Método de Stein:

Haces approx de leyes de proba complicadas mediante leyes "Menos complicadas" $\leftarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{ Gaussianas.} \\ \cdot \text{ Poisson} \end{array} \right.$

Ejemplo de aprox. Poisson.

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^n \qquad \xi_k^n \leftarrow \begin{array}{l}\text{independientes} \\ \text{Bernoulli}(p_k).\end{array}$$

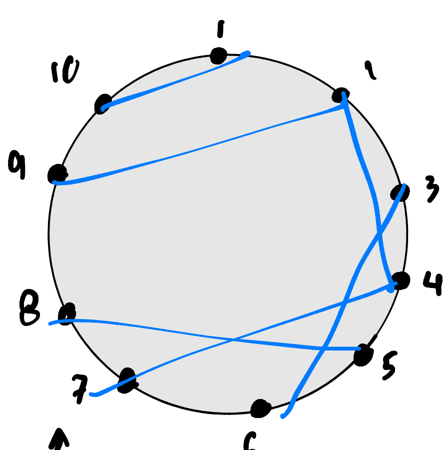
En algunas circunstancias:

$$\mathcal{L}(X_n) \approx \text{Ley Poisson}(\mathbb{E}[X_n]).$$

Ejemplos:

1). X_n = conteo en contextos de

- De fondo hay una gráfica:



realización de una gráfica.

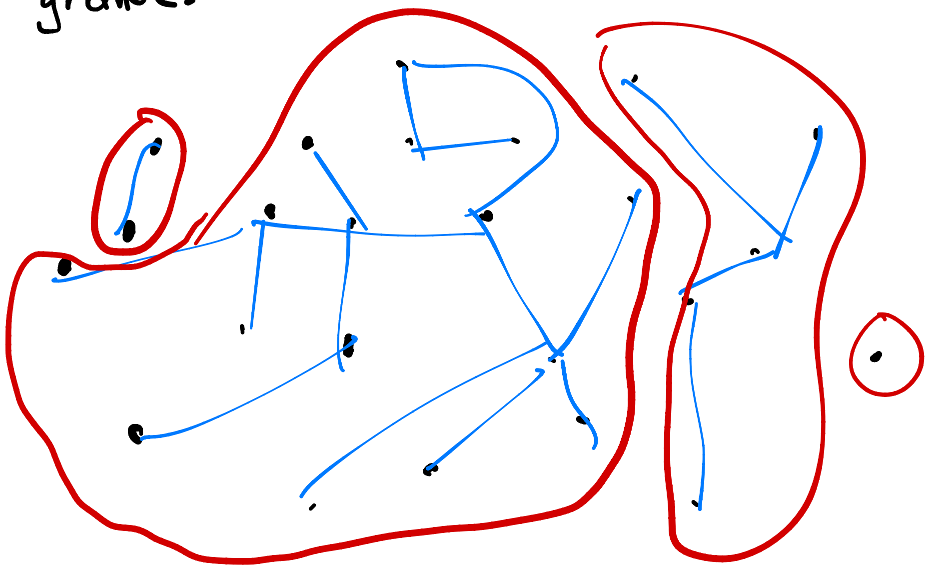
Conteo de "cruces"

$$= \sum_{\substack{(a,b) \\ (c,d)}} \mathbb{1}\{\text{hay un cruce entre } (a,b) \text{ y } (c,d)\} \circledast$$

Pregunta central:

$\circledast \approx$ Algo "sencillo"?

2.-) Ejemplo: una gráfica grande:



Se estudia la conectividad de una gráfica.

Conteo de # componentes conexas $\overset{?}{\approx}$ Algo simple?

Motivación:

Problema:

$\{\xi_k\}_{k\geq 1} \leftarrow$ variables aleatorias independientes, con $\mathbb{E}[\xi_k]=0$, y definimos

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_k^2].$$

$$S_n = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

Pregunta: $d_K(S_n, N) \approx ?$ $\quad N \sim \text{Normal}(0,1)$ ¿?

