

## Teoría de la medida- Tarea 11

Arturo Jaramillo Gil

### Instrucciones

Resuelve los ejercicios y escríbelos en Latex.

### Ejercicio 1

Sea  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión en  $M_r(X, \mathcal{A})$  tal que  $\int_A \sup\{|f_n| ; n \geq 1\} d\mu < \infty$  para  $A \in \mathcal{A}$ . Demuestra que

$$\int_A \limsup_n f_n \geq \limsup_n \int_A f_n d\mu.$$

### Ejercicio 2

Sea  $f \in L(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ . Demuestra que si  $f$  es continua, la función

$$g(t) := \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x+y) - f(x)| \lambda(dx) ; |y| \leq t \right\}.$$

es continua en  $t = 0$ .

### Ejercicio 3

Suponga que  $f_n \in M^+(X, \mathcal{A})$  es tal que  $\int_X f_n d\mu = 0$ . Mostrar que

$$\lim_n \int_X (1 - e^{-f_n}) \mu(dx) = 0$$