si $|\nu| \ll \mu$.*

Demostración. Sea P, N una descomposición de Hahn para ν. Supongamos que $\nu \ll \mu$. Si $\mu(E) = 0$, entonces $\mu(E \cap P) = \mu(E \cap N) = 0$. Por lo tanto, $\nu(E \cap P) = \nu(E \cap N) = 0$, así $|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = 0$. El recíproco se sigue de que $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$. ■

Lema 7.5 *Sean ν_1, ν_2 medidas signadas en $(X,\mathscr{A})$, con al menos una de ellas finita, y μ una medida en $(X,\mathscr{A})$. Si $\nu_1 \perp \mu$, $\nu_2 \perp \mu$ y $\nu_1 - \nu_2 \ll \mu$, entonces $\nu_1 = \nu_2$. En particular, si $\nu \perp \mu$ y $\nu \ll \mu$, entonces $\nu = 0$.*

Demostración. Sean $E_i, F_i \in \mathscr{A}$, tal que $E_i \cap F_i = \emptyset$, $E_i \cup F_i = X$, E_i es un conjunto nulo para ν_i y F_i es un conjunto nulo para μ, $i = 1,2$. Ya que $\nu_1 - \nu_2 \ll \mu$, entonces $F_1 \cup F_2$ es un conjunto nulo para $\nu_1 - \nu_2$. Por lo tanto, $\nu_1(B) = \nu_2(B)$ para cada $B \subset F_1 \cup F_2$, $B \in \mathscr{A}$. Sea $A \in \mathscr{A}$, entonces

$$\begin{aligned}
\nu_1(A) &= \nu_1(A \cap E_1) + \nu_1(A \cap F_1) \\
&= \nu_2(A \cap E_2) + \nu_2(A \cap F_1) \\
&= \nu_2(A \cap E_2) + \nu_2(A \cap F_1 \cap F_2) + \nu_2(A \cap F_1 \cap E_2) \\
&= \nu_2(A \cap E_2) + \nu_2(A \cap F_1 \cap F_2) \\
&= \nu_2(A \cap E_2) + \nu_1(A \cap F_1 \cap F_2) \\
&= \nu_2(A \cap E_2) + \nu_1(A \cap F_1 \cap F_2) + \nu_1(A \cap F_2 \cap E_1) \\
&= \nu_2(A \cap E_2) + \nu_1(A \cap F_2) \\
&= \nu_2(A \cap E_2) + \nu_2(A \cap F_2) = \nu_2(A).
\end{aligned}$$

De esta forma, $\nu_1 = \nu_2$. ■

El término "absolutamente continua" se deriva del siguiente resultado.

Teorema 7.6 *Sean ν una medida signada finita y μ una medida en $(X,\mathscr{A})$. Entonces $\nu \ll \mu$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$, entonces $|\nu(E)| < \varepsilon$.*

Demostración. Sea $E \in \mathscr{A}$, tal que $\mu(E) = 0$ y supongamos que la condición se cumple, entonces $|\nu(E)| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, $|\nu(E)| = 0$. Por otra parte, si la condición no se cumple, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $E_n \in \mathscr{A}$ con $\mu(E_n) < 2^{-n}$ y $|\nu(E_n)| \geq \varepsilon$. Sea $F = \limsup E_n$, por el Lema de Borel-Cantelli resulta $\mu(F) = 0$. Como $|\nu|$ es medida finita

$$|\nu|(F) = \lim_{k\to\infty} |\nu| \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \right) \geq \lim_{k\to\infty} |\nu|(E_k) \geq \lim_{k\to\infty} |\nu(E_k)| \geq \varepsilon.$$

Así, del lema 7.4 se sigue que ν no es absolutamente continua con respecto a μ. ■

El siguiente ejemplo nos muestra que el resultado presedente no se cumple en general, aún si ν es σ-finita.

Ejemplo 7.2 *Sea ν la medida de contar en $\mathbb{N}$ y $\mu(E)=\int_E f\,d\nu$, con $f(x)=2^{-x}$. Claramente $\nu \ll \mu$ ($\mu \ll \nu$). Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$, entonces $\nu(E) < \varepsilon$. Sea $\varepsilon = 1/2$, entonces existe $\delta(1/2) > 0$ con la propiedad antes referida. Puesto que $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=n_0}^{\infty} 2^{-k} < \delta(1/2)$. Sea $E_0 = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$. Entonces $\mu(E_0) < \delta(1/2)$, pero $\nu(E_0) = +\infty$.*

Corolario 7.3 *Sean ν una medida signada finita y μ una medida en $(X,\mathscr{A})$. Si $\nu \ll \mu$ y $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$, entonces $\lim_{n\to\infty}\nu(A_n)=0$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$, entonces $|\nu(E)| < \varepsilon$. Para $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $\mu(A_n) < \delta$. Por lo tanto, $|\nu(A_n)| < \varepsilon$ para toda $n \geq n_0$. ■

Otra consecuencia inmediata del teorema 7.6 es el:

Ejemplo 7.3 *Si $f \in \mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$, entonces $\int_E |f|\,d\mu < \varepsilon$.*

Lema 7.6 *Sean ν y μ medidas finitas en $(X,\mathscr{A})$. Se cumple sólo una de las siguientes afirmaciones: $\nu \perp \mu$, o existen $\varepsilon > 0$ y $E \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(E) > 0$ y E es un conjunto positivo para $\nu - \varepsilon\mu$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea P_n, N_n una descomposición de Hahn para $\nu - n^{-1}\mu$. Sea $P = \cup_{n=1}^{\infty} P_n$ y $N = \cap_{n=1}^{\infty} N_n = P^c$. Nótese que N es un conjunto negativo para cada $\nu - n^{-1}\mu$. Por lo tanto, $0 \leq \nu(N) \leq n^{-1}\mu(N)$, $n \in \mathbb{N}$, así $\nu(N) = 0$. Si $\mu(P) = 0$, implica que $\nu \perp \mu$. Si $\mu(P) > 0$, entonces $\mu(P_n) > 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$; y P_n es un conjunto positivo para $\nu - n^{-1}\mu$. ■

El siguiente resultado será útil, por ejemplo, en el estudio de los funcionales lineales de los espacios L^p.

Teorema 7.7 (Lebesgue-Radon-Nikodym) *Sean ν una medida signada σ-finita y μ una medida σ-finita en $(X,\mathscr{A})$. Existen medidas λ, ρ signadas σ-finitas ú nicas en $(X,\mathscr{A})$ tal que*

$$\nu = \lambda + \rho \ \text{ y } \ \lambda \perp \mu, \ \rho \ll \mu.$$

Más aún, existe una función medible f tal que $d\rho = f\,d\mu$, y cualesquiera dos funciones que cumplan lo anterior son iguales μ -cdq.

Demostración. Caso ν y μ medidas finitas. Sea

$$\mathsf{F} = \left\{ f \in M^+(X,\mathscr{A}) : \int_E f\,d\mu \leq \nu(E) \ \text{para todo } E \in \mathscr{A} \right\}.$$

F es no vacío pues $0 \in \mathsf{F}$. Sean $f, g \in \mathsf{F}$ y

$$\begin{aligned} A &= \{x : f(x) > g(x)\} \\ &= (\{x : f(x) = \infty\} \cap \{x : g(x) < \infty\}) \cup \{x : \infty > f(x) > g(x)\} \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Si $h = \max\{f, g\}$ y $E \in \mathscr{A}$, entonces

$$\int_E h d\mu = \int_{E\cap A} f d\mu + \int_{E\backslash A} g d\mu \leq \nu(E \cap A) + \nu(E\backslash A) = \nu(E).$$

Por lo tanto, $h \in \mathsf{F}$. Sea $a = \sup\left\{\int f d\mu : f \in \mathsf{F}\right\}$. Nótese que $a \leq \nu(X) < +\infty$. Sea (f_n) una sucesión en F tal que $\int f_n d\mu \to a$, $n \to \infty$. Sean $g_n = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$ y $f = \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Puesto que $g_n \in \mathsf{F}$,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \leq a.$$

Por lo tanto, $a = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu$. Ya que $g_n \uparrow f$, tenemos por el teorema de la convergencia monótona que $f \in \mathsf{F}$ y $\int f d\mu = a$. (De aquí vemos que, $0 \leq f < +\infty$ μ-cdq. Así, f puede tomarse como una función real.) Ya que $f \in \mathsf{F}$, entonces $d\lambda := d\nu - f d\mu$ es una medida. Veamos que $\lambda \perp \mu$. Si no fuese así, por el lema 7.6, existen $\varepsilon > 0$ y $E \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(E) > 0$ y E es un conjunto positivo para $\lambda - \varepsilon\mu$. Lo que implica que $d\nu - (f + \varepsilon 1_E)d\mu = d\lambda - \varepsilon 1_E d\mu \geq 1_E d\lambda - \varepsilon 1_E d\mu \geq 0$, es decir, $(f + \varepsilon 1_E)d\mu \leq d\nu$. As í, $f + \varepsilon 1_E \in \mathsf{F}$ y $\int (f + \varepsilon 1_E)d\mu = a + \varepsilon\mu(E) > a$, lo que contradice la definición de a. De esta manera, la existencia de λ, f y $d\rho = f d\mu$ está demostrada. Veamos la unicidad. Supongamos que $\lambda' \perp \mu$ y $d\nu = d\lambda' + f' d\mu$. Resulta que $(\lambda - \lambda') \perp \mu$ y $d\lambda - d\lambda' = \left(f - f'\right)d\mu \ll d\mu$. Del lema 7.5, se concluye $d\lambda - d\lambda' = \left(f - f'\right)d\mu = 0$. Así, $\lambda = \lambda'$ y por el corolario 6.4 (ii), $f = f'$ μ-cdq.

Caso ν y μ medidas σ -finitas. Existe una sucesión $\left(A_j\right)$ en $\mathscr{A}$ de conjuntos ajenos tal que $X = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ y $\nu\left(A_j\right) < +\infty$, $\mu\left(A_j\right) < +\infty$, $j \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, definamos las medidas finitas en $(X, \mathscr{A})$

$$d\mu_j = 1_{A_j} d\mu, \;\; d\nu_j = 1_{A_j} d\nu.$$

Por el primer caso, $d\nu_j = d\lambda_j + f_j \, d\mu_j$ con $\lambda_j \perp \mu_j$. Defínase la función $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j 1_{A_j}$. Sea $\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j$, entonces $d\nu = d\lambda + f d\mu$ (hemos usado que $\int_A f_j d\mu_j = \int_A 1_{A_j} f d\mu$). Puesto que $\int f_j d\mu_j \leq \nu_j(X) = \nu(A_j)$, se sigue que $f d\mu$ es σ-finita y además $d\lambda$ también lo es. En efecto, de

$$\lambda_j(A_j^c) = \nu_j(A_j^c) - \int_{A_j^c} f_j d\mu_j = 0 \tag{7.6}$$

y $A_i \subset A_j^c$, concluimos $\lambda_j(A_i) = 0$, si $i \neq j$. Así, $\lambda(A_i) = \lambda_i(A_i) < +\infty$.

Veamos que $\lambda \perp \mu$. Ya que $\lambda_j \perp \mu_j$, existen E_j, $F_j \in \mathscr{A}$, $E_j \cup F_j = X$ y $E_j \cap F_j = \varnothing$ y $\lambda_j(F_j) = \mu_j(E_j) = 0$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Sea $E = \cup_{j=1}^{\infty}(E_j \cap A_j)$ y $F = E^c$, entonces

$$\mu(E) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(E_j) = 0$$

y, de (7.6),

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\right)(F) \le \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(E_j^c \cup A_j^c) \le \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(F_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(A_j^c) = 0.$$

Así, $\lambda \perp \mu$. La unicidad se demuestra como en el primer caso.
Caso ν medida signada. Aplicamos el procedimiento anterior a las medidas ν^+, ν^- y restamos las medidas que resulten. ■

La descomposición $\nu = \lambda + \rho$ con $\lambda \perp \mu$ y $\rho \ll \mu$ se llama *descomposición de Lebesgue* de ν con respecto a μ. Si $\nu \ll \mu$, entonces $\lambda \ll \mu$. Por lo tanto (lema 7.5), $\nu = \rho$, es decir, $d\nu = f\,d\mu$. Este resultado es conocido como *teorema de Radon-Nikodym*, y f se llama *derivada de Radon-Nikodym* de ν con respecto a μ. La función f se denota por

$$d\nu/d\mu.$$

La derivada de Radon-Nikodym tiene propiedades similares a la derivada (véanse los ejercicios 173, 174). La función f no es necesariamente μ-integrable, pero si ν es una medida signada finita entonces f es igual μ-cdq a una función μ-integrable.

Problemas

Problema 169 *Sean $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y μ medidas en $(X, \mathscr{A})$.*
(i) Si $\nu_j \perp \mu$, $j \in \mathbb{N}$ demostrar que $\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \perp \mu$.
(ii) Si $\nu_j \ll \mu$, $j \in \mathbb{N}$ demostrar que $\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \ll \mu$.

Problema 170 *Sean λ, μ medidas σ-finitas en $(X, \mathscr{A})$ y $\lambda \ll \mu$. Si $g \in M^+(X, \mathscr{A})$ demostrar que*

$$\int g\,d\lambda = \int g \frac{d\lambda}{d\mu} d\mu.$$

Problema 171 *Sean ν una medida signada en $(X, \mathscr{A})$ y μ una medida en $(X, \mathscr{A})$, tal que $\nu \ll \mu$ y $\int f\,d\mu = 0$, con $f \ge 0$. Demostrar que $\int f\,d\nu = 0$.*

Problema 172 (i) *Sea X un conjunto no contable y $\mathscr{A}$ la familia de todos los subconjuntos E de X tales que E o $X \backslash E$ es contable. Sea $\mu(E)$ igual al número de elementos en E si E es finito o $+\infty$ en caso contrario, y sea $\lambda(E) = 0$ si E es contable o*

$+\infty$ si E es no contable. Demostrar que $\lambda \ll \mu$ y que el teorema de Radon-Nikodym no se cumple.
(ii) Sea $X=[0,1]$ y sea $\mathscr{A}$ la σ-á lgebra de Borel de X. Sea μ la medida de contar en X y λ la medida de Lebesgue en X. Demostrar que $\lambda \ll \mu$ y que el teorema de Radon-Nikodym no se cumple.

Problema 173 *Sean λ, μ, ν medidas σ-finitas en $(X,\mathscr{A})$. Demostrar que si $\nu \ll \lambda$ y $\lambda \ll \mu$, entonces*

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} \quad \mu\text{-cdq.}$$

Además, demostrar que si $\lambda_j \ll \mu$, para $j=1,2$, entonces

$$\frac{d}{d\mu}(\lambda_1+\lambda_2) = \frac{d\lambda_1}{d\mu} + \frac{d\lambda_2}{d\mu} \quad \mu\text{-cdq.}$$

Problema 174 *Si λ y μ son σ-finitas, $\lambda \ll \mu$, y $\mu \ll \lambda$ demostrar que*

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{1}{d\mu/d\lambda} \quad \mu\text{-cdq.}$$

Problema 175 *Sean μ, ν medidas σ-finitas en $(X,\mathscr{A})$ tal que $\nu \ll \mu$ y $\lambda = \mu + \nu$. Demostrar que $0 \le d\nu/d\lambda < 1$ μ-cdq y*

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{\frac{d\nu}{d\lambda}}{1-\frac{d\nu}{d\lambda}} \quad \mu\text{-cdq.}$$

Problema 176 *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida. Sea ν definida por*

$$\nu(A) = \begin{cases} 0, & \mu(A)=0, \\ +\infty, & \mu(A)>0. \end{cases}$$

Demostrar que ν es una medida, $\nu \ll \mu$ y encontrar $d\nu/d\mu$.

Problema 177 *Dada la función $h:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por*

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0<x<1, \\ 1, & 1 \le x < 2, \\ x-1, & 2 \le x < +\infty. \end{cases}$$

Encontrar la descomposición de Lebesgue de λ_h^* con respecto a λ^*.

Problema 178 *Sean (f_n) una sucesión en $\mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$ que converge a una función integrable f. Demostrar que si $\lim_{n\to\infty}\int |f_n-f|d\mu = 0$ y $\lim_{n\to\infty}\mu(A\triangle A_n)=0$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f_n d\mu = \int_A f\,d\mu.$$

Problema 179 *Sea* λ *la medida de Lebesgue en* $[0,1]$ *y* μ *una medida finita en* $\mathscr{B}([0,1])$*. Supóngase que* $0 < c < 1$ *y que para cada* $A \in \mathscr{B}([0,1])$*,* $\mu(A) = c$ *siempre que* $\lambda(A) = c$*. Demostrar que* $\mu = \lambda$*.*

Problema 180 *Sean* μ*,* ν *cargas en* $(X, \mathscr{A})$*, tal que* $\nu \ll \mu$*. Demostrar que si* $E \subset X$ *y* $\mu^*(E) = 0$*, entonces* $\nu^*(E) = 0$*. Además, si* μ *es* σ*-finita demostrar que* $\mathscr{A}_\mu^* \subset \mathscr{A}_\nu^*$*.*

Chapter 8

Espacios L^p

Por $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ se denotará la colección de conjuntos formados por aquellas funciones que son iguales μ-cdq tal que su potencia p-ésima es integrable. Se demostrará que L^p es un espacio vectorial normado completo (teorema de Riesz-Fischer) y se caracterizarán sus funcionales lineales (teorema de representación de Riesz). En este capítulo se asumirá un espacio de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$ fijo y se supondrá que las funciones toman valores en los números reales.

8.1 Funciones convexas y desigualdades

Definición 8.1 *Una función $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, se llama convexa si para cualesquiera $x', y' \in (a,b)$ y $t \in [0,1]$ se cumple la desigualdad*

$$\varphi\left((1-t)x' + ty'\right) \leq (1-t)\varphi\left(x'\right) + t\varphi\left(y'\right). \tag{8.1}$$

Gráficamente, la desigualdad (8.1) significa que para cualesquiera dos puntos $(x', \varphi(x'))$, $\left(y', \varphi\left(y'\right)\right)$ el segmento de línea que los une está por encima de la gráfica de φ. Por otra parte, si $a < x < u < v < y < b$, tomando

$$t = \frac{u-x}{v-x},\ x' = x,\ y' = v \quad \text{y} \quad t = \frac{v-u}{y-u},\ x' = u,\ y' = y,$$

en la desigualdad (8.1), resulta (hay que hacer los productos para verificar la igualdad)

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(x)}{u-x} \leq \frac{\varphi(v) - \varphi(u)}{v-u} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(u)}{y-u}. \tag{8.2}$$

Más aún, no es difícil demostrar que la condición (8.2) es suficiente para que φ sea convexa. Si φ es diferenciable tenemos, del teorema del valor medio y (8.2), que φ es convexa si y sólo si φ' es creciente.

Proposición 8.1 *Si $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ es convexa, entonces φ es continua.*

Demostración. Sea $u \in (a,b)$ arbitraria fija. Tomemos $x, v', v, y \in (a,b)$ tal que $x < v' < u < v < y$. Despejando $\varphi(v)$ de (8.2), obtenemos

$$\varphi(u) + \frac{\varphi(u) - \varphi(x)}{u - x}(v - u) \leq \varphi(v) \leq \varphi(u) + \frac{\varphi(y) - \varphi(u)}{y - u}(v - u).$$

En consecuencia, $\lim_{v \downarrow u} \varphi(v) = \varphi(u)$. Ahora, si tomamos

$$t = \frac{v' - x}{u - x},\ x' = x,\ y' = u \quad \text{y} \quad t = \frac{u - v'}{y - v'},\ x' = v',\ y' = y,$$

en (8.1) llegamos a la desigualdad

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(x)}{u - x} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(v')}{u - v'} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(u)}{y - u}.$$

De aquí

$$\varphi(u) - \frac{\varphi(y) - \varphi(u)}{y - u}(u - v') \leq \varphi(v') \leq \varphi(u) - \frac{\varphi(u) - \varphi(x)}{u - x}(u - v').$$

Por lo tanto, $\lim_{v' \uparrow u} \varphi(v') = \varphi(u)$. Por ende φ es continua en u. ∎

Teorema 8.1 (Desigualdad de Jensen) *Sea μ una medida finita en $(X, \mathscr{A})$. Si $f \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$, $f(X) \subset (a,b)$ y φ es una función convexa en (a,b) tal que $\varphi \circ f \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$, entonces*

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(X)} \int f \, d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(X)} \int (\varphi \circ f) \, d\mu.$$

Demostración. Nótese que por ser φ continua, $\varphi \circ f$ es medible. Sea $u = (\mu(X))^{-1} \int f \, d\mu$, así $a < u < b$ (si, por ejemplo, $u = a$, entonces $\int (f - a) d\mu = 0$, luego $f = a$, μ-cdq, $\mu(X) = \mu(\{x : f(x) \neq a\}) = 0$). Sea

$$\beta = \sup\left\{\frac{\varphi(u) - \varphi(x)}{u - x} : a < x < u\right\},$$

entonces

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(x)}{u - x} \leq \beta, \quad a < x < u,$$

y de (8.2),

$$\beta \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(u)}{y - u}, \quad u < y < b.$$

Por lo tanto,

$$\varphi(u) + \beta(x - u) \leq \varphi(x), \quad a < x < b.$$

De lo cual se sigue que $(x = f(t))$

$$\varphi(f(t)) - \varphi(u) - \beta(f(t) - u) \geq 0, \quad t \in X. \tag{8.3}$$

Si integramos ambos lados de (8.3) con respecto a μ, usamos la hipótesis y la definición de u, obtenemos la desigualdad. ∎

Ejemplo 8.1 *Sean $X = \{1,\ldots,n\}$ y $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$. Definamos la medida μ y la función $f : X \to \mathbb{R}$, como $\mu(\{i\}) = 1/n$ y $f(i) = \log y_i$, $y_i > 0$, para cada $i \in X$. Consideremos la función convexa $\varphi(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. De la desigualdad de Jensen obtenemos,*

$$\exp\left(\int f\,d\mu\right) \le \int \exp(f)\,d\mu,$$

es decir,

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\mu(\{i\})\right) \le \sum_{i=1}^{n} \exp(f(i))\mu(\{i\}),$$

y de la definición de f y de μ se sigue que

$$(y_1\cdots y_n)^{1/n} \le \frac{y_1+\cdots+y_n}{n}.$$

Es decir, la media geométrica es menor o igual que la media aritmética.

