Teoría de la medida- Tarea 2

Arturo Jaramillo Gil

Ejercicio 1
Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales. Sea $L \in \mathbb{R}$. Prueba que a_n converge a L si y sólo si $\limsup_n |a_n - L| = 0$.

Ejercicio 2
Sea $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales arbitrarios. Suponga que existe una sucesión $\{b_n\}$ de reales positivos tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty.$$

Es decir, que la sucesión de sumas parciales de b_k converge (o equivalentemente, que la sucesión de sumas parciales de b_n está acotada). Muestra que si $|\xi_k| \leq b_k$, entonces la sucesión

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \xi_k.$$

converge.

Ejercicio 3
La noción de convergencia se extiende de manera directa a situaciones más generales: si (X, d) es un espacio métrico (ver material suplementario para consultar la definición de espacio métrico), decimos que una colección $\{a_n\}_{n\geq 1}$ de elementos en X converge a un valor $L \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$,

$$d(a_n, L) < \varepsilon.$$

La noción de sucesión de Cauchy también se extiende de manera directa: decimos que una colección $\{a_n\}_{n\geq 1}$ de elementos en X es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n, m \geq N$,

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon.$$

Una manera particular de obtener un espacio métrico es mediante una norma: si X es un espacio vectorial real normado (ver material suplementario para consultar la definición de espacio vectorial real normado), con norma $\|\cdot\|$, podemos definir $d(x, y) := \|y - x\|$ de manera que el par (X, d) sea un espacio métrico.

El siguiente ejercicio tiene como objetivo dar una aplicación muy natural de dicha noción de convergencia en el contexto de sucesiones de matrices.

(1) Considera el conjunto de matrices $X = \mathbb{R}^{n\times n}$. Es fácil ver (y no es necesario que lo demuestres), que si $A = (A_{i,j}\ ;\ 1 \leq i, j \leq n)$ es un elemento de X, entonces la

función

$$\|A\| := \sum_{1\le i,j\le n} |A_{i,j}|$$

define una norma en X, y ella induce una distancia bajo la cual cada sucesión de Cauchy es convergente. Muestra que dicha norma satisface que para $A, B \in X$,

$$\|AB\| \le n^2 \|A\|\|B\|.$$

Hint: nota que para cualesquiera $1 \le i, j \le n$

$$|A_{i,k}| \le \max_{1\le k\le n} |A_{i,k}|$$

$$|B_{k,j}| \le \max_{1\le k\le n} |B_{k,j}|.$$

(2) Adicional a las operaciones de espacio vectorial, el espacio de matrices X posee la operación de multiplicación de matrices. De esta manera, podemos definir, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $A \in X$,

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k.$$

Encuentra una cota para $\|\frac{1}{k!}A^k\|$.

(3) Usa el inciso anterior para demostrar que S_n es una sucesión de Cauchy. Aquí termina el ejercicio, pero es importante mencionar que como cada sucesión de Cauchy en X es convergente, estamos concluyendo que S_n tiene un límite. Esto le da sentido a la exponencial matricial e^A, definida mediante su expansión en serie

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

1. Material suplementario

Definition 1.1. *Decimos que (X, d) es un espacio métrico con conjunto base X y distancia d si se cumple que (i) X un conjunto arbitrario y (ii) $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ es una función no-negativa que satisface las siguientes propiedades:*

(1) *Para todo $x \in X$, $d(x, x) = 0$.*
(2) *Si $x, y \in X$ son distintos, entonces $d(x, y) > 0$.*
(3) *Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.*
(4) *Para cualesquiera $x, y, z \in X$, se tiene que $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$.*

Definition 1.2. *Decimos que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial real normado si (i) X un espacio vectorial y (ii) $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ es una función no-negativa que satisface las siguientes propiedades:*

(1) *Para todo $x \in X$, $d(x, x) = 0$.*
(2) *Si $x \in X$ es no cero, entonces $\|x\| > 0$.*
(3) *Para todo $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.*

(4) *Para cualesquiera* $x, y \in X$*, se tiene que* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.