Heurística de Stein:

es "razonable" pensar que es equivalente

a) $$\sup_{z\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}[S_n \le z] - \mathbb{P}[N \le z] \right| \approx 0$$

$$\sup_{z\in D} \left| \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_n \le z\}}] - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N \le z\}}] \right|$$

b) $$\sup_{f\in\mathcal{C}} \left| \mathbb{E}[S_n f(S_n) - f'(S_n)] \right| \approx 0 .$$

familia de funciones de prueba

Equivalencia entre a) y b):

considerar la ecuación

$$x f(x) - f'(x) = \mathbb{1}_{\{x \le z\}} - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N \le z\}}] \qquad \circledast$$

llamamos f_z a la solución a $\circledast$.

Notar que

$$\left| \mathbb{E}[S_n f_z(S_n) - f_z'(S_n)] \right|$$

$$= \left| \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_n \le z\}} - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N \le z\}}] \right] \right|$$

$$= \left| \mathbb{P}[S_n \le z] - \mathbb{P}[N \le z] \right| .$$

$\Rightarrow$ tomando $\sup_{z \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow$

$$d_K(S_n, N) = \sup_z \left| \mathbb{P}[S_n \leq z] - \mathbb{P}[N \leq z] \right|.$$

$$= \sup_z \left| \mathbb{E}[S_n f_z(S_n) - f_z'(S_n)] \right|$$

Claim:

$f_z \leftarrow$ sale de de $\mathbb{1}_{[0,z]}(\cdot)$.

pero tiene mejores propiedades.

$$\| f_z \|_\infty, \| f_z' \|_\infty \leq 10$$

Por lo tanto,

$$d_K(S_n, N) \leq \sup_{\substack{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \|f\|_\infty, \|f'\|_\infty \leq 10}} \left| \mathbb{E}[\underbrace{S_n f(S_n) - f'(S_n)}_{\mathcal{L}[f](S_n)}] \right|,$$

con $\mathcal{L}[f](x) = x f(x) - f'(x)$

Pregunta:

Heurística de Stein:

$\mathcal{C} \leftarrow$ cjto de funciones de prueba.

$$d_{\mathcal{C}}(X,N) := \sup_{h\in\mathcal{C}} |\mathbb{E}[h(X) - h(N)]|$$

$X \leftarrow$ v.a.

$N \leftarrow \sim N(0,1)$

$\Big\downarrow$ intercambio mediante heurística de Stein:

$$\sup_{h\in\mathcal{C}} |\mathbb{E}[X f_h(X) - f_h'(X)]|$$

resolver:

$$\underbrace{x f(x) - f'(x)}_{\mathcal{L}[f](x)} = \mathbb{E}[h(X) - h(N)]$$

Nota:

f_h tiene "mejores" propiedades que h.

Ejemplo:

$\mathcal{C} = \{ \mathbb{1}_{(-\infty, z]}(x) \; ; \quad z \in \mathbb{R} \}$.

Claim: si $h \in \mathcal{C} \Rightarrow f_h$ es absolutamente continua; & $\|f_h'\|_\infty \leq 1$.

Lema 2.3.

libro Normal approximation by Stein Method.

$$\Rightarrow \quad d_{\mathcal{C}}(X,N) \leq \sup_{f\in\tilde{\mathcal{C}}} |\mathbb{E}[X f(X) - f'(X)]|.$$

con $\hat{\mathcal{C}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ;\ f'$ existe c.s. $\}$

y $\|f'\|_\infty \leq 1$

Nota:

Si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ y consideramos.

$$\underbrace{\vec{x}\, \nabla f(\vec{x}) - \Delta f(\vec{x})}_{\mathcal{L}[f](\vec{x})} = h(\vec{x}) - \mathbb{E}[h(\vec{N})]$$

$\vec{N} \sim N(0, I_d)$.

$$f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(h(\vec{x} e^{-\theta} + \sqrt{1-e^{-2\theta}}\, \vec{y}) - \mathbb{E}[h(\vec{N})] \right) F_N(d\vec{y})$$

Si $\mathcal{C} = \{ h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d : h$ es 1-Lipchitz $\}$.