Problemas

Problema 181 *Sea $f(x) = |x|^p$, $x \in \mathbb{R}$. Determinar los valores de p para los cuales:*
i) f es convexa,
ii) $f'(x)$ existe para toda $x \in \mathbb{R}$,
iii) $f''(x)$ existe para toda $x \in \mathbb{R}$.

Problema 182 *Sean $y_i, \alpha_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Demostrar que*

$$y_1^{\alpha_1}\cdots y_n^{\alpha_n} \le \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n.$$

Problema 183 *Sea $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ no decreciente. Demostrar que la función $F : [a,b) \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(y)\,dy$ es convexa en (a,b).*

Problema 184 (Desigualdad de Young) *Sea φ una función real continua, estrictamente creciente definida en $[0,+\infty)$, tal que $\lim_{u\to\infty}\varphi(u) = +\infty$ y $\varphi(0) = 0$. Sea $\psi = \varphi^{-1}$. Para toda $x \in [0,+\infty)$ defínanse*

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(u)\,du \quad y \quad \Psi(x) = \int_0^x \psi(u)\,du.$$

Si $a, b \in [0,+\infty)$ demostrar que

$$ab \le \Phi(a) + \Psi(b),$$

y que la igualdad ocurre si y sólo si $b = \varphi(a)$.

Problema 185 (Desigualdad de Zhubr) *Sea $N:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función convexa no negativa y diferenciable. Si u y v son funciones medibles tal que $N\circ u\in\mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$ y*

$$\int (N\circ v)d\mu \leq \int (N\circ u)d\mu,$$

demostarar que

$$\int (N'\circ u)v d\mu \leq \int (N'\circ u)u d\mu.$$

8.2 Propiedades básicas de los espacios L^p

Definición 8.2 *Sean $1\leq p<+\infty$ y $f:X\to\mathbb{R}$ una función medible. La norma $\mathscr{L}^p$ de f se define como*

$$\|f\|_p=\left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

y

$$\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)=\left\{f:X\to\mathbb{R}: f \text{ es medible y } \|f\|_p<+\infty\right\}.$$

Si $p=+\infty$ la norma $\mathscr{L}^\infty$ de f se define por

$$\|f\|_\infty=\inf\{M\geq 0:\mu(\{x:|f(x)|>M\})=0\}, \tag{8.4}$$

(con la convención de que $\inf\varnothing=+\infty$) y

$$\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{A},\mu)=\left\{f:X\to\mathbb{R}: f \text{ es medible y } \|f\|_\infty<+\infty\right\}.$$

$\|f\|_\infty$ se llama supremo esencial de f y $\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{A},\mu)$ es el espacio de las funciones esencialmente acotadas. ($\|f\|_\infty$ también se suele denotar por $\operatorname{ess}\sup f$.)

Proposición 8.2 *Si f es una función medible, entonces $|f|\leq\|f\|_\infty$ μ-cdq. Si $a<\|f\|_\infty$, entonces $\mu(\{x:|f(x)|>a\})>0$.*

Demostración. Para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $M_n>0$ tal que $\|f\|_\infty\leq M_n<\|f\|_\infty+1/n$ y $\mu(\{x:|f(x)|>M_n\})=0$. Del hecho que

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left\{x:|f(x)|>\|f\|_\infty\right\}\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x:|f(x)|>\|f\|_\infty+\frac{1}{n}\right\}\right)\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{x:|f(x)|>\|f\|_\infty+\frac{1}{n}\right\}\right)\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x:|f(x)|>M_n\})=0,
\end{aligned}$$

se sigue la primera afirmación de la proposición. Por otra parte, si $a < \|f\|_\infty$ es inmediato que $\mu(\{x : |f(x)| > a\}) > 0$. ■

La primera parte de la proposición anterior nos indica que el ínfimo en (8.4) se alcanza. Si $1 \leq p < +\infty$, es claro que $\|af\|_p = |a|\,\|f\|_p$, para cada $a \in \mathbb{R}$. Cuando $p = +\infty$ y $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ procedemos como sigue,

$$|af| \leq \|af\|_\infty \quad \mu\text{-cdq},$$

entonces $|f| \leq \|af\|_\infty / |a|$ μ-cdq, así $\|f\|_\infty \leq \|af\|_\infty / |a|$. Puesto que $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ-cdq, entonces

$$|af| = |a||f| \leq |a|\,\|f\|_\infty \quad \mu\text{-cdq},$$

en consecuencia, $\|af\|_\infty \leq |a|\,\|f\|_\infty$.

Sean $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$, relacionados a través de

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

En tal caso p y q se llaman *índices conjugados*. Si $p = 1$ (respectivamente, $+\infty$) diremos que su índice conjugado es $q = +\infty$ (respectivamente, 1). En general, dado $1 \leq p \leq +\infty$ denotaremos por q al índice conjugado de p.

Teorema 8.2 (Desigualdad de Hölder) *Sean $1 < p < +\infty$, $f \in \mathscr{L}^p$ y $g \in \mathscr{L}^q$, entonces $fg \in \mathscr{L}^1$ y $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Demostración. Supongamos que $\|f\|_p \|g\|_q \neq 0$. Puesto que la función $\ln(x)$ es concava (es decir, $-\ln$ es convexa), entonces

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}\right) &\geq \frac{1}{p}\ln\left(\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}\right) + \frac{1}{q}\ln\left(\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}\right) \\
&= \ln\left(\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p}} + \ln\left(\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \ln\left(\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}\right)^{\frac{1}{q}} = \ln\left(\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q}\right).
\end{aligned}$$

Integrando la desigualdad resultante obtenemos la afirmación. ■

La desigualdad presedente también es cierta para $p = \infty$. Cuando $p = q = 2$ la desigualdad del teorema 8.2 se llama *desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

Corolario 8.1 *Si $f \in \mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$, entonces*

$$\|f\|_p = \sup\left\{\left|\int fg\,d\mu\right| : \|g\|_q = 1\right\}.$$

La afirmación es cierta para $p = +\infty$ si μ es σ-finita.

Demostración. Caso $p=1$. Usando la proposición 8.2 resulta, $\left|\int fg\,d\mu\right| \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$. Por lo tanto, $\sup\left\{\left|\int fg\,d\mu\right| : \|g\|_\infty = 1\right\} \leq \|f\|_1$. La desigualdad contraria se obtiene al tomar a $g = \mathrm{sig}(f)$, donde

$$\mathrm{sig}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Caso $1 < p < +\infty$. Por la desigualdad de Hölder $\|f\|_p$ es una cota superior para el conjunto $\left\{\left|\int fg\,d\mu\right| : \|g\|_q = 1\right\}$. La desigualdad opuesta resulta de notar que la función $g = \left\| |f|^{p-1} \right\|_q^{-1} |f|^{p-1}\mathrm{sig}(f) \in \mathscr{L}^q$ cumple que $\|g\|_q = 1$ y $\left|\int fg\,d\mu\right| = \|f\|_p$.

Caso $p = +\infty$. De la proposición 8.2 tenemos que $\left|\int fg\,d\mu\right| \leq \|g\|_1 \|f\|_\infty$. Por lo tanto, $\sup\left\{\left|\int fg\,d\mu\right| : \|g\|_1 = 1\right\} \leq \|f\|_\infty$. De la proposición 3.2 se sigue que existe una sucesión creciente (A_n) tal que $X = \cup_{n=1}^\infty A_n$, $\mu(A_n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces $0 < \mu(A_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_\varepsilon \cap A_n)$, donde $A_\varepsilon = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \mu(A_\varepsilon \cap A_{n_0}) \leq \mu(A_{n_0}) < +\infty$. Sea $g_\varepsilon = \mu(A_\varepsilon \cap A_{n_0})^{-1} 1_{A_\varepsilon \cap A_{n_0}} \mathrm{sig}(f)$, entonces $\|g_\varepsilon\|_1 = 1$ y

$$\begin{aligned} \sup\left\{\left|\int fg\,d\mu\right| : \|g\|_1 = 1\right\} &\geq \left|\int fg_\varepsilon\,d\mu\right| \\ &= \frac{1}{\mu(A_\varepsilon \cap A_{n_0})} \int_{A_\varepsilon \cap A_{n_0}} |f|\,d\mu \geq \|f\|_\infty - \varepsilon. \end{aligned}$$

Por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario obtenemos la desigualdad contraria. ■

Proposición 8.3 *Si $\mu(X) < +\infty$ y $1 \leq r < s \leq +\infty$, entonces $\mathscr{L}^s(X, \mathscr{A}, \mu) \subset \mathscr{L}^r(X, \mathscr{A}, \mu)$ y*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s \, (\mu(X))^{1/r - 1/s}.$$

Demostración. Sea $f \in \mathscr{L}^s(X, \mathscr{A}, \mu)$.

Caso $s < +\infty$. Usando la desigualdad de Hölder con los exponentes conjugados s/r y $s/(s-r)$, resulta

$$\|f\|_r^r = \int |f|^r \cdot 1 \, d\mu \leq \||f|^r\|_{s/r} \|1\|_{s/(s-r)} = \|f\|_s^r \, (\mu(X))^{(s-r)/s}.$$

Caso $s = +\infty$. De la proposición 8.2,

$$\|f\|_r = \left(\int |f|^r d\mu\right)^{1/r} \leq \|f\|_\infty \left(\int 1 \, d\mu\right)^{1/r} = \|f\|_\infty \, (\mu(X))^{1/r}.$$

Como se quería demostrar. ■

El siguiente ejemplo muestra que la condición $\mu(X) < +\infty$ es necesaria en la proposición anterior.

Ejemplo 8.2 *Sean $X = \mathbb{N}$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$ y μ la medida de contar. Sea $f : X \to \mathbb{R}$, definida como $f(n) = 1/n$, $n \in X$. Entonces*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

y

$$\|f\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Proposición 8.4 *Sea f una función simple tal que $f \in \mathscr{L}^r$, $1 \leq r < +\infty$, entonces $f \in \mathscr{L}^s$, $1 \leq s < +\infty$.*

Demostración. Sean $\{a_1, ..., a_n\}$ los valores de f. Así, $f = \sum_{k=1}^{n} a_k 1_{f^{-1}(\{a_k\})}$, donde podemos suponer que $a_k \neq 0$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^r \mu(f^{-1}(\{a_k\})) = \int |f|^r d\mu < +\infty.$$

Por lo tanto, $\mu(f^{-1}(\{a_k\})) < +\infty$, para cada $k = 1, ..., n$, lo que implica que

$$\int |f|^s d\mu = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^s \mu(f^{-1}(\{a_k\})) < +\infty.$$

Como se quería demostrar. ∎

El siguiente ejemplo nos muestra que puede ocurrir que $f \in \mathscr{L}^r$, pero $f \notin \mathscr{L}^s$, para $1 \leq r < s$.

Ejemplo 8.3 *Sean $1 \leq r < s$, $X = \mathbb{N}$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$ y $\mu(\{n\}) = n^{r-s}$, $n \in X$. Consideremos la función $f(n) = n^b$, $n \in X$, donde b es algún número fijo en el intervalo $((s-r-1)/s, (s-r-1)/r)$. Entonces*

$$\|f\|_r^r = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^r \mu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{br} n^{r-s} < +\infty,$$

pues $s - r - br > 1$, y

$$\|f\|_s^s = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^s \mu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{bs} n^{r-s} = +\infty,$$

ya que $s - r - bs \leq 1$. (Véase el teorema 3.28 de [26].) Nótese que si $1 + r < s$, entonces $\mu(X) < +\infty$.

Sin embargo, hay espacios de medida infinita donde se cumple que si $f \in \mathscr{L}^r$, entonces $f \in \mathscr{L}^s$, para $1 \leq r < s < +\infty$.

Ejemplo 8.4 *Sean $1 \leq r < s$, $X = \mathbb{N}$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$ y μ la medida de contar. Sea $f \in \mathscr{L}^r$, entonces*

$$\frac{|f(n)|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f(k)|^r\right)^{1/r}} \leq 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

en consecuencia

$$\left(\frac{|f(n)|}{\|f\|_r}\right)^s \leq \left(\frac{|f(n)|}{\|f\|_r}\right)^r, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Así,

$$\frac{\|f\|_s^s}{\|f\|_r^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|^s}{\|f\|_r^s} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|^r}{\|f\|_r^r} = \frac{\|f\|_r^r}{\|f\|_r^r} = 1.$$

Lo que implica que, $\|f\|_s \leq \|f\|_r$.

Una propiedad más de la función $\|\cdot\|_p$ es:

Corolario 8.2 (Desigualdad de Minkowski) *Sean $1 \leq p \leq +\infty$ y $f, g \in \mathscr{L}^p$, entonces*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Demostración. Caso $1 \leq p < +\infty$**.** Del corolario 8.1 obtenemos,

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p &= \sup\left\{\left|\int (f+g)hd\mu\right| : \|h\|_q = 1\right\} \\
&\leq \sup\left\{\left|\int fhd\mu\right| + \left|\int ghd\mu\right| : \|h\|_q = 1\right\} \\
&\leq \sup\left\{\left|\int fhd\mu\right| : \|h\|_q = 1\right\} + \sup\left\{\left|\int ghd\mu\right| : \|h\|_q = 1\right\} \\
&= \|f\|_p + \|g\|_p .
\end{aligned}$$

Caso $p = +\infty$**.** De la proposición 8.2 resulta que

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \mu\text{-cdq.}$$

Lo que implica, $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. ■

Como una consecuencia inmediata de la desigualdad de Minkowski tenemos que $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$, $1 \leq p \leq +\infty$, es un espacio vectorial real.

La función $\|\cdot\|_p$ en $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ no es una norma (ver la página 9) pues si $\|f\|_p = 0$, entonces $f = 0$ μ-cdq. Esto nos sirve de motivación para introducir el siguiente concepto. Decimos que $f \sim g$ si $f = g$ μ-cdq. Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$ y si $f \in \mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$ denotamos por $[f]$ a la clase de equivalencia representada por f, es decir, $[f] = \{g \in \mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu) : g \sim f\}$. Sea $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ la colección de todas las clases de equivalencia, $L^p = \mathscr{L}^p/\sim$. $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ es un espacio vectorial real con las operaciones: $\alpha \in \mathbb{R}$, $[f],[g] \in L^p(X,\mathscr{A},\mu)$,

$$\alpha[f] = [\alpha f], \quad [f]+[g] = [f+g].$$

Además, la función

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p, \quad f \in \mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu),$$

es una norma en $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$. En efecto, por ejemplo, notemos que si $\|[f]\|_p = 0$, entonces $f = 0$, μ-cdq. Por lo tanto, $[f] = [0]$.

Aunque $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ no es un espacio de funciones, se acostumbra identificar una clase de equivalencia con su representante. Así, $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ se puede considerar como un espacio de funciones. De esta manera, $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$ lo entendemos como $L^p = L^p(X,\mathscr{A},\mu)$.

Recordemos lo siguiente. La norma $\|\cdot\|_p$ induce una métrica en L^p con la cual podemos introducir, por ejemplo, el concepto de convergencia. Más precisamente, si (f_n) es una sucesión en L^p, decimos que (f_n) converge a f en L^p si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Análogamente, decimos que (f_n) es una sucesión de Cauchy en L^p si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n,m \geq n_0$, entonces $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$. De aquí surge la pregunta natural si el espacio normado (métrico) L^p es completo. Es decir, si toda sucesión de Cauchy en L^p es convergente. Veremos que esto es cierto, pero antes necesitamos el siguiente resultado.

Lema 8.1 *Sea (g_k) una sucesión de funciones medibles.*
(i) Si (g_k) converge μ-cdq, entonces (g_k) converge μ-cdq a una función medible.
(ii) Si para casi toda $x \in X$ existe un $k_0 = k_0(x) \in \mathbb{N}$ tal que $|g_{k+1}(x) - g_k(x)| < 2^{-k}$ para toda $k \geq k_0$, entonces (g_k) converge μ-cdq a una función medible.

Demostración. (i) : Sea $C = \{x \in X : (g_k(x)) \text{ es convergente}\}$. Además, N un conjunto medible tal que $\mu(N) = 0$ y $X \backslash C \subset N$. Defínase la función

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k\to\infty} g_k(x), & x \in N^c, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Puesto que $f = \lim_{k\to\infty} g_k 1_{N^c}$, entonces f es medible y (g_k) converge μ-cdq a f.
(ii) : Sea $x \in X$, tal que se cumple la propiedad enunciada en (ii). Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $k_1 \in \mathbb{N}$, tal que $2^{-k_1} < \varepsilon$. Si $n > m > k_1 \vee k_0 = k_0(x)$

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_{n-1}(x)| + \cdots + |g_{m+1}(x) - g_m(x)| \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, para casi toda $x \in X$, $(g_k(x))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, debido a la primera parte, tenemos que (g_k) converge μ-cdq a una función medible. ■

Teorema 8.3 (Riesz-Fischer) *El espacio vectorial normado $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$, $1 \leq p \leq +\infty$, es completo.*

Demostración. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$. Debido a la proposición 1.3, con $a = 2^{-2}$, existe una subsucesión $\left(f_{n_k}\right)_k$ de (f_n) tal que $\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p < 2^{-2k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por otra parte, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ si $m, n \geq N$. Sea $n \geq N$ arbitrario fijo y tomemos $m = n_k$, entonces

$$\left\|f_n - f_{n_k}\right\|_p < \varepsilon, \; k \geq N. \tag{8.5}$$

Caso $1 \leq p < +\infty$. Sea $A_k = \left\{x \in X : \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| \geq 2^{-k}\right\}$. Usando la desigualdad de Chebyshev se ve que $\mu(A_k) \leq 2^{kp}\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p^p < 2^{-kp}$. De esto obtenemos, por el lema de Borel-Cantelli, que $\mu(\limsup A_n) = 0$. Es decir, para casi toda $x \in X$ existe $k_0 = k_0(x) \in \mathbb{N}$, tal que $\left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| < 2^{-k}$, $k \geq k_0$. Por el lema 8.1 $\left(f_{n_k}\right)$ converge μ-cdq a una función medible f. De (8.5) y del lema de Fatou llegamos a que

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_p^p &= \int \liminf \left|f_n - f_{n_k}\right|^p d\mu \\
&\leq \liminf \int \left|f_n - f_{n_k}\right|^p d\mu = \liminf \left\|f_n - f_{n_k}\right\|_p^p \leq \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Además, $f = (f - f_N) + f_N \in L^p$.

Caso $p = +\infty$. Puesto que $\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_\infty < 2^{-2k}$ implica que $\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| < 2^{-2k} < 2^{-k}$ μ-cdq. Entonces $\left(f_{n_k}\right)$ converge μ-cdq a una función medible f. De (8.5) obtenemos que

$$|f_n - f| = \lim_{k\to\infty} \left|f_n - f_{n_k}\right| \leq \varepsilon \quad \mu\text{-cdq}.$$

Lo que implica que, $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Así, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ y como antes, $f = (f - f_N) + f_N \in L^\infty$. ■

Problemas

Problema 186 *Sea $1 \leq p < \infty$ y (f_n) una sucesión en L^p tal que converge en L^p a $f \in L^p$. Demostrar que existe una subsucesión (f_{n_j}) que converge μ-cdq a f y una función $g \in L^p$ tal que $|f_{n_j}| \leq g$, para cada $j \in \mathbb{N}$, μ-cdq.*

Problema 187 *Demostrar la desigualdad de Hölder a partir de la desigualdad de Zhubr, Ejercicio 185.*

Problema 188 *Sean* $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 > 0$. *Demostrar que*

$$\left(a_1^4 c_1 + a_2^4 c_2\right)^{\frac{1}{4}} \left(b_1^{4/3} c_1 + b_2^{4/3} c_2\right)^{\frac{3}{4}} \geq a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2.$$

Problema 189 *Si* $1 \leq p_1 < p_2$ *demostrar que no hay relación de contensión entre* $L^{p_1}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *y* $L^{p_2}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Problema 190 *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $f \in L^{p_1} \cap L^{p_2}$, *con* $1 \leq p_1 < p_2 < +\infty$. *Demostrar que* $f \in L^p$ *para cualquier valor de* p *tal que* $p_1 \leq p \leq p_2$.

