Teoría de la medida- Tarea 10

Arturo Jaramillo Gil

En lo sucesivo, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ denotará un espacio de medida

Ejercicio 1
Sea $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{F})$ arbtiraria. Definimos la función $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ mediante la fórmula

$$\nu[E] := \int_E f(x)\mu(dx)$$

para $E \in \mathcal{F}$. Demuestra lo siguiente

- La función que ν es es una medida.
- La condición $\int_X f(x)\mu(dx) = 0$ implica que $f = 0$ μ-casi todas partes.
- Si $\int_X f(x)\mu(dx) < \infty$, entonces $f < \infty$ μ-casi todas partes.

Ejercicio 2
Defina ν como en el ejercicio anterior. Muestra que para toda $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{F})$

$$\int_X g(x)\nu(dx) = \int_X g(x)f(x)\mu(dx)$$