

**Repaso de análisis**  
**(Medida y Estadística matemática)**  
**Quiz 2**

Arturo Jaramillo Gil

**Ejercicio 1**

Decimos que una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es  $L$ -Lipchitz, con  $L > 0$  si para todo  $x, y \in [a, b]$ , se tiene que  $|f(y) - f(x)| \leq L|x - y|$ . Supón que  $f$  es una función diferenciable en  $(a, b)$  y continua en  $[a, b]$ . Muestra que bajo este supuesto de  $f$ , se tiene que  $f$  es  $L$ -Lipchitz si y sólo si  $\sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| \leq L$ .

**Ejercicio 2**

Calcula  $\int_0^\pi x \cos(2\pi - x) dx$ .

**Ejercicio 3**

Considera las funciones  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) := x^2$  y  $g(x) := x^2$ . Es decir, ambas funciones son la función cuadrática pero en diferentes dominios. Determina si dichas funciones son uniformemente continuas.

**Ejercicio 4**

Considera las funciones  $f, g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

y

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

Determina si dichas funciones son Riemann integrables y justifica de manera rigurosa tu respuesta.