Problema 191 *Si* $f \in L^p \cap L^\infty$, *para algún* $1 \leq p < +\infty$, *demostrar que* $f \in L^q$, *para toda* $q > p$ *y* $\|f\|_\infty = \lim_{q\to\infty} \|f\|_q$.

Problema 192 *Sean* $f, g \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$, $1 < p < +\infty$. *Demostrar que la función* $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por*

$$N(t) = \int |f + tg|^p d\mu,$$

es diferenciable en $\mathbb{R}$.

Problema 193 *Sea* μ *la medida de contar en* $\mathbb{N}$. *Sea* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definida por* $f(n) = 1/n$. *Demostrar que* $f \notin L^1(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$, *pero* $f \in L^p(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$ *para* $1 < p \leq +\infty$.

Problema 194 *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio de medida finito y* f *una función medible. Demostrar que* $f \in L^p$, $1 \leq p < +\infty$, *si y sólo si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \mu(\{x : (n-1) \leq |f(x)| < n\}) < +\infty.$$

Problema 195 *Sea* $C([0,1])$ *el espacio vectorial de las funciones reales continuas definidas en* $[0,1]$. *Definamos* $N_1(f)$, $f \in C([0,1])$, *como la integral de Riemann de* $|f|$ *sobre* $[0,1]$. *Demuestre que* N_1 *cumple las condiciones (ii) y (iii) de la definición de norma (ver la página 9). Si* f_n *es definida, para* $n \geq 1$, *por*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1-1/n}{2}, \\ 2nx - (n-1), & \frac{1-1/n}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Demuestre que (f_n) *es una "sucesión de Cauchy" para* N_1, *pero no converge a ningún elemento de* $C([0,1])$.

Problema 196 *Si* $f \in L^s \cap L^t$ *con* $1 \leq s < t < +\infty$, *demostrar que* $\varphi(r) = \log\left(\|f\|_r^r\right)$ *es convexa en* $[s,t]$.

Problema 197 *Sea* $f \in L^p([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$, $1 \leq p < +\infty$ *y sea* $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. *Demostrar que* $\lim_{x \downarrow 0} x^{-1/q} F(x) = 0$.

Problema 198 *Sea* μ *una medida finita en* $(X, \mathscr{A})$. *Defínase para cualesquiera* $A, B \in \mathscr{A}$, $d(A,B) = \mu(A \triangle B)$. *Demostrar las siguientes afirmaciones:*
(i) *Si en* $\mathscr{A}$ *identificamos conjuntos que difieran por un conjunto de medida cero, entonces* $(\mathscr{A}, d)$ *es un espacio métrico completo.*
(ii) *Si* $\mathscr{A}$ *es separable, entonces* $(\mathscr{A}, d)$ *es un espacio métrico separable.*
(iii) *Sea* $F(B) = d(A,B)$, *con* $A \in \mathscr{A}$, *fija. Entonces* $F : (\mathscr{A}, d) \to \mathbb{R}_+$ *es una función continua.*

8.3 Densidad de las funciones simples y separabilidad de L^p

Teorema 8.4 *Las funciones simples en* L^p, $1 \leq p \leq +\infty$, *son densas en* L^p.

Demostración. Caso $1 \leq p < +\infty$. Si $f \in L^p$, entonces existen sucesiones de funciones simples medibles (h_n) y (g_n) tales que $0 \leq h_n \uparrow f^+$ y $0 \leq g_n \uparrow f^-$. Por lo tanto, $|h_n - g_n| \leq h_n + g_n \leq f^+ + f^- = |f|$. Así, $h_n - g_n$ es una función simple en L^p y

$$|(h_n - g_n) - f|^p \leq (|h_n - g_n| + |f|)^p \leq 2^p |f|^p .$$

Ya que $\lim_{n\to\infty} (h_n - g_n) = f$, por el teorema de la convergencia dominada se sigue que $\lim_{n\to\infty} \|(h_n - g_n) - f\|_p = 0$.

Caso $p = +\infty$. Sea $f \in L^\infty$ y $\varepsilon > 0$. Sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $\left[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty\right]$ tal que $\|P\| < \varepsilon$. Definamos

$$f_\varepsilon = t_0 1_{f^{-1}(\{t_0\})} + \sum_{i=1}^n t_i 1_{f^{-1}((t_{i-1}, t_i])}.$$

Entonces $|f - f_\varepsilon| < \varepsilon$ μ-cdq. Así, $\|f - f\|_\infty \leq \varepsilon$. ∎

Corolario 8.3 *Sean* $f \in L^p$, $1 \leq p < +\infty$, *y* $\varepsilon > 0$. *Entonces existe una función simple medible* $g = \sum_{j=1}^n a_j 1_{A_j} \in L^p$ *tal que* $a_j \neq 0$, $\mu\left(A_j\right) < +\infty$ *y* $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Demostración. El resultado se sigue del teorema 8.4 y de la demostración de la proposición 8.4. ∎

Teorema 8.5 *Si* μ *es una medida* σ*-finita en* $(X, \mathscr{A})$ *y* $\mathscr{A}$ *es contablemente generada, entonces* $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$, *es separable.*

Demostración. Sea $(B_n) \subset \mathscr{A}$ tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ y $\mu(B_n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Así, podemos tomar una familia contable $\mathscr{C}$ tal que $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{C})$ y $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{C}$ (podemos tomar $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \mathscr{C}$). Sea $\mathscr{C}_c = \{C, C^c : C \in \mathscr{C}\}$ y $\mathscr{F}$ la álgebra generada por $\mathscr{C}$. Nótese que los elementos de $\mathscr{F}$ son uniones finitas de conjuntos de la forma

$$C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_N,$$

para algún $N \in \mathbb{N}$ y algunos conjuntos $C_1, \ldots, C_N$ en $\mathscr{C}_c$. $\mathscr{F}$ es numerable (véase el ejercicio 199). Sea

$$S = \left\{ \sum_{j=1}^{N} d_j 1_{D_j} : N \in \mathbb{N},\, d_j \in \mathbb{Q},\, D_j \in \mathscr{F} \text{ y } \mu\left(D_j\right) < +\infty \right\}.$$

De la proposición 8.4 resulta que $S \subset L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ y S es numerable (véase el ejercicio 199).

Veamos que S es un conjunto denso en $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$. Sea $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $\varepsilon > 0$. Por el corolario 8.3, existe una función simple $g \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$. Sea $g = \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{A_j}$, donde los $a_j \neq 0$ y $\mu\left(A_j\right) < +\infty$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, podemos tomar números racionales $\left(d_j\right)_{j=1}^{n}$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{A_j} - \sum_{j=1}^{n} d_j 1_{A_j} \right\|_p \leq \sum_{j=1}^{n} \left|a_j - d_j\right| \left\|1_{A_j}\right\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por el teorema 4.5 resulta que existen $\left(D_j\right)_{j=1}^{n} \in \mathscr{F}$ de modo que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{n} d_j 1_{A_j} - \sum_{j=1}^{n} d_j 1_{D_j} \right\|_p &\leq \sum_{j=1}^{n} \left|d_j\right| \left(\int \left|1_{A_j} - 1_{D_j}\right|^p d\mu \right)^{1/p} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left|d_j\right| \left(\mu\left(A_j \triangle D_j\right)\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Lo que implica,

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} d_j 1_{D_j} \right\|_p \leq \|f - g\|_p + \left\| g - \sum_{j=1}^{n} d_j 1_{A_j} \right\|_p + \left\| \sum_{j=1}^{n} d_j 1_{A_j} - \sum_{j=1}^{n} d_j 1_{D_j} \right\|_p < \varepsilon.$$

Como se quería demostrar. ∎

Teorema 8.6 *Las funciones continuas en $\mathbb{R}$ son densas en $L^p(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $1 \leq p < +\infty$.*

Demostración. Sean $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ y $\varepsilon > 0$. Por el corolario 8.3 existe una función simple $g = \sum_{m=1}^{n} a_m 1_{A_m}$ en $L^p(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ tal que $a_m \neq 0$, $\lambda(A_m) <$

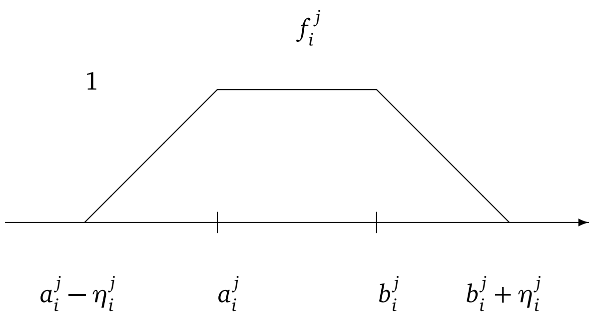
$+\infty$ y $\|f-g\|_p < \varepsilon/3$. Por el corolario 4.1 existen conjuntos abiertos $U_1, \ldots, U_n$ que satisfacen

$$U_1 = \bigcup_{i=1}^{k_1} I_i^1, \ldots, U_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} I_i^n,$$

donde los I_i^j son intervalos abiertos acotados, ajenos y

$$\lambda(A_1 \triangle U_1) < \frac{\varepsilon^p}{\left(3\sum\limits_{m=1}^{n}|a_m|\right)^p}, \ldots, \lambda(A_n \triangle U_n) < \frac{\varepsilon^p}{\left(3\sum\limits_{m=1}^{n}|a_m|\right)^p}.$$

Para cada $I_i^j = (a_i^j, b_i^j)$ existen funciones continuas f_i^j, con gráfica



donde

$$\eta_i^j = \frac{(p+1)\varepsilon^p}{4\left(3k_j\sum\limits_{m=1}^{n}|a_m|\right)^p},$$

tal que

$$\left\|1_{I_1^1} - f_1^1\right\|_p < \frac{\varepsilon}{3k_1\sum\limits_{m=1}^{n}|a_m|}, \ldots, \left\|1_{I_{k_1}^1} - f_{k_1}^1\right\|_p < \frac{\varepsilon}{3k_1\sum\limits_{m=1}^{n}|a_m|}, \ldots,$$
$$\left\|1_{I_1^n} - f_1^n\right\|_p < \frac{\varepsilon}{3k_n\sum\limits_{m=1}^{n}|a_m|}, \ldots, \left\|1_{I_1^n} - f_{k_n}^n\right\|_p < \frac{\varepsilon}{3k_n\sum\limits_{m=1}^{n}|a_m|}.$$

Consideremos la función continua

$$h = a_1\left(f_1^1 + \cdots + f_{k_1}^1\right) + \cdots + a_n\left(f_1^n + \cdots + f_{k_n}^n\right).$$

De la desigualdad de Minkowski resulta que,

$$\|f-h\|_p \quad \leq \quad \|f-g\|_p + \|g-h\|_p$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{\varepsilon}{3}+\left\|\sum_{m=1}^{n} a_m 1_{A_m}-\sum_{m=1}^{n} a_m 1_{U_m}\right\|_p \\
&\quad +\left\|\sum_{m=1}^{n} a_m 1_{U_m}-\sum_{m=1}^{n} a_m\left(\sum_{i=1}^{k_m} f_i^m\right)\right\|_p \\
&\le \frac{\varepsilon}{3}+\sum_{m=1}^{n}|a_m|\left\|1_{A_m}-1_{U_m}\right\|_p+\sum_{m=1}^{n}|a_m|\left\|1_{U_m}-\sum_{i=1}^{k_m} f_i^m\right\|_p \\
&\le \frac{2}{3}\varepsilon+\sum_{m=1}^{n}|a_m|\left\|\sum_{i=1}^{k_m} 1_{I_i^m}-\sum_{i=1}^{k_m} f_i^m\right\|_p \\
&\le \frac{2}{3}\varepsilon+\sum_{m=1}^{n}|a_m|\sum_{i=1}^{k_m}\left\|1_{I_i^m}-f_i^m\right\|_p<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Como se quería demostrar. ■

Problemas

Problema 199 *Demostrar que las colecciones $\mathscr{F}$ y $\mathscr{S}$ definidas en la demostración del teorema 8.5 son numerables.*

Problema 200 *Demostrar que $L^{\infty}([a,b],\mathscr{B}([a,b]),\lambda)$ no es un espacio métrico separable.*

Problema 201 *Encontrar un espacio de medida finita tal que $L^2(X,\mathscr{A},\mu)$ no sea separable.*

Problema 202 *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. El soporte de f es el complemento del máximo conjunto abierto contenido en el conjunto $\{x : f(x)=0\}$. Demostrar que el conjunto de las funciones continuas con soporte compacto en $\mathbb{R}$ son densas en $L^p(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, $1\le p<+\infty$.*

Problema 203 *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Demostrar que si $\int_a^b f(x)x^n dx=0$, para $n=0,1,2,\ldots$, entonces $f=0$.*

Problema 204 *Demostrar que el conjunto de los polinomios es denso en el espacio $L^p([a,b],\mathscr{B}([a,b]),\lambda)$, $1\le p<+\infty$.*

8.4 Teorema de representación de Riesz

Una aplicación clásica del teorema de Radon-Nikodym es en la representación de funcionales lineales acotados de los espacios L^p, $1\le p<+\infty$.

Definición 8.3 *Una función $G : L^p(X, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ se llama funcional lineal en L^p si para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in L^p$ se cumple*

$$G(af + bg) = aG(f) + bG(g).$$

El funcional lineal G es acotado si existe $M > 0$ tal que

$$|G(f)| \leq M \|f\|_p, \quad f \in L^p. \tag{8.6}$$

La norma de G se define por

$$\|G\| = \sup\left\{|G(f)| : f \in L^p, \ \|f\|_p = 1\right\}.$$

Nótese que $G(0) = G(0-0) = G(0) - G(0) = 0$.

Ejemplo 8.5 *Sean $1 \leq p < +\infty$ y $g \in L^q$. Defínase la función G por*

$$G(f) = \int fg\,d\mu, \quad f \in L^p.$$

Debido a la linealidad de la integral G es un funcional lineal y del corolario 8.1 se sigue que $\|G\| = \|g\|_q$.

Lema 8.2 *Sea G un funcional lineal en L^p. Entonces G es continua si y sólo si G es acotada.*

Demostración. Supóngase que G es acotada, y sea $M > 0$ un número que cumple la condición (8.6). Entonces, para cualesquiera $f, g \in L^p$,

$$|G(f) - G(g)| = |G(f - g)| \leq M \|f - g\|_p.$$

Lo cual muestra la continuidad de G en L^p.

Supongamos que G es continua. La continuidad de G en $0 \in L^p$, implica que existe $\delta > 0$ tal que si $\|f\|_p < \delta$, entonces $|G(f)| < 1$. Si $f \in L^p$, $f \neq 0$, sea $g = \delta\left(2\|f\|_p\right)^{-1} f$. Lo que implica que $\|g\|_p < \delta$ y por consiguiente,

$$\frac{\delta}{2\|f\|_p}|G(f)| = \left|G\left(\frac{\delta}{2\|f\|_p} f\right)\right| < 1.$$

Así, $|G(f)| \leq 2\delta^{-1}\|f\|_p$, para toda $f \in L^p$. ■

Lema 8.3 *Sea $1 < p < +\infty$. Si $g \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ y existe una constante $M > 0$ tal que*

$$\left|\int g\varphi\,d\mu\right| \leq M\|\varphi\|_p,$$

para toda función simple $\varphi \in L^p$, entonces $g \in L^q$ y $\|g\|_q \leq M$. La misma afirmación se cumple para $p = 1$ si μ es σ-finita.

Demostración. Caso $1 < p < +\infty$. Sea (ψ_n) una sucesión de funciones simples tal que $0 \le \psi_n \uparrow |g|^q$. Así, $|\psi_n|^{\frac{1}{q}} \in L^1$ y de la proposición 8.4 se sigue que $|\psi_n|^{\frac{1}{q}} \in L^q$, es decir, $\psi_n \in L^1$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\|\psi_n\|_1 &= \int \psi_n d\mu = \int |\psi_n|^{\frac{1}{q}} |\psi_n|^{\frac{1}{p}} d\mu \le \int |g||\psi_n|^{\frac{1}{p}} d\mu \\
&= \left| \int g \ \mathrm{sig}(g)|\psi_n|^{\frac{1}{p}} d\mu \right| \le M \left\| \mathrm{sig}(g)|\psi_n|^{\frac{1}{p}} \right\|_p = M \|\psi_n\|_1^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

implica que $\|\psi_n\|_1^{\frac{1}{q}} = \|\psi_n\|_1^{1-\frac{1}{p}} \le M$. Así, del teorema de la convergencia monótona resulta que

$$\|g\|_q^q = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n d\mu \le M^q.$$

Caso $p = 1$. De la proposición 3.2 resulta que existe una sucesión creciente (A_n) en $\mathscr{A}$ tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\mu(A_n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Sean $\varepsilon > 0$ y $A = \{x : |g(x)| \ge M + \varepsilon\}$. Consideremos la función $\varphi = 1_{A\cap A_n}$ sig(g), entonces

$$\begin{aligned}
(M+\varepsilon)\,\mu(A\cap A_n) &\le \int |g|\, 1_{A\cap A_n} d\mu = \left| \int g 1_{A\cap A_n} \mathrm{sig}(g) d\mu \right| \\
&\le M \left\| 1_{A\cap A_n} \mathrm{sig}(g) \right\|_1 = M\mu(A\cap A_n).
\end{aligned}$$

Así, $\mu(A\cap A_n) = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por ende $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A\cap A_n) = 0$, por lo tanto $\|g\|_\infty \le M + \varepsilon$. Por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario obtenemos el resultado. ■

Teorema 8.7 (Representación de Riesz) *Si* $1 < p < +\infty$ *y* G *es un funcional lineal acotado en* $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$*. Entonces existe* $g \in L^q(X, \mathscr{A}, \mu)$ *tal que*

$$G(f) = \int f g d\mu, \quad f \in L^p,$$

y $\|G\| = \|g\|_q$*. Si* μ *es* σ*-finita la misma conclusión es cierta para* $p = 1$.

Demostración. Caso μ **medida finita.** Veamos que la función $\nu(E) = G(1_E)$, $E \in \mathscr{A}$, es una medida signada en $(X, \mathscr{A})$. Sea (E_j) una sucesión ajena en $\mathscr{A}$ y sea $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$, entonces $\left(\sum_{j=1}^{n} 1_{E_j}\right)_n$ converge a 1_E en L^p. En efecto, $(\mu(E) < \infty)$

$$\left\| 1_E - \sum_{j=1}^{n} 1_{E_j} \right\|_p = \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} 1_{E_j} \right\|_p = \left(\mu\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j \right) \right)^{\frac{1}{p}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Ya que G es lineal y continuo,

$$\nu(E) = G(1_E) = \lim_{n\to\infty} G\left(\sum_{j=1}^{n} 1_{E_j} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} G\left(1_{E_j}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \nu\left(E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu\left(E_j\right),$$

así, ν es medida signada. Si $\mu(E) = 0$, entonces $1_E = 0$ μ-cdq, es decir, 1_E es 0 en L^p, por lo tanto, $\nu(E) = 0$. Esto significa que $\nu \ll \mu$. Por el teorema de Radon-Nikodym existe $g \in L^1$ $(G([f \geq 0]) < \infty, G([f < 0]) > -\infty)$ tal que $G(1_E) = \nu(E) = \int_E g d\mu$ para toda $E \in \mathscr{A}$. Lo que implica que $G(f) = \int f g d\mu$ para toda función simple $f \in L^p$, en consecuencia

$$\left|\int f g d\mu\right| = |G(f)| \leq \|G\| \, \|f\|_p \, .$$

Así, por el lema 8.3, $g \in L^q$ y $\|g\|_q \leq \|G\|$. Del ejemplo 8.5 tenemos que la función $f \to \int f g d\mu$ es continua y debido a que las funciones simples son densas en L^p, teorema 8.4, entonces $G(f) = \int f g d\mu$ para toda $f \in L^p$. (Por la desigualdad de Hölder $|G(f)| \leq \|g\|_q \|f\|_p$, $f \in L^p$, resulta $\|G\| = \|g\|_q$.)

Caso μ medida σ-finita. Sea (E_n) una sucesión creciente en $\mathscr{A}$ tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ y $\mu(E_n) < +\infty$. Los espacios $L^p(E_n)$ y $L^q(E_n)$ los identificaremos con los subespacios de $L^p(X)$ y $L^q(X)$ que consisten de aquellas funciones que se anulan en E_n^c. El primer caso muestra que para cada n existe $g_n \in L^q(E_n)$ tal que $G(f) = \int f g_n d\mu$, $f \in L^p(E_n)$, y $\|g_n\|_q = \left\|G\,|_{L^p(E_n)}\right\| \leq \|G\|$. Puesto que las funciones g_n son únicas μ-cdq, tenemos que si $n < m$, entonces $g_n = g_m$ μ-cdq en E_n. Definamos la función g μ-cdq en X por $g = g_n$ en E_n ($g = \lim_{n\to\infty} g_n$ es medible por el corolario 5.1). Por el Lema de Fatou, $\|g\|_q \leq \liminf_{n\to\infty} \|g_n\|_q \leq \|G\|$, así $g \in L^q$. Más aún, si $f \in L^p$, entonces por el teorema de la convergencia dominada, $f 1_{E_n} \to f$, $n \to \infty$, en L^p. Lo que implica que

$$G(f) = \lim_{n\to\infty} G\left(f 1_{E_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \int f 1_{E_n} g_n d\mu = \int f g d\mu,$$

para intercambiar el límite y la integral hemos usado la desigualdad de Hölder y el Teorema de la Convergencia Dominada ($g = g_n$ μ-cdq, por ende $|g_n 1_{E_n}| \leq g$ μ-cdq).