$d_{\mathcal{C}}(X, N) \leftarrow$ solución explícita. y está en términos de una ec. de transporte (libro de C.Villani).

Hay situaciones en los que

$d_{TV}(X,$ Otra cosa$)$ es approximable.

Otra situación:

- Expansiones de Edgeworth.

$\mu_{X_n} \leftarrow$ medida de proba de X_n

$$\tilde{\mu}_n = \mu_{\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n}} \approx \gamma$$

$\gamma \uparrow$ medida Gaussiana estandard.

$$\int F(x)\, \mu_n(dx) \approx \int F(x)\, \gamma(dx) + \int F(x)\, \hat{\gamma}(dx)$$

$\gamma(dx) \uparrow$ medida real. $\quad \hat{\gamma}(dx) \uparrow$ medida compleja.

Hasta el momento, hemos visto que

$$d_K(S_n, N) \leq \sup_{f \in \mathcal{C}} |\mathbb{E}[\, X f(X) - f'(X)]|$$

$$\mathcal{C} = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t.q. \quad x f_h(x) - f_h'(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(N)]$$

$$\text{con } h(x) = \mathbb{1}_{(-\infty, z)}(x) \}.$$

¿Cómo manejamos a

$$\mathbb{E}[\, X f(X) - f'(X)] \,?$$

Caso que consideraremos:

$$X = S_n = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad \text{con } \xi_k \text{ son centradas } \Leftarrow$$

e indep. (NO necesariamente i.i.d.).

$$\text{donde} \quad \sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_k^2].$$

Vamos a probar que $S_n \xrightarrow{\text{ley}} N(0,1)$

$$\text{si} \quad \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left| \frac{\xi_k}{\sigma_n} \right|^3 \right] \to 0$$

De hecho, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left| \frac{\xi_k}{\sigma_n} \right|^3 \right]$ es la velocidad de convergencia.

Idea:

Acotar el funcional

$$\left| \mathbb{E}\left[S_n f(S_n) - f'(S_n) \right] \right|$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^n, \qquad \text{con} \qquad \xi_k^n = \frac{\xi_k}{\sigma_n}$$

$$\mathbb{E}[S_n f(S_n)] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\xi_k^n f\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^n \right) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\xi_k^n \left(f\left(\sum_{\substack{1 \le j \le n \\ k \neq j}} \xi_j^n + \xi_k^n \right) - f\left(\sum_{\substack{1 \le j \le n \\ k \neq j}} \xi_j^n \right) \right) \right]$$

heurística

$$\approx \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k^n|^2 \right] \mathbb{E}\left[f'\left(\sum_{\substack{1 \le j \le n \\ k \neq j}} \xi_j^n \right) \right]$$

$$\approx \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k^n|^2 \right] \right)}_{\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}[\xi_k^2]}{\sigma_n^2} = 1} \mathbb{E}\left[f'(S_n) \right]$$

Moraleja: $\mathbb{E}[S_n f(S_n)] \approx \mathbb{E}[f'(S_n)]$.

Formalidades:

$$\mathbb{E}[S_n f(S_n)] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\xi_k^n \left(f\left(S_n^{(k)} + \xi_k^n\right) - f\left(S_n^{(k)}\right)\right)\right]$$

$$S_n^{(k)} := \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ k \neq j}} \xi_j^n$$

