Teoría de la medida- Tarea 4

Arturo Jaramillo Gil

Ejercicio 1

Si A_n es una sucesión de subconjuntos de X, decimos que $\lim_n A_n$ existe si $\limsup_n A_n$ y $\liminf_n A_n$ coinciden. (i) Demuestra que toda sucesión monótona es convergente. (ii) Da un contraejemplo de una sucesión A_n que no es monótona pero si es convergente.

Ejercicio 2

Sea μ una medida en $(X, \mathcal{A})$ y A_n una sucesión de elementos en $\mathcal{A}$. Demuestra que

$$\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n)$$

Demuestra también que bajo la condición adicional $\mu(X) < \infty$, se tiene

$$\mu(\limsup_n A_n) \geq \limsup_n \mu(A_n).$$

Ejercicio 3

Sea μ una medida finita en $(X, \mathcal{A})$ y A_n una sucesión de elementos en $\mathcal{A}$. Si existe $\delta > 0$ tal que $\mu(A_n) \geq \delta$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un punto en X que pertenece a una infinidad de A_n.