Caso μ medida arbitraria y $1 < p < \infty$. Para cada $E \in \mathscr{A}$, σ-finito, existe una única $g_E \in L^q(E)$ μ-cdq tal que $G(f) = \int f g_E d\mu$, $f \in L^p(E)$, y $\|g_E\|_q \leq \|G\|$. Si $F \in \mathscr{A}$ es σ-finito y $F \supset E$, entonces $g_F = g_E$ μ-cdq en E, así $\|g_E\|_q \leq \|g_F\|_q$. Sea

$$M = \sup\left\{\|g_E\|_q : E \in \mathscr{A} \text{ es } \sigma\text{-finito}\right\}.$$

Nótese que $M \leq \|G\|$. Sean $(E_n) \subset \mathscr{A}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \left\|g_{E_n}\right\|_q = M$, y $F = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Entonces F es σ-finito y $\|g_F\|_q \geq \left\|g_{E_n}\right\|_q$, $n \in \mathbb{N}$, así $\|g_F\|_q = M$. Si $A \in \mathscr{A}$ es σ-finito y $A \supset F$, entonces

$$\int |g_F|^q \, d\mu + \int_{A\setminus F} |g_A|^q \, d\mu = \int |g_A|^q \, d\mu \leq M^q = \int |g_F|^q \, d\mu.$$

Puesto que $q < \infty$ $(p \neq 1)$, $g_A = g_F$ μ-cdq $(([|g_A| \neq 0] \cap (A \backslash F) \subset [1_{A \backslash F}|g_A| \neq 0])$. Si $f \in L^p$ de la desigualdad de Chebyshev se sigue que $\{x : f(x) \neq 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{x : |f|(x) > 1/n\}$ es σ-finito. Sea $A = \{x : f(x) \neq 0\} \cup F$, así

$$
\begin{aligned}
G(f) &= G(f 1_{\{x:f(x)\neq 0\}}) \\
&= \int f 1_{\{x:f(x)\neq 0\}} g_{\{x:f(x)\neq 0\}} d\mu \\
&= \int f 1_{\{x:f(x)\neq 0\}} g_A d\mu \\
&= \int f 1_{\{x:f(x)\neq 0\}} g_F d\mu = \int f g_F d\mu.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, tomamos $g = g_F$. ■

Problemas

Problema 205 *Sea $G : L^p \to \mathbb{R}$, un funcional lineal acotado. Demostrar que*

$$\|G\| = \inf\left\{M : |G(f)| \le M \|f\|_p \text{ para toda } f \in L^p\right\}.$$

Problema 206 *Demostrar que el teorema 8.7 falla para $L^{\infty}((0,1], \mathscr{B}((0,1]), \lambda)$.*

Problema 207 *Sea $1 \le p < +\infty$ y μ una medida σ-finita. Sea g una función medible tal que $fg \in L^1$ para toda $f \in L^p$. Demostrar que $g \in L^q$.*

Problema 208 *Sea $1 < p < +\infty$. Supóngase que (f_n) es una sucesión en $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $\lim_{n\to\infty} \int f_n g d\mu$ existe para toda $g \in L^q(X, \mathscr{A}, \mu)$. Demostrar que existe $f \in L^p$ tal que $\lim_{n\to\infty} \int f_n g d\mu = \int f g d\mu$ para toda $g \in L^q(X, \mathscr{A}, \mu)$.*

Chapter 9

Tipos de convergencia

En este capítulo se supondrá un espacio de medida fijo $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Las funciones que se considerarán son funciones definidas en X con valores en $\mathbb{R}$. El objetivo en este capítulo es analizar diferentes nociones de convergencia, en donde se involucren los conceptos de medida e integral, para sucesiones de funciones. De entre estos modos de convergencia se destaca la convergencia en medida, pues en este concepto, como se verá, la medida juega un papel importante. Se iniciará con algunos modos de convergencia que ya se han tratado.

9.1 Tipos de convergencia básicos

Se comenzará precisando los siguientes modos de convergencia.

Definición 9.1 *Una sucesión (f_n) converge a f:*
(i) *Uniformemente si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para toda $x \in X$.*
(ii) *Puntualmente (o simplemente, (f_n) converge a f) si para cualesquiera $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*
(iii) *μ-casi donde quiera (denotado por f_n converge a f μ-cdq) si existe $N \in \mathscr{A}$, tal que $\mu(N) = 0$ y para cualesquiera $x \in N^c$ y $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Es claro que la convergencia uniforme implica convergencia puntual y que ésta, a su vez, implica convergencia μ-casi donde quiera. Sin embargo, los siguientes ejemplos muestran que las implicaciones recíprocas no son ciertas.

Ejemplo 9.1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu) = ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$. La sucesión (f_n) definida por*

$$f_n = n1_{[0,1/n]},$$

converge λ-casi donde quiera a 0, pero no converge puntualmente a 0. Por lo tanto, tampoco uniformemente.

Ejemplo 9.2 *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$*. La sucesión* (f_n) *definida por*

$$f_n = 1_{(n,n+1/n]},$$

converge puntualmente a 0 *y no converge uniformemente.*

Sin embargo, si X es un espacio con un número finito de puntos, entonces la convergencia puntual implica convergencia uniforme.

La mayoría de los resultados del capítulo 6 donde aparece la convergencia puntual pueden ser reemplazados por convergencia μ-casi donde quiera. En este caso se debe pedir que la función límite sea medible, si es que no se supone que el espacio de medida sea completo. Por ejemplo, el teorema de la convergencia monótona y el teorema de la convergencia dominada quedan de la siguiente forma:

Corolario 9.1 *Sea* $\{f_1, f_2, \ldots\} \cup \{f\} \subset M^+(X, \mathscr{A})$ *tal que* $f_n \uparrow f$ *μ-cdq. Entonces*

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Demostración. Sea $N \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(N) = 0$ y $f_n(x) \uparrow f(x)$, para cada $x \in N^c$. Así, $f_n 1_{N^c} \uparrow f 1_{N^c}$ y por el teorema de la convergencia monótona,

$$\int f\,d\mu = \int f 1_{N^c} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n 1_{N^c} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

En la primera y en la última igualdad hemos usado el corolario 6.4. ■

Corolario 9.2 *Sean* (f_n) *y* (g_n) *sucesiones de funciones integrables que convergen μ-cdq a las funciones medibles* f *y* g*, respectivamente. Si* $|f_n| \le |g_n|$ *μ-cdq,* $n \in \mathbb{N}$*, y* $\lim_{n\to\infty} \int |g_n| d\mu = \int |g| d\mu < +\infty$*, entonces* $f \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,d\mu = 0.$$

En particular,

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Demostración. Sean $M, K, N_n \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(M) = \mu(K) = \mu(N_n) = 0$ y $f_n(x) \to f(x)$ para toda $x \in M^c$, $g_n(x) \to g(x)$ para toda $x \in K^c$, $|f_n(x)| \le |g_n(x)|$ para toda $x \in N_n^c$. Sea $N^c = M^c \cap K^c \cap (\cap_{n=1}^{\infty} N_n^c)$, entonces $\mu(N) = 0$. Así, por el teorema de la convergencia dominada,

$$f 1_{N^c} \in L(X, \mathscr{A}, \mu) \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \int |f_n 1_{N^c} - f 1_{N^c}|\,d\mu = 0.$$

Usando el corolario 6.4 obtenemos el resultado. ■

Problema

Problema 209 *Si* (f_n) *converge* μ*-cdq a una función* f *y* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua demostrar que* $(\varphi(f_n))$ *converge* μ*-cdq a* $\varphi(f)$*. Recíprocamente, demostrar que si* φ *no es continua en todo punto, entonces existe una sucesión* (f_n) *tal que converge* μ*-cdq a* f*, pero* $(\varphi(f_n))$ *no converge* μ*-cdq a* $\varphi(f)$*.*

9.2 Convergencia en L^p

Recuérdese que un elemento en L^p, $1 \leq p < +\infty$, es una clase de equivalencia de funciones que son iguales μ-casi donde quiera y cuya potencia p-ésima es integrable. Vale la pena estudiar el caso $p = \infty$.

Definición 9.2 (i) *Una sucesión* (f_n) *en* L^p *converge en* L^p *a* $f \in L^p$ *si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq n_0$*, entonces* $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$*.*
(ii) *Decimos que* (f_n) *en* L^p *es una sucesión de Cauchy en* L^p *si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n, m \geq n_0$*, entonces* $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$*.*

Ya que L^p es un espacio vectorial normado completo (dichos espacios se llaman espacios de Banach) se sigue que si (f_n) es de Cauchy en L^p, entonces (f_n) converge en L^p a un elemento $f \in L^p$.

Teorema 9.1 *Sea* (f_n) *una sucesión en* L^p *que converge* μ*-casi donde quiera a* $f \in L^p$*. Entonces* $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ *si y sólo si* $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$*.*

Demostración. De la desigualdad de Minkowski,

$$\left| \|f_n\|_p - \|f\|_p \right| \leq \|f_n - f\|_p .$$

Así es que si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$.
Veamos el recíproco. Sean

$$g_n = 2^p \left(|f_n|^p + |f|^p\right), \quad g = 2^{p+1} |f|^p .$$

Entonces, $g_n \to g$ μ-cdq y $\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \int g d\mu < +\infty$. Ya que

$$\begin{aligned} |f_n - f|^p &\leq (|f_n| + |f|)^p \leq (2\max\{|f_n|, |f|\})^p \\ &= 2^p \max\{|f_n|^p, |f|^p\} \leq 2^p \left(|f_n|^p + |f|^p\right) = g_n \end{aligned}$$

y $|f_n - f|^p \to 0$ μ-cdq, entonces por el teorema de la convergencia dominada obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu = 0.$$

De lo cual se sigue el resultado. ■

Teorema 9.2 *Sea (f_n) una sucesión en $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ que converge uniformemente a f en X. Si $\mu(X) < +\infty$, entonces $f \in L^p$ y la convergencia es en L^p.*

Demostración. Para $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{(\mu(X))^{1/p}}, \quad \text{para toda } x \in X.$$

Por lo tanto, si $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_p &= \left(\int |f_n(x) - f(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int \left(\frac{\varepsilon}{(\mu(X))^{1/p}}\right)^p d\mu\right)^{1/p} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir, (f_n) converge en L^p a f. La completez de L^p implica que $f \in L^p$. ■

Si la medida no es finita entonces no se cumple la afirmación del teorema 9.2 necesariamente.

Ejemplo 9.3 *La sucesión (f_n) definida por*

$$f_n = \frac{1}{n^{1/p}} 1_{(0,n)},$$

es una sucesión en $L^p(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ que converge uniformemente a 0, pero no lo hace en L^p, pues $\|f_n\|_p = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente ejemplo muestra que aun en un espacio de medida finita de los tres modos de convergencia introducidos en la Sección 9.1 no se puede pedir menos que convergencia uniforme para obtener convergencia en L^p.

Ejemplo 9.4 *La sucesión (f_n) definida por*

$$f_n = n^{1/p} 1_{[1/n, 2/n]},$$

es una sucesión en $L^p([0,2], \mathscr{B}([0,2]), \lambda)$ que converge puntualmente a 0, pero no lo hace en L^p.

Si la sucesión (f_n) es dominada por alguna sucesión (g_n) con límite integrable, entonces se obtiene convergencia en L^p, sin importar la finitud de la medida.

Corolario 9.3 *Sea (f_n) una sucesión en $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ tal que converge μ-cdq a una función medible f. Si existe una sucesión (g_n) en L^p tal que converge μ-cdq a g, $|f_n| \leq |g_n|$ μ-cdq, $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \int |g_n|^p \, d\mu = \int |g|^p \, d\mu < +\infty$, entonces $f \in L^p$ y la convergencia es en L^p.*

Demostración. Ya que $|f_n| \leq |g_n|$ μ-cdq, entonces $|f| \leq |g|$ μ-cdq. Esto implica que $f \in L^p$. Sean

$$h_n = 2^p \left(|g_n|^p + |g|^p\right), \quad h = 2^{p+1} |g|^p .$$

Así

$$|f_n - f|^p \leq 2^p \left(|f_n|^p + |f|^p\right) \leq 2^p \left(|g_n|^p + |g|^p\right) = h_n \quad \mu\text{-cdq}.$$

Lo que sigue es como en la demostración del teorema 9.1 ■

Se podría pensar que la convergencia en L^p implica la convergencia μ-cdq. El ejemplo que se da a continuación muestra que esto es falso, aun en espacios de medida finita.

Ejemplo 9.5 *Consideremos la partición $A_k = \{2^{k-1}, ..., 2^k - 1\}$, $k \in \mathbb{N}$, de $\mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $n \in A_k$, $n = 2^{k-1} + i$, $i \in \{0, 1, ..., 2^{k-1} - 1\}$,*

$$f_n = 1_{\left(\frac{i}{2^{k-1}}, \frac{i+1}{2^{k-1}}\right]}.$$

Así, $f_n \in L^p\left((0,1], \mathscr{B}\left((0,1]\right), \lambda\right)$ y $\|f_n\|_p = 2^{-(k-1)/p}$. Veamos que la sucesión (f_n) converge en L^p a $f = 0$. Para $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-(k_0-1)/p} < \varepsilon$, así para cada $n \geq 2^{k_0-1}$ se tiene que $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. Por otra parte, sea $x \in (0,1]$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-(k_0-1)} < x$. Nótese que $f_{2^{k-1}}(x) = 1_{\left(\frac{0}{2^{k-1}}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]}(x) = 0$, para cada $k \geq k_0$. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in A_k$, $n_k = 2^{k-1} + i$, $i \in \{0, 1, ..., 2^{k-1} - 1\}$, tal que $f_{n_k}(x) = 1$, esto es debido a que

$$\left\{\left(\frac{0}{2^{k-1}}, \frac{1}{2^{k-1}}\right], ..., \left(\frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}}, \frac{2^{k-1}}{2^{k-1}}\right]\right\}$$

es una partición de $(0,1]$. De este modo, si $x \in (0,1]$ existen subsucesiones $(f_{2^{k-1}}(x))$ y $\left(f_{n_k}(x)\right)$ que convergen a 0 y a 1, respectivamente.

Problemas

Problema 210 *Si $f_n \downarrow f$ μ-cdq, cada $f_n \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $\inf\left\{\int f_n d\mu : n \in \mathbb{N}\right\} > -\infty$, demostrar que (f_n) converge en L^1 a f.*

Problema 211 *Si (f_n) y (g_n) convergen en L^p a f y a g, respectivamente, demostrar que $(f_n \pm g_n)$ converge en L^p a $f \pm g$. Si (f_n) converge en L^p a f y (g_n) converge en L^q a g, $1 < p < +\infty$, entonces $(f_n g_n)$ converge en L^1 a fg.*

9.3 Convergencia en medida y convergencia casi uniforme

Definición 9.3 *Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles. Decimos que (f_n) converge en medida a la función medible f si para cada $\alpha > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = 0.$$

Si $\mu(X) = 1$ se dice que (f_n) converge a f en probabilidad.

Proposición 9.1 *(f_n) converge a f en medida si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces*

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon.$$

Demostración. La necesidad es inmediata. Veamos la suficiencia. Sean $\alpha > 0$ y $\varepsilon > 0$, entonces para $\varepsilon \wedge \alpha$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$\begin{aligned} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) &\leq \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha \wedge \varepsilon\}) \\ &< \alpha \wedge \varepsilon \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Como se quería demostrar. ■

La siguiente obsercación es bastante útil en esta parte.

Lema 9.1 *Sean $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$, entonces*

$$\begin{aligned} \{x : |f(x) - g(x)| \geq \alpha\} &\subset \left\{x : |f(x) - h(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \\ &\quad \cup \left\{x : |h(x) - g(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Demostración. La afirmación es equivalente a demostrar que

$$\begin{aligned} &\left\{x \in X : |f(x) - h(x)| < \frac{\alpha}{2}\right\} \cap \left\{x \in X : |h(x) - g(x)| < \frac{\alpha}{2}\right\} \\ &\subset \{x \in X : |f(x) - g(x)| < \alpha\}. \end{aligned}$$

La contención es inmediata de la desigualdad del triángulo. ■

El resultado que demostramos a continuación nos indica la unicidad del límite, μ-casi donde quiera, en la convergencia en medida.

Proposición 9.2 *Si (f_n) converge en medida a las funciones medibles f y g, entonces $f = g$ μ-cdq.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ arbitrario fijo. Del lema 9.1 resulta que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left\{x : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\right\} \quad \subset \quad & \left\{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{2k}\right\} \\ & \cup \left\{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{1}{2k}\right\},\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mu\left(\left\{x : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) \quad & \leq \quad \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{2k}\right\}\right) \\ & \quad\quad + \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{1}{2k}\right\}\right) \\ & = \quad 0.\end{aligned}$$

De

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\right\},$$

y la σ-subaditividad de μ se sigue el resultado. ■

Teorema 9.3 *Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles que converge uniformemente a la función f, entonces (f_n) converge en medida a f.*

Demostración. Para $\alpha > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \alpha$, para toda $x \in X$. Lo que implica que para $n \geq n_0$, $\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = \emptyset$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = 0$. ■

Ejemplo 9.6 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. La sucesión (f_n) definida por*

$$f_n = 1_{(n,n+1]},$$

converge puntualmente a 0 y no converge en medida a 0.

En consecuencia, la convergencia puntual no implica convergencia en medida. Si el espacio tiene medida finita la implicación es cierta, según se establecerá en el corolario 9.4.

Teorema 9.4 *Si (f_n) converge a f en L^p, entonces (f_n) converge a f en medida.*

Demostración. Sea $\alpha > 0$. Por la desigualdad de Chebyshev,

$$\alpha^p \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) \leq \int |f_n - f|^p \, d\mu = \|f_n - f\|_p^p.$$

Entonces, $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = 0$. ■

El ejemplo 9.3 nos muestra que la convergencia en medida no implica convergencia en L^p. (Aun si el espacio tiene medida finita, ejemplo 9.4) Por otra parte, el ejemplo 9.5 muestra que convergencia en medida no implica convergencia μ-cdq.

Definición 9.4 *Una sucesión de funciones medibles (f_n) converge μ-casi uniformemente a una función medible f, si para cada $\alpha > 0$ existe $E_\alpha \in \mathscr{A}$ con $\mu(E_\alpha) < \alpha$ tal que (f_n) converge uniformemente a f en E_α^c.*

En principio, se podría pensar que la convergencia μ-casi uniforme es equivalente a convergencia uniforme en el complemento de algún conjunto de medida cero. Pero esto es falso. Consideremos la sucesión (f_n) definida en el ejemplo 9.4. Supóngase que existe $E \in \mathscr{B}([0,2])$ tal que (f_n) converge uniformemente en E^c. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$|f_n(x) - 0| = n^{1/p} 1_{[1/n,2/n]}(x) < (1/2)^p,$$

para toda $x \in E^c$. Así, $[1/n, 2/n] \cap E^c = \emptyset$, es decir, $[1/n, 2/n] \subset E$, por lo tanto $\lambda(E) > 0$. Así, no existe un conjunto nulo para el cual (f_n) converja uniformemente en su complemento. Por otra parte, para $\alpha > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2/n_0 < \alpha$. Así es que si $n \geq n_0$, entonces $f_n(x) = 0$ para toda $x \in [0,\alpha]^c$. Por lo tanto (f_n) converge λ-casi uniformemente. Recuerde que esta sucesión no converge en L^p. En consecuencia, es claro que la convergencia uniforme implica convergencia μ-casi uniforme, pero el recíproco es falso.

Teorema 9.5 *Si (f_n) converge μ-casi uniformemente a f, entonces (f_n) converge a f en medida.*

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $E_\varepsilon \in \mathscr{A}$ con $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que (f_n) converge a f uniformemente en E_ε^c. Por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ para toda } x \in E_\varepsilon^c.$$

En consecuencia, $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$. Es decir, (f_n) converge en medida a f. ■

Teorema 9.6 *Si (f_n) converge μ-casi uniformemente a f, entonces (f_n) converge a f μ-cdq.*

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $E_k \in \mathscr{A}$ con $\mu(E_k) < 2^{-k}$ tal que (f_n) converge uniformemente a f en E_k^c. Sea $F = \limsup E_k$, entonces por el Lema de Borel Cantelli, $\mu(F) = 0$. Además, nótese que (f_n) converge puntualmente en F^c. En efecto, si $x \in F^c = \cup_{k=1}^\infty \cap_{j=k}^\infty E_j^c$, entonces $x \in E_{k_1}^c$ para algún k_1. Así $(f_n(x))$ converge a $f(x)$, pues (f_n) converge uniformemente en $E_{k_1}^c$. ■

Definición 9.5 *Una sucesión (f_n) de funciones medibles se dice que es una sucesión de Cauchy en medida si para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$, entonces*

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) < \eta.$$

Es decir, $\lim_{m,n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$*, para cada* $\varepsilon > 0$.

