Teoría de la medida- Tarea 5

Arturo Jaramillo Gil

Ejercicio 1

Sea X un conjunto arbitrario y considera las colecciones de conjuntos

$$\mathcal{C} := \{A \subset X \ ; \ A \text{ es numerable o } A^c \text{ es numerable } \}$$
$$\mathcal{K} := \{A \subset X \ ; \ A \text{ es finito o } A^c \text{ es finito } \}$$

Muestra que $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra y $\mathcal{K}$ es un álgebra.

Ejercicio 2

Sea $\mathcal{F}$ un álgebra y denotemos por $m(\mathcal{F})$ la clase monótona generada por $\mathcal{F}$. Para $E \in m(\mathcal{F})$, consideramos la colección

$$\mathcal{M}_E := \{F \in m(\mathcal{F}) \ ; \ E \backslash F, E \cup F, F \backslash E \text{ están en } m(\mathcal{F})\}.$$

Muestra que $\mathcal{M}_E$ es una clase monótona.

Ejercicio 3

Sea $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de álgebras tales que $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Muestra que $\bigcup_{n\geq} \mathcal{A}_n$ es un álgebra. Da un ejemplo de una sucesión $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 1}$ de σ-álgebras tales que se cumple la condición $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$, pero al mismo tiempo $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{A}_n$ no es una σ- álgebra.

Ejercicio 4

Muestra que si $\mathcal{F}$ es al mismo tiempo un álgebra y una clase monótona, entonces es una σ-álgebra. Nota: vimos dicho resultado en clase, y naturalmente, puedes utilizar tus notas para revisar la prueba, pero sería muy conveniente que antes de hacerlo identifiques los puntos clave que se requiere demostrar.