Ahora,

$$\underbrace{f(S_n^{(k)} + \xi_k^{(n)}) - f(S_n^{(k)})}_{= f(S_n^{(k)} + \lambda \xi_k^{(n)})\big|_{\lambda=0}^{\lambda=1}} = \xi_k^{(n)} \int_0^1 f'(S_n^{(k)} + \lambda \xi_k^{(n)})\, d\lambda \; \mp f'(S_n^{(k)}) =*$$

$$* = \xi_k^{(n)} f'(S_n^{(k)}) + \xi_k^{(n)} \int_0^1 \int_0^1 f''(S_n^{(k)} + \gamma \lambda \xi_k)\, \lambda \xi_k \, d\gamma\, d\lambda$$

$\Rightarrow$

$$\left| \mathbb{E}[S_n f(S_n)] - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k^n|^2 f'(S_n^{(k)})\right] \right|$$

$$\le \|f''\|_\infty \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k^n|^3\right]$$

$\Rightarrow$

$$\left| \mathbb{E}[S_n f(S_n)] - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\beta_k^n|^2 f'(S_n)\right]\right|$$

$$\leq \|f''\|_\infty \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k^n|^3\right] + \sum_{k=1}^{n} \left|\mathbb{E}\left[|\beta_k^n|^2 \big(\underbrace{f'(S_n^{(k)}) - f'(S_n)}_{|\sim| \leq \|f''\|_\infty |\xi_k^n|}\big)\right]\right|$$

$$\leq 2\|f''\|_\infty \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k^n|^3\right]. \qquad \square$$

Conclusión:

Teorema:

$$\xi_k^n = \frac{\xi_k}{\sigma_n}$$

$$\sup_{h \in \mathcal{C}} \left|\mathbb{E}[h(S_n) - h(N)]\right| \leq 2\left(\sup_{h \in \mathcal{C}} \|f_h''\|_\infty\right) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\xi_k^n|^3\right].$$

$\leftarrow$ versión del teorema de Berry-Esseen

Caso particular: $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ son i.i.d

$$\sup_{h \in \mathcal{C}} \left|\mathbb{E}[h(S_n) - h(N)]\right| \leq 2\left(\sup_{h \in \mathcal{C}} \|f_h''\|_\infty\right) \frac{\mathbb{E}\left[|\xi_1|^3\right]}{\mathbb{E}\left[|\xi_1|^2\right]^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Capítulo 2:)

Cómo manejar de manera clásica a

$\mathbb{E}[xf(x)] - \mathbb{E}[f'(x)]$.

- Contexto de sumas de variables aleatorias
- Contexto de v.a. que no son sumas de variables aleatorias, pero pides "intercambiabilidad".

⋮

Transformadas
- de sesgo
- de sesgo cero.

Sección 2.1 Ecuación de Stein.

Lema:

Si $W \sim N(0,1)$, y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absol. cont. (+)

(i.e. $f(x) = \int_0^x f'(r)\,dr$) t. q. $\mathbb{E}[|f'(Z)|] < \infty$,

entonces

$\mathbb{E}[f'(W)] - \mathbb{E}[Wf(W)] = 0$ (*)

Recíprocamente, si se vale (*) $\forall$ f como en (+)

entonces $W \sim N(0,1)$. prueba pendiente.

Vamos directo a la eq. de Stein:

Tomamos $z \in \mathbb{R}$ y $h(x) := \mathbb{1}_{(-\infty,z]}(x)$.

Lema:

La ecuación

$$f'(w) - wf(w) = h(w) - \mathbb{E}[h(Z)]$$

$\mathbb{1}_{\{w \leq z\}} - \mathbb{P}[W \leq z]$

tiene una única solución dado por

$$f_z(w) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\, e^{w^2/2}\, \Phi(w)\,(1-\Phi(z)) & \text{si } w \leq z \\ \sqrt{2\pi}\, e^{w^2/2}\, \Phi(z)\,(1-\Phi(w)) & \text{si } w > z. \end{cases}$$