Proposición 9.3 *Toda sucesión convergente en medida es una sucesión de Cauchy en medida.*

Demostración. Sea (f_n) una sucesión que converge en medida a f. Sean $\alpha > 0$ y $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$\mu\left(\left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Del Lema 9.1 se sigue que si $n, m \geq n_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \alpha\}) &\leq \mu\left(\left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \\
&\quad + \mu\left(\left\{x : |f(x) - f_m(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como se deseaba. ∎

Proposición 9.4 *Si (f_n) es una sucesión de Cauchy en medida y tiene una subsucesión que converge en medida, entonces (f_n) converge en medida.*

Demostración. Sea (f_{n_k}) una subsucesión de (f_n) que converge en medida a f. Sean $\alpha > 0$ y $\varepsilon > 0$. Existen $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n, m \geq n_0, \\
\mu\left(\left\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n_k \geq n_{k_0}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando que $n_{n_0 \vee k_0} \geq n_0 \vee n_{k_0}$, para $n \geq n_0$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) &\leq \mu\left(\left\{x : |f_n(x) - f_{n_{n_0 \vee k_0}}(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \\
&\quad + \mu\left(\left\{x : |f_{n_{n_0 \vee k_0}}(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

De lo cual se sigue el resultado. ∎

Teorema 9.7 *Si (f_n) es una sucesión de Cauchy en medida, entonces existe una subsucesión de (f_n) que converge μ-casi uniformemente.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Para $\varepsilon = \eta = 2^{-k}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_k$, entonces

$$\mu\left(\left\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\}\right) < \frac{1}{2^k}.$$

Puesto que la subsucesión $f_{n_k+1}, f_{n_k+2}, \ldots$ de (f_n) es de nuevo una sucesión de Cauhy en medida, entonces para $\varepsilon = \eta = 2^{-(k+1)}$ existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ ($n_{k+1} > n_k$) tal que si $m, n \geq n_{k+1}$, entonces

$$\mu\left(\left\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{2^{k+1}}\right\}\right) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Así construimos la subsucesión (f_{n_k}) de (f_n) tal que

$$\mu\left(\left\{x : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\}\right) < \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sea $F = \limsup_{j\to\infty} E_j$ donde

$$E_j = \left\{x : \left|f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\right| \geq \frac{1}{2^j}\right\}. \tag{9.1}$$

Por el Lema de Borel-Cantelli, $\mu(F) = 0$. Veamos que $(f_{n_k}(x))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ para cada $x \in F^c$. Si $x \in F^c$, existe $k_0 = k_0(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \cap_{j=k_0}^{\infty} E_j^c$. Si $\xi > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{1-j_0} < \xi$. Si $i \geq j \geq j_0 \vee k_0$, entonces

$$\begin{aligned} |f_{n_j}(x) - f_{n_i}(x)| &\leq |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)| + |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_{j+2}}(x)| \\ &\quad + \cdots + |f_{n_{i-1}}(x) - f_{n_i}(x)| \\ &< \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{i-1}} < \frac{1}{2^{j-1}} < \frac{1}{2^{j_0-1}} < \xi. \end{aligned} \tag{9.2}$$

De este modo $(f_{n_k}(x))$ es convergente en $\mathbb{R}$. Definamos

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x), & x \in F^c, \\ 0, & x \in F. \end{cases}$$

Mostremos que (f_{n_k}) converge μ-casi uniformemente a la función medible f (ver el Lema 8.1). Sea $\alpha > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(F_{k_0}) < \alpha$, $F_{k_0} = \cap_{j=k_0}^{\infty} E_j^c$. Veamos que (f_{n_j}) converge uniformemente en $F_{k_0}^c$. Sea $\varepsilon > 0$ y $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{1-j_0} < \varepsilon$. Haciendo que $i \to \infty$ en (9.2) resulta que para toda $x \in F_{k_0}^c$

$$\left|f_{n_j}(x) - f(x)\right| \leq \xi,$$

para cada $j \geq j_0 \vee k_0$ (aquí k_0 no depende de x). Como se quería demostrar. ■

Teorema 9.8 *a) Una sucesión (f_n) es de Cauchy en medida si y sólo si (f_n) converge en medida.*
b) (Riesz) Si (f_n) converge en medida a f, entonces existe una subsucesión de (f_n) que converge μ-cdq a f.

Demostración. a) La necesidad es consecuencia de los Teoremas 9.7, 9.5 y la Proposición 9.4. La suficiencia se sigue de la Proposición 9.3.
b) Se sigue de la Proposición 9.3 y de los Teoremas 9.7 y 9.5. ■

Lema 9.2 *Si (f_n) converge en medida a f y $\left(f_{n_k}\right)$ es una subsucesión de (f_n), entonces $\left(f_{n_k}\right)$ converge en medida a f.*

Demostración. Para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, si $n_k \geq n_{n_0} \geq n_0$, entonces $\mu\left(\left\{x : \left|f_{n_k}(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) < \varepsilon$. ■

Tenemos ahora la siguiente versión del teorema de la convergencia dominada.

Teorema 9.9 *Sea (f_n) una sucesión en L^p que converge en medida a f. Si existe una sucesión (g_n) de funciones en L^p que convergen μ-casi donde quiera a una función medible g, $|f_n| \leq |g_n|$ μ-cdq, $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \int |g_n|^p \, d\mu = \int |g|^p \, d\mu < +\infty$, entonces $f \in L^p$ y (f_n) converge a f en L^p.*

Demostración. Es inmediato, del Teorema de Riesz, que $f \in L^p$. Si (f_n) no converge a f en L^p, entonces existe una subsucesión $\left(f_{n_k}\right)$ de (f_n) y un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left\|f_{n_k} - f\right\|_p > \varepsilon, \quad \text{para toda } k \in \mathbb{N}. \tag{9.3}$$

Del lema 9.2 resulta que $\left(f_{n_k}\right)$ converge en medida a f. Entonces el teorema 9.8 implica que existe una subsucesión $\left(f_{n_{k_j}}\right)$ de $\left(f_{n_k}\right)$ que converge a f μ-cdq. Del corolario 9.2 resulta que $\lim_{j\to\infty} \left\|f_{n_{k_j}} - f\right\|_p = 0$. Lo que contradice a (9.3). ■

La sucesión del ejemplo 9.4 muestra que la convergencia μ-casi uniforme no implica convergencia en L^p. Sin embargo, de los teoremas 9.5 y 9.9 tenemos que la afirmación si se cumple sí existe una sucesión en L^p "dominante". En el ejemplo 9.2 se da una sucesión que converge en L^p a 0 (y esta dominada, por ella misma) pero no lo hace μ-casi uniformemente.

Problemas

Problema 212 *Sea* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mu)$ *un espacio de medida finita y* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función acotada y continua en* 0 *tal que* (f_n) *converge en medida a* 0*. Demostrar que* $lim_{n\to\infty} \int f(f_n)\, d\mu = \mu(\mathbb{R}) f(0)$*.*

Problema 213 *Si* $1 \leq p_1 < p_2 < +\infty$*, demostrar que* $\|\cdot\|_{p_1} + \|\cdot\|_{p_2}$ *hace de* $L^{p_1} \cap L^{p_2}$ *un espacio vectorial normado completo.*

Problema 214 *Si* $\mu(E_n) < +\infty$*,* $n \in \mathbb{N}$*, y* (1_{E_n}) *converge a* f *en* L^1*, demostrar que* f *es igual a la indicadora de algún conjunto medible* μ*-cdq.*

Problema 215 *Suponga que* $f_n \to f$ *en medida y* $g_n \to g$ *en medida. Demostrar que* $f_n \pm g_n \to f \pm g$ *en medida.*

Problema 216 *Sea* μ *la medida de contar en* $\mathbb{N}$*. Demostrar que* $f_n \to f$ *en medida si y sólo si* $f_n \to f$ *uniformemente.*

Problema 217 *Demostrar las siguientes afirmaciones: Si* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es uniformemente continua y* (f_n) *converge uniformemente a* f*, entonces* $(\varphi(f_n))$ *converge uniformemente a* $\varphi(f)$*. Recíprocamente, si* φ *no es uniformemente continua, entonces existe un espacio de medida y una sucesión* (f_n) *que converge uniformemente a* f *pero tal que* $(\varphi(f_n))$ *no converge en medida a* $\varphi(f)$*.*

Problema 218 *Si* μ *es* σ*-finita y* $f_n \to f$ μ*-cdq, demostrar que existe una sucesión* (E_k) *de conjuntos medibles en* X *tal que* $\mu\left(\left(\cup_{k=1}^{\infty} E_k\right)^c\right) = 0$ *y* $f_n \to f$ *uniformemente en cada* E_k*.*

9.4 Convergencia en espacios de medida finita

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida y (f_n) una sucesión de funciones medibles.

Teorema 9.10 (Egoroff) *Si* (f_n) *converge a una función medible* f μ*-cdq y además a)* $\mu(X) < +\infty$ *o bien b) existe* g *en* L^p *tal que* $|f_n| \leq g$ μ*-cdq,* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* (f_n) *converge a* f μ*-casi uniformemente.*

Demostración. Para cada $m, k \in \mathbb{N}$ consideremos los conjuntos $A_k(m) = \cup_{n=k}^{\infty} \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}\right\}$. Nótese que $A_k(m)$ es decreciente en k. Veamos que para toda $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k(m)) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k(m)\right) = 0. \tag{9.4}$$

Sea $C = \{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}$, entonces $C \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k(m))^c$. Por otra parte, existe $N \in \mathscr{A}$, $\mu(N) = 0$ y $C^c \subset N$. Así $\cup_{m=1}^{\infty} \cap_{k=1}^{\infty} A_k(m) \subset C^c$, por lo tanto

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k(m)\right) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Para que (9.4) se cumpla basta con ver que $\mu(A_k(m)) < \infty$, para algún índice k. El caso a) es claro veamos el caso b). Sea $B \in \mathscr{A}$, $\mu(B) = 0$ y tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad |f(x)| \leq g(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in B^c,$$

Nótese que

$$B^c \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m} \right\} \subset \left\{ x : g(x) \geq \frac{1}{2m} \right\}$$

lo que implica que

$$\mu(A_1(m)) = \mu(B^c \cap A_1(m)) \leq \mu\left(\left\{ x : g(x) \geq \frac{1}{2m} \right\}\right) \leq (2m)^p \|g\|_p^p .$$

En la última desigualdad hemos usado (6.5).

De (9.4) resulta que para $\alpha > 0$, existe $k_m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu\big(A_{k_m}(m)\big) < \alpha/2^m$. Sea $A_\alpha = \cup_{m=1}^{\infty} A_{k_m}(m)$, $\mu(A_\alpha) < \alpha$. Más aún (f_n) converge uniformemente en A_α^c. En efecto, si $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/m_0 < \varepsilon$. Si $n \geq k_{m_0}$ entonces para toda $x \in A_\alpha^c \subset A_{k_{m_0}}^c(m_0)$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m_0} < \varepsilon.$$

Como se quería demostrar. ■

Corolario 9.4 *Sea $\mu(X) < +\infty$. Si (f_n) es una sucesión de funciones medibles que converge a una función medible f μ-cdq, entonces (f_n) converge a f en medida.*

Demostración. Se sigue de los teoremas 9.10 y 9.5. ■

El resultado precedente también es cierto si existe una función en L^p que domine a la sucesión. Del ejemplo 9.2 vemos que (f_n) no está dominada por una función L^p integrable, pero si existe una sucesión en L^p que la domina (ella misma). Sin embargo (f_n) no converge μ-casi uniformemente (a 0). Una caracterización de convergencia en medida la da el:

Teorema 9.11 *Sea $\mu(X) < +\infty$. Una sucesión de funciones medibles (f_n) converge a f en medida si y sólo si toda subsucesión $\left(f_{n_k}\right)$ de (f_n) tiene una subsucesión que converge a f μ-cdq.*

Demostración. Si (f_n) converge en medida a f, entonces por el lema 9.2 tenemos que toda subsucesión $\left(f_{n_k}\right)$ de (f_n) converge en medida a f. Así, por el teorema 9.8 b), $\left(f_{n_k}\right)$ tiene una subsucesión que converge a f μ-cdq.

Recíprocamente, supongamos que (f_n) no converge en medida a f, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mu\left(\left\{x : \left|f_{n_k}(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \geq \varepsilon, \tag{9.5}$$

para alguna subsucesión $\left(f_{n_k}\right)$ de (f_n). Por hipótesis, existe una subsucesión $(f_{n_{k_j}})$ de $\left(f_{n_k}\right)$ que converge a f μ-cdq. Del corolario 9.4 se sigue que $(f_{n_{k_j}})$ converge a f en medida, lo que contradice a (9.5). ■

A continuación veremos cómo se puede "metrizar" la convergencia en medida. Por $L^0(X, \mathscr{A}, \mu)$ denotaremos al conjunto de las clases de equivalencia formadas por aquellas funciones medibles que son iguales μ-casi donde quiera. La función $\rho : L^0(X, \mathscr{A}, \mu) \times L^0(X, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{R}_+$ definida por

$$\rho(f, g) = \int \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu,$$

es una métrica en $L^0(X, \mathscr{A}, \mu)$. En efecto, $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ y si $\rho(f, g) = 0$, entonces $f = g$ μ-cdq. Por otra parte,

$$\begin{aligned} |f-g|[|f-h+|h-g|+1] &= |f-g|[|f-h|+|h-g|]+|f-g| \\ &\leq |f-g|[|f-h|+|h-g|]+|f-h|+|h-g| \\ &= (|f-h|+|h-g|)(1+|f-g|), \end{aligned}$$

por ende

$$\begin{aligned} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} &\leq \frac{|f-h|+|g-h|}{1+|f-h|+|g-h|} \\ &= \frac{|f-h|}{1+|f-h|+|g-h|} + \frac{|g-h|}{1+|f-h|+|g-h|} \\ &\leq \frac{|f-h|}{1+|f-h|} + \frac{|g-h|}{1+|g-h|}. \end{aligned}$$

Lo que implica la desigualdad del triángulo para ρ:

$$\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g).$$

La relación de ρ con la convergencia en medida es la siguiente:

Teorema 9.12 *Sea $\mu(X) < +\infty$. (f_n) converge a f en medida si y sólo si* $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$.

Demostración. Del teorema 9.11 se sigue que $(|f_n - f|)$ converge a 0 en medida si y sólo si $(|f_n - f| / (1 + |f_n - f|))$ converge a 0 en medida. Si (f_n) converge a f en medida, entonces $(|f_n - f| / (1 + |f_n - f|))$ converge a 0 en medida, y como está dominada por la función integrable 1, entonces del teorema 9.9 resulta que $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$.

Recíprocamente, si $(|f_n - f| / (1 + |f_n - f|))$ tiende a 0 en L^1, entonces tiende a 0 en medida, lo que implica que (f_n) converge a f en medida. ■

En las tablas que se dan a continuación se indica la relación que existe entre los distintos modos de convergencia. Se inicia introduciendo la siguiente nomenclatura:

Modo de convergencia	**Notación**
uniforme	$\xrightarrow{\text{u}}$
puntual	$\xrightarrow{\text{p}}$
μ-casi donde quiera	$\xrightarrow{\mu\text{-cdq}}$
medida	$\xrightarrow{\mu}$
μ-casi uniforme	$\xrightarrow{\mu\text{-cu}}$

Una flecha sólida significa que se cumple la implicación y una flecha punteada significa que existe una subsucesión que converge en el modo que se señala. En cualquier caso se indica el teorema donde se demuestra la implicación. Cuando la implicación no es cierta se da el número del ejemplo donde aparece la sucesión que proporciona el contraejemplo. Que (f_n) sea dominada significa que existe una sucesión (g_n) de funciones integrables que converge μ-cdq a una función $g \in L^p$ y $|f_n| \leq |g_n|$ μ-cdq, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Tabla 1

Caso General	$\xrightarrow{\text{u}}$	$\xrightarrow{\text{p}}$	$\xrightarrow{\mu\text{-cdq}}$	$\xrightarrow{L^p}$	$\xrightarrow{\mu}$	$\xrightarrow{\mu\text{-cu}}$
$\xrightarrow{\text{u}}$	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	9.3	$\xrightarrow{9.3}$	$\longrightarrow$
$\xrightarrow{\text{p}}$	9.2	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	9.4	9.2	9.2
$\xrightarrow{\mu\text{-cdq}}$	9.1	9.1	$\longrightarrow$	9.4	9.2	9.2
$\xrightarrow{L^p}$	9.5	9.5	9.4 + 9.8 $\dashrightarrow$	$\longrightarrow$	$\xrightarrow{9.4}$	9.4 + **??** $\dashrightarrow$
$\xrightarrow{\mu}$	9.5	9.5	9.8 $\dashrightarrow$	9.4	$\longrightarrow$	**??** $\dashrightarrow$
$\xrightarrow{\mu\text{-cu}}$	9.4	9.1	$\xrightarrow{9.6}$	9.4	$\xrightarrow{9.5}$	$\longrightarrow$

En el caso de medida finita y convergencia dominada, la primera parte de la Tabla 1 no cambia. Los cambios ocurren en la segunda mitad y son los siguientes:

Tabla 2

Medida Finita	$\xrightarrow{L^p}$	$\xrightarrow{\mu}$	$\xrightarrow{\mu\text{-cu}}$
$\xrightarrow{\text{u}}$	$\xrightarrow{9.2}$	$\xrightarrow{9.3}$	$\longrightarrow$
$\xrightarrow{\text{p}}$	9.4	$\xrightarrow{9.4}$	$\xrightarrow{9.10}$
$\xrightarrow{\mu\text{-cdq}}$	9.4	$\xrightarrow{9.4}$	$\xrightarrow{9.10}$
$\xrightarrow{L^p}$	$\longrightarrow$	$\xrightarrow{9.4}$	$\overset{9.4\,+\,\mathbf{??}}{\dashrightarrow}$
$\xrightarrow{\mu}$	9.4	$\longrightarrow$	$\overset{\mathbf{??}}{\dashrightarrow}$
$\xrightarrow{\mu\text{-cu}}$	9.4	$\xrightarrow{9.5}$	$\longrightarrow$

Tabla 3

Caso Dominado	$\xrightarrow{L^p}$	$\xrightarrow{\mu}$	$\xrightarrow{\mu\text{-cu}}$
$\xrightarrow{\text{u}}$	$\xrightarrow{9.3}$	$\xrightarrow{9.3}$	$\longrightarrow$
$\xrightarrow{\text{p}}$	$\xrightarrow{9.3}$	$\xrightarrow{9.3\,+\,9.4}$	$\overset{6.3\,+\,9.4\,+\,\mathbf{??}}{\dashrightarrow}$
$\xrightarrow{\mu\text{-cdq}}$	$\xrightarrow{9.3}$	$\xrightarrow{9.3\,+\,9.4}$	$\overset{9.3\,+\,9.4\,+\,\mathbf{??}}{\dashrightarrow}$
$\xrightarrow{L^p}$	$\longrightarrow$	$\xrightarrow{9.4}$	$\overset{9.4\,+\,\mathbf{??}}{\dashrightarrow}$
$\xrightarrow{\mu}$	$\xrightarrow{9.9}$	$\longrightarrow$	$\overset{\mathbf{??}}{\dashrightarrow}$
$\xrightarrow{\mu\text{-cu}}$	$\xrightarrow{9.5\,+\,9.9}$	$\xrightarrow{9.5}$	$\longrightarrow$

Es importante notar que bajo este concepto de dominación convergencia μ-cdq no implica μ-cu. (Ver el ejemplo 9.2.)

Problemas

Problema 219 *Sea $\mu(X) < +\infty$ y f una función continua en $\mathbb{R}$. Si (g_n) converge a g en medida, demostrar que $(f(g_n))$ converge a $f(g)$ en medida.*

Problema 220 *Demuestre que la convergencia μ-cdq no es expresable por medio de una métrica.*

Problema 221 *Sea $\mu(X) < +\infty$. Si (f_n) es una sucesión en $M_r(X, \mathscr{A})$, demostrar que existe una sucesión (a_n) de constantes, tal que, (f_n/a_n) converge a 0 μ-cdq.*

Problema 222 *Sea $\mu(X) < +\infty$. Si (f_n) converge en $C \in \mathscr{A}$, demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $C_0 \subset C$ con $\mu(C \backslash C_0) < \varepsilon$ tal que (f_n) converge uniformemente en C_0.*

Problema 223 *Suponga que $f_n \to f$ en medida, $g_n \to g$ en medida y $\mu(X) < +\infty$. Demostrar que $f_n g_n \to fg$ en medida. Si $\mu(X) = +\infty$, la implicación no es necesariamente cierta.*

Problema 224 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida finita. Demostrar que*

$$d(f,g) = \int \min\{|f-g|, 1\}\, d\mu,$$

es una métrica en $L^0(X, \mathscr{A}, \mu)$ y que (f_n) converge en medida a f si y sólo si $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$.

