

Teoría de la medida- Tarea 0

Arturo Jaramillo Gil

Ejercicio 1

Suponga que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente. Demostrar que f tiene a lo más un número contable de discontinuidades.

Los siguientes dos ejercicios hacen referencia a la sección 1.3 de las notas de José Villa Morales. En particular, los alumnos deberán consultar el concepto de espacio métrico, de manera individual.

Ejercicio 2

Sea X es un espacio métrico y \mathcal{C} una colección de conjuntos abiertos de X . El teorema de Lindelof establece que existe una subcolección \mathcal{C}' de \mathcal{C} , tal que

$$\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{C}'} A.$$

Demuestra dicho teorema. Después de que pienses por tu propia cuenta como mostrar el resultado, puedes consultar la demostración de las notas de José Villa Morales, y aterrizar las ideas en tu escrito, pero es importante que te asegures de entender el argumento.

Ejercicio 3

Sea $\{x_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de Cauchy y $a \in (0, 1)$. Muestra que existe una subsucesión de $\{x_n\}_{n \geq 1}$ tal que

$$d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq a^k$$

para toda $k \geq 1$.