$\Phi(w) = \mathbb{P}[Z \leq w]$

prueba:

$$f'(w) - wf(w) = \theta(w)$$

Idea es usar factor integrante:

$$e^{\psi(w)}(f'(w) - wf(w)) = \tilde{\theta}(w)$$

Paso I: ver a

$e^{\psi(w)}(f'(w) - wf(w))$ como la derivada de

$e^{\psi(w)} f(w)$

Propuesta: $\gamma(w) = -\frac{w^2}{2}$. Ahora si:

$$\frac{d}{dw}\left(e^{-\frac{w^2}{2}} f(w)\right) = e^{-\frac{w^2}{2}} f'(w) - w e^{-\frac{w^2}{2}} f(w)$$

$$= e^{-\frac{w^2}{2}} \left(f'(w) - w f(w)\right)$$

$$= e^{-\frac{w^2}{2}} \left(h(w) - \mathbb{E}[h(Z)]\right)$$

Moraleja:

es equivalente resolver

$$\frac{d}{dw}\left(e^{-\frac{w^2}{2}} f(w)\right) = e^{-\frac{w^2}{2}} \left(h(w) - \mathbb{E}[h(Z)]\right)$$

y esto se resuelve como

$$e^{-\frac{w^2}{2}} f(w) = C + \int_{-\infty}^{w} \left(\mathbb{1}_{\{r \leq z\}} - \underbrace{\mathbb{P}[Z \leq z]}_{\Phi(z)} \right) e^{-\frac{r^2}{2}} \, dr$$

Notar que $C = 0$.

$$e^{-\frac{w^2}{2}} f(w) = \int_{-\infty}^{w} \left(\mathbb{1}_{\{r \leq z\}} - \Phi(z) \right) e^{-\frac{r^2}{2}} \, dr$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathbb{1}_{\{r \leq z\}} - \Phi(z) \right) \mathbb{1}_{(-\infty, w)}(r) \, \phi(r) \, dr$$

con

$$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} \qquad = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\left(\Phi(z) - \Phi(z)\Phi(w)\right). & \text{si } w \geq z \\ & \text{si } w < z \end{cases}$$

Prueba de la caracterización de $N(0,1)$:

$$\mathbb{E}[f'(W)] - \mathbb{E}[Wf(W)] = 0 \quad (*) \iff W \sim N(0,1).$$

$\Rightarrow$) Si $(*)$ se vale: tomamos f como la solución de

$$f'(w) - w f(w) = h(w) - \Phi(z).$$

tomar $w = W$ y sacas esperanza

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{hipótesis}}}{0 =} \mathbb{E}[f'(W) - Wf(W)] = \mathbb{P}[W \leq w] - \Phi(w)$$

$$\Rightarrow \quad W \sim N(0,1).$$

Si $W \sim N(0,1)$, por el arg. del libro $(*)$ se vale.

$$\mathbb{E}[Wf(W)] = \int_{\mathbb{R}} w f(w)\, \phi(w)\, dw = \int_{\mathbb{R}} f(w)\, w\phi(w)\, dw = (\#\#)$$

$$\phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}}$$

Notar que $\quad w\phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} w e^{-\frac{w^2}{2}}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dw} e^{-\frac{w^2}{2}} = -\frac{d}{dw} \phi(w)$$

$$(\#\#) = -\int_{\mathbb{R}} f(w) \frac{d}{dw} \phi(w)\, dw = \int_{\mathbb{R}} f'(w)\, \phi(w)\, dw = \mathbb{E}[f'(W)].$$

Propiedades de regularidad:

Recordar que

$$f'(w) - wf(w) = h(w) - \mathbb{E}[h(Z)]$$

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(w)\,dw$$

$$= \int_x^y \left(h(w) - \mathbb{E}[h(Z)]\right) dw + \int_x^y w f(w)\,dw.$$

Tarea:

Demostrar 2.3 y 2.4

Solución de la ecuación general

$$f'(w) - wf(w) = h(w) - \mathbb{E}[h(N)].$$

puede resolverse obteniendo la expresión.

$$f_h(w) = e^{w^2/2} \int_{-\infty}^{w} \left(h(x) - \mathbb{E}[h(N)]\right) e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$