Problema 225 *Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles en un espacio de medidad finita $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Demostrar que (f_n) es una sucesión de Cauchy en medida si y sólo si es sucesión de Cauchy en la métrica del ejercicio 224.*

Problema 226 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida finita. Una función $f : (X, \mathscr{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice acotada en medida si para cada $\varepsilon > 0$ existe $M(\varepsilon) < +\infty$ tal que $\mu(\{x : |f(x)| \leq M(\varepsilon)\}) \geq \mu(X) - \varepsilon$. Demostrar que f es acotada en medida si y sólo si es finita μ-cdq.*

Problema 227 *Sea μ una medida finita en $(X, \mathscr{A})$. Demostrar que $(\{\mu(A) : A \in \mathscr{A}\})^c$ es un conjunto abierto.*

Problema 228 *Sea (f_n) una sucesión en $M_r(X, \mathscr{A})$. Supongamos que $\mu(X) < +\infty$ y que (f_n) converge a un límite finito μ-cdq. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $M(\varepsilon) < +\infty$ tal que $\mu(\{x : \sup_n |f_n| \leq M(\varepsilon)\}) \geq \mu(X) - \varepsilon$.*

9.5 Integrabilidad uniforme

En esta parte se presentan condiciones suficientes para obtener convergencia en L^p. Se inicia con la introducción de los siguientes conceptos.

Definición 9.6 *Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles. (f_n) se dice:*
(i) acotada en L^1 si,

$$\sup\left\{\int |f_n|\,d\mu : n\in\mathbb{N}\right\} < +\infty.$$

(ii) integrable uniformemente si

$$\lim_{M\to\infty} \sup\left\{\int_{E_{M,n}} |f_n|\,d\mu : n\in\mathbb{N}\right\} = 0,$$

donde $E_{M,n} = \{x\in X : |f_n(x)| \geq M\}$.
(iii) continua uniformemente si

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \sup\left\{\int_A |f_n|\,d\mu : n\in\mathbb{N}\right\} = 0.$$

(iv) que satisface la condición (CF) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $A_\varepsilon \in \mathscr{A}$ con $\mu(A_\varepsilon) < +\infty$ tal que

$$\sup\left\{\int_{A_\varepsilon^c} |f_n|\,d\mu : n\in\mathbb{N}\right\} < \varepsilon.$$

Nótese que en un espacio de medida finita toda sucesión satisface la condición (CF). Por otra parte, la sucesión del ejemplo 9.1 está acotada en L^1 pero no es integrable uniformemente.

Proposición 9.5 *Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles tal que $|f_n| \leq g$ μ-cdq, para cada $n\in\mathbb{N}$. Si $g\in L^1$, entonces (f_n) es integrable uniformemente.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de las definiciones (usar el teorema 7.6, con $d\nu = g\,d\mu$). ∎

Teorema 9.13 *Si (f_n) está acotada en L^1 y es continua uniformemente, entonces (f_n) es integrable uniformemente.*

Demostración. Sea $K = \sup\left\{\|f_n\|_1 : n\in\mathbb{N}\right\} < +\infty$ y $\varepsilon > 0$. Existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\text{si} \quad \mu(A) < \delta, \quad \text{entonces} \quad \sup\left\{\int_A |f_n|\,d\mu : n\in\mathbb{N}\right\} \leq \varepsilon. \tag{9.6}$$

Por lo tanto, si $M \geq K/\delta$, de la desigualdad de Chebyshev resulta que

$$\mu\left(E_{M,n}\right) = \mu\left(\{x : |f_n(x)| \geq M\}\right) \leq \frac{\|f_n\|_1}{M} \leq \frac{K}{M} \leq \delta.$$

Así, de (9.6) obtenemos

$$\sup\left\{\int_{E_{M,n}} |f_n|\, d\mu : n \in \mathbb{N}\right\} \le \varepsilon.$$

Es decir, (f_n) es integrable uniformemente. ∎

Se tiene el siguiente recíproco parcial del teorema anterior.

Teorema 9.14 *Si (f_n) es integrable uniformemente, entonces (f_n) es continua uniformemente. Si además (f_n) satisface la condición (CF), entonces (f_n) está acotada en L^1.*

Demostración. (f_n) **es continua uniformemente.** Sea $\varepsilon > 0$. La integrabilidad uniforme de (f_n) implica que existe $M > 0$ tal que

$$\sup\left\{\int_{E_{M,n}} |f_n|\, d\mu : n \in \mathbb{N}\right\} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, si $\mu(A) < \varepsilon/(2M)$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_A |f_n|\, d\mu &= \int_{A\cap E_{M,n}} |f_n|\, d\mu + \int_{A\cap E_{M,n}^c} |f_n|\, d\mu \\
&\le \int_{E_{M,n}} |f_n|\, d\mu + \int_{A\cap E_{M,n}^c} M\, d\mu \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + M\mu(A) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

En consecuencia, (f_n) es continua uniformemente.

(f_n) **está acotada en** L^1. Por (CF) existe $A_1 \in \mathscr{A}$ con $\mu(A_1) < +\infty$ tal que

$$\sup\left\{\int_{A_1^c} |f_n|\, d\mu : n \in \mathbb{N}\right\} \le 1.$$

Por otra parte, ya que (f_n) es integrable uniformemente, existe $M > 0$ tal que

$$\sup\left\{\int_{E_{M,n}} |f_n|\, d\mu : n \in \mathbb{N}\right\} \le 1.$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int |f_n|\, d\mu = \int_{E_{M,n}} |f_n|\, d\mu + \int_{E_{M,n}^c} |f_n|\, d\mu$$

$$\begin{aligned}
&\leq \quad 1+\int_{E_{M,n}^c\cap A_1}|f_n|\,d\mu+\int_{E_{M,n}^c\cap A_1^c}|f_n|\,d\mu \\
&\leq \quad 1+M\mu\left(E_{M,n}^c\cap A_1\right)+\int_{A_1^c}|f_n|\,d\mu\leq 2+M\mu(A_1).
\end{aligned}$$

Por ende, $\sup\{\|f_n\|_1 : n\in\mathbb{N}\}\leq 2+M\mu(A_1)$. ■

Lema 9.3 *Si $f\in L^p(X,\mathscr{A},\mu)$, entonces para cada $\varepsilon>0$ existe $A_\varepsilon\in\mathscr{A}$ con $\mu(A_\varepsilon)<+\infty$ tal que*

$$\int_{A_\varepsilon^c}|f|^p\,d\mu<\varepsilon^p.$$

Demostración. Sean $\mathscr{O}=\{x : f(x)=0\}$ y $F_n=\{x : |f(x)|\geq 1/n\}$. Entonces, $F_n\uparrow\{x : f(x)\neq 0\}=\mathscr{O}^c$. Consideremos la medida finita, $d\nu=|f|^p\,d\mu$. Así,

$$\nu(X)=\nu(\mathscr{O})+\nu(\mathscr{O}^c)=\lim_{n\to\infty}\nu(F_n).$$

Para $\varepsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\nu\left(F_{n_0}^c\right)=\nu(X)-\nu\left(F_{n_0}\right)<\varepsilon^p$. Por otra parte, de la desigualdad de Chebyshev obtenemos que

$$\mu\left(F_{n_0}\right)=\mu\left(\left\{x : |f(x)|\geq\frac{1}{n_0}\right\}\right)\leq(n_0)^p\int|f|^p\,d\mu<+\infty.$$

De lo cual se sigue el resultado. (Otra manera de demostralo es usando el corolario 7.3.) ■

Como consecuencia de este lema se tiene que toda sucesión dominada por una función integrable satisface la condición (CF). Así, de la proposición 9.5 y del teorema 9.14 se sigue que toda sucesión dominada por una función integrable es acotada en L^1 y es continua uniformemente.

Teorema 9.15 *Si (f_n) converge a f en L^p, entonces $(|f_n|^p)$ satisface la condición (CF) y es continua uniformemente.*

Demostración. Sea $\varepsilon>0$, entonces existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq n_0$, se cumple que $\|f_n-f\|_p<\varepsilon/2$.
$(|f_n|^p)$ **satisface la condición** (CF). Ya que $f_1,\ldots,f_{n_0-1},f\in L^p$, entonces debido al lema 9.3 existen $A_1,\ldots,A_{n_0-1},A\in\mathscr{A}$, con medida finita tal que

$$\left\|f_1 1_{A_1^c}\right\|_p<\varepsilon,\ldots,\left\|f_{n_0-1}1_{A_{n_0-1}^c}\right\|_p<\varepsilon,\|f1_{A^c}\|_p<\varepsilon/2.$$

Sea $A_\varepsilon=A_1\cup\cdots\cup A_{n_0-1}\cup A\in\mathscr{A}$, entonces $\mu(A_\varepsilon)<+\infty$. Además, nótese que si $n<n_0$,

$$\int_{A_\varepsilon^c}|f_n|^p\,d\mu\leq\int_{A_n^c}|f_n|^p\,d\mu=\left\|f_n 1_{A_n^c}\right\|_p^p<\varepsilon^p.$$

Si $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\left(\int_{A_\varepsilon^c} |f_n|^p \, d\mu\right)^{1/p} &= \left\|f_n 1_{A_\varepsilon^c}\right\|_p \leq \left\|(f_n - f)\, 1_{A_\varepsilon^c}\right\|_p + \left\|f\, 1_{A_\varepsilon^c}\right\|_p \\ &\leq \|f_n - f\|_p + \|f\, 1_{A^c}\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

$(|f_n|^p)$ **es continua uniformemente**. Consideremos las medidas $d\nu_1 = |f_1|^p \, d\mu$, ..., $d\nu_{n_0-1} = \left|f_{n_0-1}\right|^p d\mu$ y $d\nu = |f|^p \, d\mu$, las cuales son absolutamente continuas con respecto a μ. Debido al teorema 7.6 existen $\delta_1 > 0, \ldots, \delta_{n_0-1} > 0$ y $\delta_0 > 0$ tal que si $\mu(A_1) < \delta_1, \ldots, \mu\left(A_{n_0-1}\right) < \delta_{n_0-1}$ y $\mu(A) < \delta_0$, entonces $\nu_1(A_1) < \varepsilon^p, \ldots, \nu_{n_0-1}\left(A_{n_0-1}\right) < \varepsilon^p$ y $\nu(A) < (\varepsilon/2)^p$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_{n_0-1}, \delta_0\}$. Sea $A \in \mathscr{A}$ con $\mu(A) < \delta$. Si $n < n_0$, entonces como $\mu(A) < \delta_n$ tenemos que,

$$\int_A |f_n|^p \, d\mu = \nu_n(A) < \varepsilon^p.$$

Si $n \geq n_0$, resulta que

$$\begin{aligned}\left(\int_A |f_n|^p \, d\mu\right)^{1/p} &= \|f_n 1_A\|_p \leq \|f_n - f\|_p + \|f\, 1_A\|_p \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + (\nu(A))^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Como se quería demostrar. ∎

Tenemos el siguiente recíproco parcial del teorema precedente (necesitamos algún tipo de convergencia, y funciona el más débil).

Teorema 9.16 (Vitali) *Si (f_n) converge a f en medida, $(|f_n|^p)$ satisface la condición (CF) y $(|f_n|^p)$ es continua uniformemente, entonces (f_n) converge a f en L^p.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $A_\varepsilon \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(A_\varepsilon) < +\infty$ y

$$\sup\left\{\int_{A_\varepsilon^c} |f_n|^p \, d\mu : n \in \mathbb{N}\right\} \leq \left(\frac{\varepsilon}{5}\right)^p,$$

y un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\mu(A) < \delta$, entonces

$$\sup\left\{\int_A |f_n|^p \, d\mu : n \in \mathbb{N}\right\} < \left(\frac{\varepsilon}{5}\right)^p.$$

Por otra parte, ya que (f_n) converge a f en medida,

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{10(1+\mu(A_\varepsilon))^{1/p}}\right\}\right) = 0,$$

por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$,

$$\mu\left(\left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{10(1+\mu(A_\varepsilon))^{1/p}}\right\}\right) < \frac{\delta}{2}.$$

En consecuencia, si $m, n \geq n_0$ y

$$H_{mn} = \left\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{\varepsilon}{5(1+\mu(A_\varepsilon))^{1/p}}\right\},$$

entonces del lema 9.1 resulta que $\mu(H_{mn}) < \delta$. De esta forma,

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_p &\leq \left\|(f_n - f_m)1_{A_\varepsilon}\right\|_p + \left\|f_n 1_{A_\varepsilon^c}\right\|_p + \left\|f_m 1_{A_\varepsilon^c}\right\|_p \\
&\leq \left\|(f_n - f_m)1_{A_\varepsilon \cap H_{mn}^c}\right\|_p + \left\|f_n 1_{A_\varepsilon \cap H_{mn}}\right\|_p \\
&\quad + \left\|f_m 1_{A_\varepsilon \cap H_{mn}}\right\|_p + \frac{2}{5}\varepsilon \\
&\leq \left(\int_{A_\varepsilon \cap H_{mn}^c} |f_n - f_m|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left\|f_n 1_{H_{mn}}\right\|_p \\
&\quad + \left\|f_m 1_{H_{mn}}\right\|_p + \frac{2}{5}\varepsilon \\
&\leq \left(\frac{\varepsilon^p}{5^p(1+\mu(A_\varepsilon))}\int_{A_\varepsilon \cap H_{mn}^c} d\mu\right)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{2}{5}\varepsilon \\
&\leq \frac{\varepsilon}{5(1+\mu(A_\varepsilon))^{1/p}}(\mu(A_\varepsilon))^{1/p} + \frac{4}{5}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, (f_n) es una sucesión de Cauchy en L^p. Por lo tanto, (f_n) converge a un elemento $h \in L^p$ en L^p. Lo que implica que (f_n) converge a f y a h en medida. De la proposición 9.2 concluimos que $f = h$ μ-cdq. Es decir, $f \in L^p$ y (f_n) converge a f en L^p. ∎

Corolario 9.5 *Si (f_n) converge a f en medida, $(|f_n|^p)$ es integrable uniformemente y $(|f_n|^p)$ satisface la condición (CF), entonces (f_n) converge a f en L^p.*

Demostración. Basta notar que el teorema 9.14 implica que (f_n) es continua uniformemente. ∎

Problemas

Problema 229 *Si (f_n) y (g_n) son integrables uniformemente, demostrar que $(f_n + g_n)$ es integrable uniformemente.*

Problema 230 *Si* $\sup\left\{\|f_n\|_p : n \in \mathbb{N}\right\} < +\infty$*,* $1 < p < +\infty$*, demostrar que* (f_n) *es integrable uniformemente.*

Problema 231 *Demostrar el teorema 9.16 con convergencia* μ*-cdq.*

Problema 232 *Sea* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$*. Si* $\lim_{u\to\infty} \varphi(u)/u = +\infty$ *y* $(\varphi(|f_n|))$ *es acotada en* L^1*, demostrar que* (f_n) *es integrable uniformemente.*

Problema 233 *Sea* $(f_n) = a_n 1_{[0,1/n]}$ *en* $[0,1]$ *con la medida de Lebesgue. ¿Para qué sucesiones* (a_n) *es* (f_n) *integrable uniformemente?.*

Problema 234 *Sean* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio de medida finita y* $1 \leq p < +\infty$*. Sea* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua tal que satisface la condición* $(*)$ *: existe* $K > 0$*,* $|\varphi(t)| \leq K|t|$ *para toda* $|t| \geq K$*. Si* (f_n) *converge a* f *en* L^p*, demostrar que* $(\varphi(f_n))$ *converge a* $\varphi(f)$ *en* L^p*. Recíprocamente, demostrar que si* φ *no satisface la condición* $(*)$*, entonces existe un espacio de medida finita y una sucesión* (f_n) *que converge a* f *en* L^p *pero* $(\varphi(f_n))$ *no converge a* $\varphi(f)$ *en* L^p*.*

Problema 235 *Sean* $f_n(x) = 1 + \cos(2\pi n x)$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Demostrar que para cada* $g \in L^1([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n g \, d\lambda = \int_0^1 g \, d\lambda,$$

pero (f_n) *no converge a* 1 *en medida.*

Problema 236 *Sea* $\mu(X) < +\infty$*. Si* $\sup\{|f_n| : n \in \mathbb{N}\} \in L^p$ *y* (f_n) *converge a* f μ*-cdq, demostrar que* $f \in L^p$ *y* (f_n) *converge a* f *en* L^p*.*

Chapter 10

Medidas producto

Se discutirá el espacio de medida producto $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \mu \otimes \nu)$ inducido por dos espacios de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $(Y, \mathscr{B}, \nu)$. Se verá también la relación que existe entre la integral con respecto a la medida producto $\mu \otimes \nu$ y la integral iterada con respecto a las medidas μ y ν.

10.1 σ-Álgebra producto

Recordemos lo siguiente. La medida de Lebesgue λ la definimos primero en el π-sistema $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, después en la álgebra $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ y finalmente usamos el teorema de extensión de Caratheodory para definirla en $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{C}(\mathbb{R}))$. Seguiremos un esquema similar a éste para definir la medida producto.

Definición 10.1 *Sean $(X, \mathscr{A})$ y $(Y, \mathscr{B})$ dos espacios medibles. Un conjunto de la forma $A \times B$ con $A \in \mathscr{A}$ y $B \in \mathscr{B}$ se llama rectángulo medible en $X \times Y$. La colección de todos los rectángulos medibles la denotaremos por $\mathscr{C}_p$.*

Si $A \times B$, $E \times F \in \mathscr{C}_p$, entonces

$$(A \times B) \cap (E \times F) = (A \cap E) \times (B \cap F).$$

Esto implica que $\mathscr{C}_p$ es un π-sistema.

Definición 10.2 *Sea $\mathscr{F}_p$ la colección formada por las uniones finitas de rectángulos medibles ajenos, es decir*

$$\mathscr{F}_p = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} D_i : D_i \in \mathscr{C}_p,\ D_i \cap D_j = \emptyset,\ si\ i \neq j,\ n \in N \right\}.$$

Lema 10.1 *$\mathscr{F}_p$ es un álgebra.*

Demostración. Si $E = \cup_{i=1}^{m} (A_i \times B_i)$ y $F = \cup_{j=1}^{n} \left(C_j \times D_j\right)$ están en $\mathscr{F}_p$, entonces

$$\begin{aligned} E \cap F &= \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} \left[(A_i \times B_i) \cap \left(C_j \times D_j\right)\right] \\ &= \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} \left[\left(A_i \cap C_j\right) \times \left(B_i \cap D_j\right)\right], \end{aligned}$$

y así $E \cap F \in \mathscr{F}_p$. Luego, $\mathscr{F}_p$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Si $(A \times B)$ es un rectángulo medible, entonces

$$(A \times B)^c = (A^c \times B) \cup (X \times B^c),$$

es unión ajena de rectángulos medibles. Si $E = \cup_{i=1}^{m} (A_i \times B_i) \in \mathscr{F}_p$, entonces $E^c = \cap_{i=1}^{m} (A_i \times B_i)^c$. Lo que implica que $E^c \in \mathscr{F}_p$, pues E^c es intersección finita de elementos de $\mathscr{F}_p$. De lo anterior resulta lo afirmado. ■

Definición 10.3 *Sean $(X, \mathscr{A})$ y $(Y, \mathscr{B})$ dos espacios medibles. La σ-álgebra producto, denotada por $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, es la σ-álgebra generada por los rectángulos medibles, es decir,*

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \sigma\left(\mathscr{C}_p\right).$$

Puesto que $\mathscr{C}_p \subset \mathscr{F}_p$, entonces $\sigma\left(\mathscr{C}_p\right) \subset \sigma\left(\mathscr{F}_p\right)$. Además, $\mathscr{F}_p \subset \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, implica $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \sigma\left(\mathscr{F}_p\right)$.

Definición 10.4 *Si $E \subset X \times Y$ y $x \in X$, la x-sección de E es el conjunto*

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}.$$

Análogamente, si $y \in Y$, la y-sección de E es el conjunto

$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Si $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \in X$, la x-sección de f es la función

$$f_x(y) = f(x, y), \quad y \in Y.$$

Análogamente, si $y \in Y$, la y-sección de f es la función

$$f^y(x) = f(x, y), \quad x \in X.$$

Ejemplo 10.1 *Sea $f = 1_E$ con $E \subset X \times Y$, entonces*

$$(1_E)_x = 1_{E_x}.$$

En particular, si $E = A \times B$,

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B, & x \in A, \\ \varnothing, & x \notin A, \end{cases}$$

entonces $(1_{A \times B})_x = 1_A(x) 1_B$. Se obtienen expresiones análogas para las y-secciones.

Lema 10.2 *(i) Si $E \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$, entonces toda sección de E es medible.*
(ii) Si $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$-$\mathscr{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ medible, entonces toda sección de f es medible.

Demostración. Demostraremos que las x-secciones son medibles. De forma similar se demuestra que las y-secciones también lo son.
(i) : Sea $\mathscr{D}$ la colección de los conjuntos $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$-medibles tal que toda x-sección es medible. Si $A \times B \in \mathscr{C}_p$, del ejemplo 10.1 tenemos que $(A \times B)_x$ es medible. Si $E \in \mathscr{D}$, entonces $(E^c)_x = (E_x)^c$ es medible. Además, si (E_n) es una sucesión en $\mathscr{D}$, entonces $\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_x = \cup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x$ es medible. Así, $\mathscr{D}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathscr{C}_p$. En consecuencia $\mathscr{D} = \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$.
(ii) : Sean $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} f_x^{-1}((\alpha,+\infty]) &= \{y \in Y : f_x(y) > \alpha\} \\ &= \{y \in Y : f(x,y) > \alpha\} \\ &= \{(s,y) \in X \times Y : f(s,y) > \alpha\}_x = (f^{-1}((\alpha,+\infty]))_x. \end{aligned}$$

Si f es $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$-medible del lema 5.6 y de lo anterior se sigue que la función f_x es $\mathscr{B}$-medible. ∎

Puede ocurrir que toda sección sea medible pero el conjunto no sea medible (ésto pasa con el conjunto de Sierpiński en $\mathbb{R}^2$). Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En ocasiones suele ser difícil mostrar que f es $\mathscr{B}(\mathbb{R})\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R})$ medible, pero fácil ver que es $\mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ medible. Por ejemplo, si f es continua es inmediato que f es $\mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ medible. Así, es conveniente conocer qué relación existe entre estas dos σ-álgebras. Esto lo trataremos en el contexto de espacios métricos. Sean (X_1, d_1), (X_2, d_2) dos espacios métricos. La función $d_3 : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \to \mathbb{R}_+$,

$$d_3((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = \max\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\},$$

es una métrica en $X_1 \times X_2$ y $(X_1 \times X_2, d_3)$ se llama *espacio métrico producto* de (X_1, d_1) y (X_2, d_2).

Teorema 10.1 *Sean (X_1, d_1), (X_2, d_2) dos espacios métricos.*
(i) $\mathscr{B}(X_1)\otimes\mathscr{B}(X_2) \subset \mathscr{B}(X_1 \times X_2)$.
(ii) Si (X_1, d_1), (X_2, d_2) son separables, entonces $\mathscr{B}(X_1)\otimes\mathscr{B}(X_2) = \mathscr{B}(X_1 \times X_2)$.

Demostración. (i) : Consideremos las proyecciones $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$, $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$, definidas por:

$$\pi_1(x,y) = x, \quad \pi_2(x,y) = y.$$

Sean $A \in \mathscr{B}(X_1)$, $B \in \mathscr{B}(X_2)$, entonces $\pi_1^{-1}(A), \pi_2^{-1}(B) \in \mathscr{B}(X_1 \times X_2)$, pues π_1, π_2 son continuas. Además,

$$A \times B = (A \times X_2) \cap (X_1 \times B) = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B) \in \mathscr{B}(X_1 \times X_2).$$

Se sigue de aquí que, $\mathscr{B}(X_1) \otimes B(X_2) \subset \mathscr{B}(X_1 \times X_2)$.
(ii) : Sean D_1 y D_2 dos conjuntos contables densos en X_1 y X_2, respectivamente. El conjunto $D_1 \times D_2$ es un conjunto contable denso en $X_1 \times X_2$. Sea U un conjunto abierto en $(X_1 \times X_2, d_3)$, entonces

$$U = \bigcup_{(x,y) \in U} B_3\left((x,y), r_{(x,y)}\right),$$

donde $B_3\left((x,y), r_{(x,y)}\right)$ es una bola abierta, con respecto a la métrica d_3, que está contenida en U. Del teorema 1.1 aplicado a $(X_1 \times X_2, d_3)$ se sigue que

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_3\left((x_i, y_i), r_{(x_i,y_i)}\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[B_1\left(x_i, r_{(x_i,y_i)}\right) \times B_2\left(y_i, r_{(x_i,y_i)}\right)\right].$$

En consecuencia, $U \in \mathscr{B}(X_1) \otimes \mathscr{B}(X_2)$. Lo que implica, $\mathscr{B}(X_1 \times X_2) \subset \mathscr{B}(X_1) \otimes \mathscr{B}(X_2)$. ■

Lema 10.3 $\sigma(\{(a,+\infty) \times (b,+\infty) : a, b \in \mathbb{R}\}) = \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Demostración. Sea $\mathscr{C} = \{(a,+\infty) \times (c,+\infty) : a, c \in \mathbb{R}\}$. Para $b \in \mathbb{R}$ arbitrario fijo defínase la colección

$$\mathscr{U}_b = \{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : A \times (b,+\infty) \in \sigma(\mathscr{C})\}.$$

Sea $A \in \mathscr{U}_b$. Puesto que

$$A^c \times (b,+\infty) = (A \times (b,+\infty))^c \bigcap (\mathbb{R} \times (b,+\infty)) \in \sigma(\mathscr{C}),$$

entonces $A^c \in \mathscr{U}_b$. Sea (A_n) una sucesión en $\mathscr{U}_b$, entonces

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \times (b,+\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [A_n \times (b,+\infty)] \in \sigma(\mathscr{C}),$$

por lo tanto, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{U}_b$. Ya que $\mathscr{C}((a,+\infty)) \subset \mathscr{U}_b$, resulta, $\mathscr{U}_b = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Sea $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ arbitrario fijo y defínase la colección

$$\mathscr{U}_A = \{B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : A \times B \in \sigma(\mathscr{C})\}.$$

De manera análoga se demuestra que $\mathscr{U}_A$ es una σ-álgebra. De la primera parte tenemos que $\mathscr{C}((b,+\infty)) \subset \mathscr{U}_A$, así, $\mathscr{U}_A = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. En consecuencia,

$$\{A \times B : A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\} \subset \sigma(\{(a,+\infty) \times (b,+\infty) : a, b \in \mathbb{R}\}).$$

Por lo tanto, $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\{(a,+\infty) \times (b,+\infty) : a, b \in \mathbb{R}\})$. La contención contraria es clara. ■

Teorema 10.2 *Sean μ una medida finita en $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ y $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones medibles tal que*

$$\int f(u)\, g(v)\, d\mu = \int f(u)\, g(u)\, d\mu,$$

para cualesquiera $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y acotadas. Entonces $u = v$ μ-cdq.

Demostración. Sea

$$\mathscr{H} = \left\{ h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : h \text{ es medible, acotada y } \int h(u,v)\, d\mu = \int h(u,u)\, d\mu \right\}.$$

Observemos que $\mathscr{H}$ es un espacio vectorial que cumple:
(i) $1_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \in \mathscr{H}$.
(ii) Si C es un elemento del π-sistema $\{(a, +\infty) \times (b, +\infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$, entonces $1_C \in \mathscr{H}$. En efecto, sean $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $C = (a, +\infty) \times (b, +\infty)$, entonces existen sucesiones (f_n), (g_n) de funciones continuas y acotadas tal que $f_n \uparrow 1_{(a,+\infty)}$, $g_n \uparrow 1_{(b,+\infty)}$. Del teorema de la convergencia monótona y de la hipótesis resulta que

$$\begin{aligned}
\int 1_{(a,+\infty)\times(b,+\infty)}(u,v)\, d\mu &= \int 1_{(a,+\infty)}(u)\, 1_{(b,+\infty)}(v)\, d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int f_n(u)\, g_n(v)\, d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int f_n(u)\, g_n(u)\, d\mu \\
&= \int 1_{(a,+\infty)}(u)\, 1_{(b,+\infty)}(u)\, d\mu \\
&= \int 1_{(a,+\infty)\times(b,+\infty)}(u,u)\, d\mu.
\end{aligned}$$

(iii) Si $(h_n) \subset \mathscr{H}$ y $0 \le h_n \uparrow h$, entonces el teorema de la convergencia monótona implica que $h \in \mathscr{H}$.

Del lema 5.2 se concluye que $\mathscr{H}$ contiene a todas las funciones $\sigma(\{(a, +\infty) \times (b, +\infty) : a, b \in \mathbb{R}\}) = \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ medibles, hemos usado el lema 10.3. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ y $h = 1_{D^c}$. Puesto que $h \in \mathscr{H}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mu(\{x \in \mathbb{R} : u(x) \neq v(x)\}) &= \int 1_{D^c}(u,v)\, d\mu \\
&= \int 1_{D^c}(u,u)\, d\mu \\
&= \mu(\{x \in \mathbb{R} : u(x) \neq u(x)\}) = \mu(\emptyset) = 0.
\end{aligned}$$

De lo cual se sigue el resultado. ∎

Problemas

Problema 237 *Sean $A_1,...,A_n \in \mathscr{A}$ y $B_1,...,B_n \in \mathscr{B}$. Demostrar que $\cup_{i=1}^{n}(A_i \times B_i)$ se puede escribir como unión ajena de rectángulos medibles.*

Problema 238 *Demostrar que $\sigma(\{(a,b)\times(c,d) : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R})$.*

Problema 239 *Sean E y F dos espcios métricos separables. Demostrar que $\sigma(\tau_{E\times F}) = \sigma(\tau_E^c \times \tau_F^c)$ donde $\tau_E^c \times \tau_F^c = \{A\times B : E\backslash A \in \tau_E, F\backslash B \in \tau_F\}$.*

Problema 240 *Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ subconjuntos de $\mathscr{P}(X)$ y $\mathscr{P}(Y)$, respectivamente. Demostrar que $\sigma(\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2) \subset \sigma(\mathscr{C}_1)\otimes\sigma(\mathscr{C}_2)$. Si además X es unión contable de elementos de $\mathscr{C}_1$ demostrar que se tiene la igualdad.*

Problema 241 *Sea $f : \mathbb{R}\times X \to \mathbb{R}^d$. Demostrar que si $f(t,\cdot)$ es medible y $f(\cdot,x)$ es continua por la derecha, entonces f es medible.*

10.2 Medidas producto

Sean $(X,\mathscr{A},\mu)$ y $(Y,\mathscr{B},\nu)$ dos espacios de medida. La medida producto π en la colección de los rectángulos medibles $\mathscr{C}_p$ se define como

$$\pi(A\times B) = \mu(A)\,\nu(B), \quad A\times B \in \mathscr{C}_p. \tag{10.1}$$

Ahora, si $E \in \mathscr{F}_p$, entonces $E = \cup_{i=1}^{n}[A_i \times B_i]$ con $(A_i \times B_i)_{i=1}^{n}$ colección ajena en $\mathscr{C}_p$. Definimos

$$\pi(E) = \sum_{i=1}^{n} \pi(A_i \times B_i). \tag{10.2}$$

Veamos que π está bien definida. Supongamos que $\cup_{i=1}^{n}[A_i \times B_i] = \cup_{j=1}^{m}[C_j \times D_j]$, siendo $(A_i \times B_i)_{i=1}^{n}$ y $\left(C_j \times D_j\right)_{j=1}^{m}$ colecciones ajenas, respectivamente, de elementos en $\mathscr{C}_p$. Nótese que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}(x)\,1_{B_i}(y) &= 1_{\cup_{i=1}^{n}[A_i\times B_i]}(x,y) \\ &= 1_{\cup_{j=1}^{m}[C_j\times D_j]}(x,y) = \sum_{j=1}^{m} 1_{C_j}(x)\,1_{D_j}(y). \end{aligned} \tag{10.3}$$

Sea $y \in Y$ fijo. Integrando con respecto a x, nos queda

$$\sum_{i=1}^{n}\int 1_{A_i}(x)\,\mu(dx)\,1_{B_i}(y) = \sum_{j=1}^{m}\int 1_{C_j}(x)\,\mu(dx)\,1_{D_j}(y),$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\, 1_{B_i}(y) = \sum_{j=1}^{m} \mu\left(C_j\right) 1_{D_j}(y).$$

Integrando ahora con respecto a y, obtenemos de (10.2), que

$$\pi\left(\bigcup_{i=1}^{n}[A_i \times B_i]\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\, \nu(B_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu\left(C_j\right) \nu\left(D_j\right) = \pi\left(\bigcup_{j=1}^{m}\left[C_j \times D_j\right]\right).$$

Teorema 10.3 *π es una medida en la álgebra $\mathscr{F}_p$.*

Demostración. Veamos que π es σ-aditiva. Sea (E_n) una sucesión ajena en $\mathscr{F}_p$ tal que $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{F}_p$, entonces $E_n = \bigcup_{i=1}^{k_n}\left[A_i^n \times B_i^n\right]$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{j=1}^{m}\left[C_j \times D_j\right]$, con $\left(A_i^n \times B_i^n\right)_{i=1}^{k_n}$ y $\left(C_j \times D_j\right)_{j=1}^{m}$ colecciones ajenas en $\mathscr{C}_p$. Así,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} 1_{C_j}(x)\, 1_{D_j}(y) &= 1_{\cup_{j=1}^{m}\left[C_j \times D_j\right]}(x,y) \\
&= 1_{\cup_{n=1}^{\infty}\cup_{i=1}^{k_n}\left[A_i^n \times B_i^n\right]}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n} 1_{A_i^n}(x)\, 1_{B_i^n}(y).
\end{aligned}$$

Fijemos una $y \in Y$. Del corolario 6.1 resulta

$$\sum_{j=1}^{m} \mu\left(C_j\right) 1_{D_j}(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n} \mu\left(A_i^n\right) 1_{B_i^n}(y).$$

Aplicando de nuevo el corolario 6.1,

$$\sum_{j=1}^{m} \mu\left(C_j\right) \nu\left(D_j\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n} \mu\left(A_i^n\right) \nu\left(B_i^n\right).$$

Es decir, de (10.2),

$$\pi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \pi\left(\bigcup_{j=1}^{m}\left[C_j \times D_j\right]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(E_n).$$

Como se quería demostrar. ∎

Por el teorema de extensión de Caratheodory existe una extensión de π a una medida π^* definida en la σ-álgebra $(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B})^*$. En particular, π^* está definida en la σ-álgebra $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ y satisface (10.1). El ejercicio 246 muestra que pueden existir distintas medidas producto en $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ que satisfagan (10.1). Sin embargo, si $(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ son σ-finitos, es decir, $X = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\mu(A_i) <$

$+\infty$, $Y = \cup_{j=1}^{\infty} B_j$, $\nu\left(B_j\right) < +\infty$, entonces $(X \times Y, \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}, \pi^*)$ es σ-finito, pues $X\times Y = \cup_{i=1}^{\infty}\cup_{j=1}^{\infty}\left[A_i \times B_j\right]$ y $\pi^*\left(A_i \times B_j\right) = \mu(A_i)\,\nu\left(B_j\right) < +\infty$. En consecuencia, el teorema de unicidad de Hahn implica que la medida π^* es única y la llamaremos *medida producto* de μ y ν. Esta medida la denotaremos por $\mu\otimes\nu$.

Ejemplo 10.2 *La medida $\lambda^2 = \lambda\otimes\lambda$ en $\left(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$, se obtiene al considerar el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.*

Problemas

Problema 242 *Para $j = 1,2$, sean μ_j, ν_j medidas σ-finitas en $\left(X_j, \mathscr{A}_j\right)$.*
(i) Si $\nu_j \ll \mu_j$, demostrar que $\nu_1\otimes\nu_2 \ll \mu_1\otimes\mu_2$ y

$$\frac{d\left(\nu_1\otimes\nu_2\right)}{d\left(\mu_1\otimes\mu_2\right)}(x_1,x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1)\,\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2).$$

(ii) Si $\mu_1 \perp \nu_1$ o $\mu_2 \perp \nu_2$, demostrar que $\nu_1\otimes\nu_2 \perp \mu_1\otimes\mu_2$.

Problema 243 *Sean $A,B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ tal que $\lambda(A) > 0$ y $\lambda(B) > 0$. Demuestre que existe $C \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ tal que $\lambda(C) > 0$ y $\lambda(A\cap(B+y)) > 0$ para toda $y \in C$.*

Problema 244 (Principio de Cavalieri) *Suponga que para todo $x \in X$ se cumple que $\nu(\{y : (x,y) \in E\}) = \nu(\{y : (x,y) \in F\})$. Demostrar que $(\mu\otimes\nu)(E) = (\mu\otimes\nu)(F)$.*

Problema 245 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ tal que $1 < \mu(X) < +\infty$ y sea $A \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{A}$, $(\mu\otimes\mu)(A\cap R) = (\mu\otimes\mu)(A)(\mu\otimes\mu)(R)$ para todos los rectángulos medibles R. Demuestre que $(\mu\otimes\mu)$ $(A) = 0$.*

Problema 246 *Sea $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{R})$ y sea μ definida por $\mu(A) = 0$ si A es contable y $\mu(A) = +\infty$ si A es no contable.*
(i) Si $E \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{A}$, definase $\pi(E) = 0$ en caso de que E pueda expresarse como la unión $E = G\cup H$ de dos conjuntos en $\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}$ tales que la x-sección de G es contable y la y-sección de H es contable. En otro caso, defínase $\pi(E) = +\infty$. Demostrar que π es una medida en $\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}$. Si $\pi(E) = 0$, demostrar que E está contenido en la unión de un conjunto contable de líneas en el plano. Si $A,B \in X$, demostrar que $\pi(A\times B) = \mu(A)\,\mu(B)$.
(ii) Si $E \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{A}$, defínase $\rho(E) = 0$ en caso de que E pueda expresarse como la unión $E = G\cup H\cup K$ de tres conjuntos en $\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}$ tales que la x-sección de G sea contable, la y-sección de H sea contable, y la proyección de K en la línea, con ecuación $y = x$, sea contable. En otro caso, defínase $\rho(E) = +\infty$. Demostrar que ρ es una medida en $\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}$, y si $\rho(E) = 0$, entonces E está contenido en la unión de un conjunto contable de líneas. Si $A,B \in X$, demuestre que $\rho(A\times B) = \mu(A)\,\mu(B)$.
(iii) Sea $E = \{(x,y) : x+y = 0\}$; demuestre que $E \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{A}$ y que $\rho(E) = 0$, $\pi(E) = +\infty$.

Problema 247 *Demostrar que $\left(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right), \lambda^2\right)$ es un espacio de medida incompleto.*

10.3 Teorema de Tonelli-Fubini

Ahora estudiemos el resultado principal en las medidas producto.

Teorema 10.4 (Tonelli) *Sean $(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ dos espacios de medida σ-finitos y $F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$ medible. Entonces las funciones*

$$h(x) = \int_Y F_x d\nu, \quad g(y) = \int_X F^y d\mu,$$

son medibles y

$$\int_X h d\mu = \int_{X \times Y} F d(\mu \otimes \nu) = \int_Y g d\nu. \tag{10.4}$$

En otros símbolos,

$$\int_X \left(\int_Y F d\nu \right) d\mu = \int_{X \times Y} F d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left(\int_X F d\mu \right) d\nu,$$

o bien

$$\begin{aligned} \int_X \int_Y F(x,y)\, \nu(dy)\, \mu(dx) &= \int_{X \times Y} F(x,y)\, \mu \otimes \nu(dx, dy) \\ &= \int_Y \int_X F(x,y)\, \mu(dx)\, \nu(dy). \end{aligned}$$

Demostración. Caso μ y ν medidas finitas. Consideremos la colección

$$\mathscr{L} = \{ E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} : F = 1_E \text{ cumple la afirmación del teorema} \}.$$

Veamos que $\mathscr{L}$ es un d-sistema. Claramente $X \times Y \in \mathscr{L}$. Si $E \in \mathscr{L}$, entonces

$$\begin{aligned} h(x) &= \nu((E^c)_x) = \nu(Y) - \nu(E_x), \\ g(y) &= \mu\big((E^c)^y\big) = \mu(X) - \mu(E^y), \end{aligned}$$

son medibles y

$$\begin{aligned} \int_X (\nu(Y) - \nu(E_x))\, \mu(dx) &= \nu(Y)\mu(X) - \int_{X \times Y} 1_E(x,y)(\mu \otimes \nu)(dx, dy) \\ &= \int_{X \times Y} (1 - 1_E)(x,y)(\mu \otimes \nu)(dx, dy) \\ &= \int_{X \times Y} 1_{E^c}(x,y)(\mu \otimes \nu)(dx, dy) \\ &= \int_Y (\mu(X) - \mu(E^y))\, \nu(dy). \end{aligned}$$

Por lo tanto $E^c \in \mathscr{L}$. Ahora, sea (E_n) una sucesión ajena en $\mathscr{L}$. Debido a que

$$h(x) = \nu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_x\right) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \nu\big((E_i)_x\big),$$

$$g(y) = \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^y\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)^y\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu((E_i)^y),$$

entonces h y g son medibles y del teorema de la convergencia monótona, resulta

$$\begin{aligned}
\int_X h(x)\mu(dx) &= \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} \nu\big((E_n)_x\big)\right)\mu(dx) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu\big((E_n)_x\big)\mu(dx) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X\times Y} 1_{E_n}(x,y)(\mu\otimes\nu)(dx,dy) \\
&= \int_{X\times Y} 1_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n}(x,y)(\mu\otimes\nu)(dx,dy) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_Y \mu((E_n)^y)\,\nu(dy) = \int_Y g(y)\,\nu(dy).
\end{aligned}$$

Así, $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{L}$, por lo tanto $\mathscr{L}$ es un d-sistema.

Además, si $A \times B \in \mathscr{C}_p$, entonces

$$h(x) = 1_A(x)\,\nu(B), \quad g(y) = 1_B(y)\,\mu(A),$$

son medibles y

$$\begin{aligned}
\int_X h(x)\mu(dx) &= \mu(A)\,\nu(B) \\
&= \int 1_{A\times B}(x,y)(\mu\otimes\nu)(dx,dy) = \int_Y g(y)\,\nu(dy).
\end{aligned}$$

Del teorema 2.4 concluimos que $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B} = \sigma\left(\mathscr{C}_p\right) = \mathscr{L}$.

Caso μ, ν medidas σ-finitas. Sean (X_n), (Y_n) sucesiones en $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ tal que $X_n \uparrow X$, $Y_n \uparrow Y$ y $\mu(X_n) < +\infty$, $\nu(Y_n) < +\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $X_j \times Y_j \uparrow X \times Y$. Definamos las medidas finitas μ_j, ν_j, como

$$\begin{aligned}
\mu_j(A) &= \mu\big(A \cap X_j\big), \quad A \in \mathscr{A}, \\
\nu_j(B) &= \nu\big(B \cap Y_j\big), \quad B \in \mathscr{B}.
\end{aligned}$$

Si $F = 1_E$ con $E \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$, entonces

$$\begin{aligned} h(x) &= \nu(E_x) = \lim_{j\to\infty} \nu_j(E_x), \\ g(y) &= \mu(E^y) = \lim_{j\to\infty} \mu_j(E^y). \end{aligned}$$

De lo cual se sigue la medibilidad de h y g pues ν_j y μ_j son medidas finitas. Puesto que

$$h(x) = h(x)\,1_X(x) = \lim_{j\to\infty} \nu_j(E_x)\,1_{X_j}(x),$$

$1_{X_j} d\mu = d\mu_j$ y $d\left(\mu_j\otimes\nu_j\right) = 1_{X_j\times Y_j} d(\mu\otimes\nu)$ obtenemos, usando el teorema de la convergencia monótona, que

$$\begin{aligned} \int h(x)\,\mu(dx) &= \lim_{j\to\infty} \int \nu_j(E_x)\,1_{X_j}(x)\,\mu(dx) \\ &= \lim_{j\to\infty} \int \nu_j(E_x)\,\mu_j(dx) \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_{X\times Y} 1_E(x,y)\left(\mu_j\otimes\nu_j\right)(dx,dy) \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_{X\times Y} 1_{X_j\times Y_j}(x,y)\,1_E(x,y)(\mu\otimes\nu)(dx,dy) \\ &= \int_{X\times Y} 1_E(x,y)(\mu\otimes\nu)(dx,dy). \end{aligned}$$

De manera similar se demuestra que

$$\int_Y g(y)\,\nu(dy) = \int_{X\times Y} 1_E(x,y)(\mu\otimes\nu)(dx,dy).$$

Por la linealidad de la integral se sigue el resultado para funciones simples medibles (usando su representación estandar). Si $F : X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es medible, entonces existe una sucesión (Φ_n) de funciones simples medibles tal que $0 \le \Phi_n \uparrow F$, véase lema 5.10. Las funciones

$$\varphi_n(x) = \int_Y (\Phi_n)_x\,d\nu, \quad \psi_n(y) = \int_X (\Phi_n)^y\,d\mu,$$

son medibles. Ya que $(\Phi_n)_x \uparrow F_x$, $(\Phi_n)^y \uparrow F^y$, entonces del teorema de la convergencia monótona resulta

$$\varphi_n(x) \uparrow \int_Y F_x\,d\nu = h(x), \quad \psi_n(y) \uparrow \int_X F^y d\mu = g(y).$$

De nuevo, por el teorema de la convergencia monótona,

$$\begin{aligned}\int_X h d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_X \varphi_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y}\Phi_n d(\mu\otimes\nu)\\ &= \int_{X\times Y} F d(\mu\otimes\nu) = \lim_{n\to\infty}\int_Y \psi_n d\nu = \int_Y g d\nu.\end{aligned}$$

Como se quería demostrar. ■

El siguiente ejemplo muestra que el teorema de Tonelli puede fallar si alguna de las dos medidas μ y ν no es σ-finita.

Ejemplo 10.3 *Sea μ la medida de Lebesgue en $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ y ν la medida de contar en $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Definamos la función $\varphi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, por*

$$\varphi(x,y) = x - y.$$

Por ser φ continua, del teorema 10.1 se sigue que φ es $\mathscr{B}(\mathbb{R})\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R})$ medible. En consecuencia $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x=y\}=\varphi^{-1}(\{0\})$ es un elemento de $\mathscr{B}(\mathbb{R})\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Sea $F=1_D$, entonces

$$h(x)=\nu(D_x)=\nu(\{x\})=1,\quad g(y)=\mu(D^y)=\mu(\{y\})=0.$$

Así,

$$\int h d\mu = \infty \neq 0 = \int g d\nu.$$

Note que la medida $\mu\otimes\nu$ no necesariamente existe.

Teorema 10.5 (Fubini) *Sean $(X,\mathscr{A},\mu)$ y $(Y,\mathscr{B},\nu)$ espacios de medida σ-finitos. Si $F:X\times Y\to\mathbb{R}$ es integrable con respecto a $\mu\otimes\nu$, entonces $F_x\in\mathscr{L}(Y,\mathscr{B},\nu)$ para casi toda $x\in X$, $F^y\in\mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$ para casi toda $y\in Y$, las funciones*

$$h(x)=\int_Y F_x d\nu,\quad g(y)=\int_X F^y d\mu,$$

están definidas casi donde quiera, pertenecen a $\mathscr{L}(X,\mathscr{A},\mu)$ y a $\mathscr{L}(Y,\mathscr{B},\nu)$, respectivamente, y (10.4) se cumple.

Demostración. Puesto que $F\in\mathscr{L}(X\times Y,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B},\mu\otimes\nu)$, entonces F^+, $F^-\in\mathscr{L}(X\times Y,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B},\mu\otimes\nu)$. Sean

$$h^+(x)=\int_Y \left(F^+\right)_x d\nu,\quad h^-(x)=\int_Y \left(F^-\right)_x d\nu.$$

El teorema de Tonelli implica que

$$\begin{aligned}\int_X h^+ d\mu &= \int_{X\times Y} F^+ d(\mu\otimes\nu) < +\infty,\\ \int_X h^- d\mu &= \int_{X\times Y} F^- d(\mu\otimes\nu) < +\infty.\end{aligned}$$

Así, $h^+ < +\infty$ μ-cdq y $h^- < +\infty$ μ-cdq. En consecuencia,

$$\begin{aligned}h(x) &= \int F_x d\nu = \int \left(F^+\right)_x d\nu - \int \left(F^-\right)_x d\nu\\ &= h^+(x) - h^-(x),\end{aligned}$$

está definida μ-cdq. Lo que implica que, $F_x \in \mathscr{L}(Y, \mathscr{B}, \nu)$ para casi toda $x \in X$ y $h \in \mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$. Además,

$$\begin{aligned}\int_X h d\mu &= \int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu\\ &= \int_{X\times Y} F^+ d(\mu\otimes\nu) - \int_{X\times Y} F^- d(\mu\otimes\nu)\\ &= \int_{X\times Y} F d(\mu\otimes\nu).\end{aligned}$$

De igual forma se demuestra que la función F^y está en $\mathscr{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ y la segunda parte de (10.4). ■

El espacio de medida $(X \times Y, \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}, \mu\otimes\nu)$ casi nunca es un espacio de medida completo, no obstante que $(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ lo sean. En efecto, supongamos que existe $A \in \mathscr{A}$, $A \neq \emptyset$ con $\mu(A) = 0$ y un $B \subset Y$ tal que $B \notin \mathscr{B}$, entonces $A \times B \subset A \times Y$ y $(\mu\otimes\nu)(A \times Y) = \mu(A)\,\nu(Y) = 0$ pero $A \times B \notin \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ (si $A \times B \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$, y $y \in B$, entonces $(A \times B)_y = A \in \mathscr{A}$.)

Veremos a continuación cómo se expresa el teorema de Fubini en el espacio de medida completo $\left(X \times Y, \widetilde{\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}}, \widetilde{\mu\otimes\nu}\right)$.

Lema 10.4 *Sean $(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ dos espacios de medida completos σ-finitos y $h : X \times Y \to \mathbb{R}$, $\widetilde{\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}}$-medible tal que $h = 0$ $\widetilde{\mu\otimes\nu}$-cdq. Entonces para casi toda $x \in X$, $h(x, y) = 0$ para casi toda $y \in Y$. En particular, h_x es $\mathscr{B}$-medible para casi toda $x \in X$. Se cumple el análogo para h^y.*

Demostración. Sea

$$B = \{(x, y) \in X \times Y : h(x, y) \neq 0\} = (h^{-1}(\{0\}))^c.$$

Entonces $B \in \widetilde{\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}}$ y $\widetilde{\mu\otimes\nu}(B) = 0$. Existe $C \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ tal que $B \subset C$ y $(\mu\otimes\nu)(C) = 0$. Del teorema de Tonelli obtenemos que

$$\int_X \nu(C_x)\, d\mu(x) = 0, \tag{10.5}$$

en consecuencia $\mu(\{x : \nu(C_x) > 0\}) = 0$. Sea $N = \{x : \nu(C_x) > 0\}$ $(\mu(N) = 0)$. Puesto que $B_x \subset C_x$ y $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ es completo, entonces $B_x = \{y \in Y : h_x(y) \neq 0\} \in \mathscr{B}$ si $x \in N^c$. De esta forma, para cada $x \in N^c$, $h_x = 0$ ν-cdq, es decir para casi toda $x \in X$, $h(x, y) = 0$ para casi toda $y \in Y$. Por otra parte, debido a que la función 0 es $\mathscr{B}$-medible, se sigue del lema 5.11 que h_x también lo es. ■

Teorema 10.6 *Sean $(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ espacios completos σ-finitos. Sea $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función en $\mathscr{L}\left(X \times Y, \widetilde{\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}}, \widetilde{\mu\otimes\nu}\right)$. Entonces se cumplen las afirmaciones del teorema 10.5 con la diferencia de que F_x es $\mathscr{B}$-medible para casi toda x. Análogamente para las y-secciones.*

Demostración. Del teorema 5.1 se sigue que existe una función G, $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$-medible, tal que $F = G$ $\mu\otimes\nu$-cdq. Del lema 10.4 obtenemos (G también es $\widetilde{\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}}$-medible) que $F_x = G_x$ ν-cdq para casi toda $x \in X$ y $F^y = G^y$ μ-cdq para casi toda $y \in Y$. De esta manera el resultado se obtiene aplicando el teorema 10.5 a G. Par ello basta ver que $G \in \mathscr{L}(X \times Y, \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}, \mu\otimes\nu)$,

$$\int_{X\times Y} |G| d(\mu\otimes\nu) = \int_{X\times Y} |G| d(\widetilde{\mu\otimes\nu}) = \int_{X\times Y} |F| d(\widetilde{\mu\otimes\nu}),$$

donde hemos usado que $F = G$ $\widetilde{\mu\otimes\nu}$-cdq. ■

Problemas

Problema 248 *¿Está la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por*

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

en $\mathscr{L}^2\left([-1, 1]^2, \mathscr{B}([-1, 1]^2), \lambda^2\right)$?.

Problema 249 *Sea $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathscr{A} = \mathscr{B} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ y $\mu = \nu =$ medida de contar. Defínase*

$$f(m, n) = \begin{cases} 1, & m = n, \\ -1, & m = n + 1, \\ 0, & m \neq n, n + 1. \end{cases}$$

Demostrar que $\int |f|\, d(\mu\otimes\nu) = +\infty$ y $\int\int f\, d\mu d\nu$, $\int\int f\, d\nu d\mu$ existen y son diferentes.

Problema 250 *Para cada una de las funciones* $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ *calcular* $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$, $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$, $\int_0^1 \int_0^1 |f(x,y)|\,dx\,dy$ *y* $\int_0^1 \int_0^1 |f(x,y)|\,dy\,dx$:
(i) $f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2\right)^{-2}$.
(ii) $f(x,y) = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{-3}, & 0 < y < \left|x - \frac{1}{2}\right|, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
(iii) $f(x,y) = (x-y)\left(x^2 + y^2\right)^{-3/2}$.
(iv) $f(x,y) = (1 - xy)^{-p}$, $p > 0$.

Problema 251 *Sean* μ *una medida* σ*-finita en* $(X, \mathscr{A})$, $f : X \to [0, +\infty]$ *una función medible y* $1 \le p < +\infty$. *Demostrar que*

$$\int f^p d\mu = \int_0^\infty p t^{p-1} \mu(\{x : f(x) > t\})\,dt.$$

Problema 252 *Sean* f *y* g *integrables en* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *y* $(Y, \mathscr{B}, \nu)$, *respectivamente. Demostrar que* $f(x)\,g(y)$ *es integrable en* $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \mu \otimes \nu)$ *y*

$$\int f g\, d(\mu \otimes \nu) = \int f\, d\mu \int g\, d\nu.$$

Problema 253 *Demostrar que*
(i) $\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$,
(ii) $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$.

Problema 254 *Para* $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *y* $t \in \mathbb{R}$, *sea* $f_t(s) = f(t+s)$, $s \in \mathbb{R}$. *Demostrar que:*
(i) $\|f_t\|_1 = \|f\|_1$.
(ii) *La función* $t \to f_t$ *es continua.*

Problema 255 *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ σ*-finito y* $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ *no negativa. Demostrar que*

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) = (\mu \otimes \lambda)(\{(x,y) : 0 \le y \le f(x)\}).$$

(Lo cual podemos interpretar como que la integral es el área bajo la curva.)

Problema 256 *Sean* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *y* $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < +\infty$. *Demostrar las siguientes afirmaciones:*
(i) *Las funciones* $y \to f(x-y)\,g(y)$ *y* $y \to g(x-y)\,f(y)$ *están en* $L^1(\mathbb{R})$ *para* λ*-casi todo* x. *Para tales* x, *sean*

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)\,g(y)\,dy, \quad (g * f)(x) = \int g(x-y)\,f(y)\,dy.$$

(ii) $f * g = g * f$ λ*-cdq.*
(iii) $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ *y* $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$.

Problema 257 *Sean μ y ν medidas σ-finitas en $\left(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$. Se define la medida convolución de μ y ν por*

$$(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \mu(A-x)\, \nu(dx), \quad A \in \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

(i) *Demostrar que la función $x \to \mu(A-x)$ es Borel-medible. (Por lo tanto, la definición tiene sentido)*
(ii) *Si λ^2 es la medida de Lebesgue en $\mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$, demuestre que $\mu \ll \lambda^2$, implica $\mu * \nu \ll \lambda^2$ y encuentre la derivada de Radon-Nikodym $d(\mu * \nu)/d\lambda^2$.*
(iii) *¿Si $\mu * \nu \ll \lambda^2$, entonces $\mu \ll \lambda^2$?.*
(iv) *Si $f \in L^1\left(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right), \mu * \nu\right)$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\, d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(x+y)\, \mu(dx)\, \nu(dy).$$

Problema 258 *Sean μ una medida en $(X, \mathscr{A})$ y $f, g \in M_r(X, \mathscr{A})$ tal que $\mu(\{x : f(x) \leq \alpha < g(x)\}) = 0$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\mu(\{x : f(x) < g(x)\}) = 0$.*

Notas y Referencias

Capítulo 1: Una excelente referencia para casi todo el material considerado en este capítulo es [13]. Una demostración directa del lema 1.2 se obtiene notando que para cada $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{N}(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}) = \sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{N} a_{mn}) \leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$.

Capítulo 2: En general, los libros de teoría de probabilidad tratan a buen nivel los conceptos introducidos en este capítulo; véase por ejemplo, [6] o [9].

Capítulo 3: La demostración de los teoremas 3.1, 3.2 y 3.5 está basada en [9], [25] y [10], respectivamente. Se sugiere [12] para un estudio más profundo de las medidas en espacios métricos.

Capítulo 4: Las secciones 4.1 y 4.2 siguen las líneas de [6]. Se pueden mostrar teoremas de extensión en otras colecciones de conjuntos, por ejemplo, en los anillos véase [16]. La demostración del teorema 4.1 usa el lema 1.1, en muy pocos textos se aprecia este hecho. La demostración de la regularidad de la medida de Lebesgue es sugerida por [4] en los ejercicios 9.G, 9.H y 9.I. El resultado del ejercicio 90 se debe a Steinhaus; ver teorema 8.2 de [8].

Capítulo 5: La demostración del lema 5.10 y del teorema 5.3 es similar a la dada en el lema 2.11 de [22] y en el teorema 1.5 de [18], respectivamente.

Capítulo 6: El enfoque de la definición de la integral de Lebesgue es tomado de [30]. La demostración del los lemas 6.1 y 128 y de los teoremas 6.3 y 6.6 está basada en [21], [5], [3] y [15], respectivamente. La proposición 6.2 es el ejemplo 3.4 de [31]. En [2] se encuentra una excelente colección de integrales impropias calculadas usando los resultados de la sección 6.5.3. Otras generalizaciones del teorema de cambio de variable pueden encontrarse en la sección 12.12 de [1]. El ejecicio 114 es una generalización del corolario 6.4 (ii). En [11] aparece una generalización del Teorema de la Convergencia Dominada.

Capítulo 7: La demostración de los teoremas 7.1 y 7.7 está apoyada en [14] y [15], respectivamente. Se puede demostrar primero la descomposición de Jordan de una medida signada y después usar este hecho para demostrar el teorema de descomposición de Hahn, ver [31].

Capítulo 8: La demostración de los teoremas 8.1, 8.5, 8.7 y de los lemas **??** y 8.3, está basada en [25], [10], [15], [7] y [24], respectivamente. La demostración del corolario 8.2 es sugerida en [23]. Una representación para los funcionales positivos con dominio el espacio de las funciones reales continuas definidas en un intervalo compacto se da en el teorema 9.9 de [4], por ejemplo. En [28] aparece una generalización del Teorema de Radon-Nikodym.

Capítulo 9: La demostración de los teoremas 9.1 y **??** está apoyada en [19] y [17], respectivamente. En la sección 5.2 de [20] se obtiene otra métrica para L^0. Debido a que la integrabilidad uniforme junto con la condición de finitud (CF) forman una condición suficiente para obtener convergencia en L^p se consideró conveniente incluir estos conceptos. Dicha condición resulta bastante útil en espacios de medida finita (en particular en espacios de probabilidad) pues la condición (CF) se satisface trivialmente.

Capítulo 10: Para una generalización de la medida producto a un producto arbitrario de espacios de medida ver [27]. El Problema 10 de la Sección 4.1 de [14] se da un ejemplo donde la contensión $\mathscr{B}(X_1)\otimes\mathscr{B}(X_2)\subset\mathscr{B}(X_1\times X_2)$.

Bibliography

[1] C. D. Aliprantis y K. C. Border. *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchiker's Guide*, Segunda Edición, Springer (1999).

[2] C. D. Aliprantis y O. Burkinshaw. *Principles of Real Analysis*, Edward Arnold (1981).

[3] R. B. Ash. *Real Analysis and Probability*, Academic Press (1972).

[4] R. Bartle. *The Elements of Integration*, Wiley, New York (1966).

[5] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York (1968).

[6] P. Billingsley. *Probability and Measure*, Tercera Edición, Wiley, New York (1995).

[7] S. G. Bobkov y C. Houdré. *Isoperimetric constants for product probability measures*, Ann. Prob., Vol. 25, No. 1, p. 184-205 (1997).

[8] S. B. Chae. *Lebesgue Integration*, Marcel Dekker (1980).

[9] K. L. Chung. *A Course in Probability Theory*, Segunda Edición, Academic Press, New York (1974).

[10] D. L. Cohn. *Measure Theory*, Birkhauser, Boston (1980).

[11] C. Constantinescu, W. Filter,K. Weber. *Advanced Integration Theory*, Springer (1998).

[12] X. Dao-Xing. *Measure and Integration Theory on Infinite-Dimensional Spaces*, Academic Press (1972).

[13] J. Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press (1969).

[14] R. M. Dudley. *Real Analysis and Probability*, Segunda Edición, Cambridge University Press (2002).

[15] G. B. Folland. *Real Analysis*, Modern Techniques and Their Applications, Segunda Edición, Jhon Wiley & Sons (1999).

[16] P. R. Halmos. *Measure Theory*, Van Nostrand, Princeton, New York (1950).

[17] E. Hewilt y K. Stromberg. *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, Berlin (1965).

[18] S. He, J. Wang y J. Yan. *Semimartingale Theory and Stochastic Calculus*, CRC Press (1990).

[19] O. Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*, Segunda Edición, Springer (2002).

[20] P. Malliavin. *Integration and Probability*, Springer (1995).

[21] A. Mukherjea y K. Potoven. *Real and Functional Analisys, Part A*, Segunda Edición, Plenum Press, New York and London (1984).

[22] D. Pollard. *A User's Guide to Measure Theoretic Probability*, Cambridge University Press (2002).

[23] M. Reed y B. Simon. *Methods of Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, New York (1972).

[24] H. L. Royden. *Real Analysis*, Segunda Edición, Macmillan, New York (1968).

[25] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*, Segunda Edición, Macmillan, New York (1974).

[26] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*, Tercera Edición, McGraw-Hill (1976).

[27] S. Saeki. *A Proof of the Existence of Infinite Product Probability Measures*, American Math. Monthly, p. 682-683 (1996).

[28] D. A. Salamon. Measure and Integration, European Mathematical Society (2016).

[29] M. Spivak. *Cálculo Infinitesimal*, Segunda Edición, Ediciones REPLA (1988).

[30] D. W. Stroock. *A Concise Introduction to the Theory of Integration*, Tercera Edicion, Birkhäuser (1999).

[31] C. Swartz. *Measure, Integration and Function Spaces*, World Scientific (1994).

Index